

# Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation

**Salvatore Solimeno**

UNIVERSITY OF NAPLES  
NAPLES, ITALY

**Bruno Crosignani**

UNIVERSITY OF ROME, "LA SAPIENZA"  
ROME, ITALY

**Paolo DiPorto**

UNIVERSITY OF L'AQUILA  
L'AQUILA, ITALY

1986

**ACADEMIC PRESS, INC.**

Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

Orlando San Diego New York Austin  
London Montreal Sydney Tokyo Toronto

С. Солимено, Б. Крозиньяни,  
П. Ди Порто

# ДИФРАКЦИЯ И ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Перевод с английского  
канд-тов физ.-мат. наук Е.В. Московца и В.В. Тяхта  
под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук, проф. В.С. Летохова



Москва «Мир» 1989

ББК 22.34  
С60  
УДК 535.3

**Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.**

**С60 Дифракция и волноводное распространение оптического излучения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 664 с., ил.  
ISBN 5-03-001021-1**

Монография известных итальянских специалистов посвящена актуальной проблеме дифракции и распространения света. Вопросы классической оптики (лучевая оптика, основы дифракции и т. д.) и современные разделы (свет в плоско-слоистой среде, оптические резонаторы, оптические волокна и т. д.) освещаются с единой точки зрения.

Рассматриваются общие свойства распространения электромагнитного излучения и его взаимодействие с веществом, представлены асимптотические методы решения волнового уравнения. Большое внимание уделено анализу распространения света в слоистых периодических структурах (многослойных пленках, металлических и диэлектрических отражателях и интерференционных фильтрах). Изучаются дифракция при распространении света, а также рассеяние света на различных предметах, резонаторы и распространение света в оптических волокнах.

Каждая глава книги снабжена задачами. Она содержит много полезных формул и сведений по обсуждаемым вопросам. Может служить учебным пособием или справочником.

Для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников, работающих в области оптики и в смежных с ней областях.

С  $\frac{1604060000 - 171}{041 (01) - 89}$  49 — 89

**ББК 22.34**

*Редакция литературы по физике и астрономии*

ISBN 5-03-001021-1 (русск.)  
ISBN 0-12-654340-2 (англ.)

© 1986 by Academic Press, Inc.  
© перевод на русский язык, «Мир», 1989

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

За последние почти тридцать лет, прошедшие со времени изобретения лазера и повсеместного применения лазерного излучения, наши представления о распространении света, особенно в пространственно неоднородных средах, существенно расширились. Достаточно упомянуть такие крупные разделы современной оптики, как голография, лазерная оптика, волоконная или градиентная оптика, интегральная оптика, компьютерная оптика, чтобы представить себе, как далеко продвинулись оптическая наука и техника в своих возможностях управлять распространением светового пучка.

Естественно, что современное состояние проблемы дифракции и распространения света должно быть отражено в монографической литературе. Представляемая читателю монография известных итальянских специалистов как раз удачно служит этой цели. Опубликованные до сих пор книги по современной оптике обычно рассматривали какой-либо один из упомянутых разделов. В настоящей же монографии изложение всех современных разделов оптики ведется с единой точки зрения.

Среди многих достоинств книги следует выделить следующие. Во-первых, она будет полезна не только научным работникам в качестве настольного справочного пособия, содержащего множество необходимых формул, но и студентам старших курсов и аспирантам в качестве глубокого и продуманного учебника. В конце каждой главы помещено несколько десятков задач, сгруппированных по разделам (всего в книге 205 задач), часто с указанием ссылок на оригинальную работу, в которой имеется решение задачи. Во-вторых, авторы хорошо знакомы с достижениями не только зарубежных, но и советских ученых и объективно отражают их вклад в развитие современной оптики.

Перевод книги выполнили Е.В. Московец (гл. 6—8 и приложения) и В.В. Тяхт (гл. 1—5).

Проф. *В.С. Летохов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге рассмотрены свойства оптического электромагнитного излучения и те разделы прикладной математики, которые используются для его описания. Одна из задач, которую мы здесь ставим, — провести читателя по долгому, но замечательному пути: от первого знакомства с уравнениями Максвелла до таких достижений современной оптики, как «геометрическая теория дифракции», асимптотические решения волнового уравнения, теория оптических резонаторов, волоконная оптика и многослойные структуры.

«Новые физические понятия создаются не только в процессе обобщения физических теорий, но и обратным путем: они могут возникнуть в результате применения приближенных методов к более точной физической теории... Так, понятие луча, а равно и вся геометрическая оптика могут быть выведены из волновой теории света как идеализации, пригодные в предельном случае весьма малой длины волны (в области вблизи границы света и тени эти идеализации уже непригодны). При менее полной идеализации учитываются и отклонения от геометрической оптики, иначе говоря, учитывается дифракция, которая также является новым физическим понятием (дифракционные явления наиболее ярко проявляются как раз вблизи границы между светом и тенью)». Этими словами академик В.А. Фок определил основные концепции геометрической оптики и теории дифракции в своей знаменитой книге «Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн», ставшей одной из настольных книг целого поколения физиков. Кроме того, следует отметить также такие классические труды, как «Оптика» А. Зоммерфельда, «Основы оптики» М. Борна и Е. Вольфа, «Оптика» Г.С. Ландсберга.

Канонические задачи теории дифракции были решены в нашем столетии Зоммерфельдом (дифракция на полуплоскости), Малюжиным (дифракция на клине), Фоком (поле на границе тени от гладкого препятствия) и Вайнштейном (дифракция на открытом конце волновода). Специальные методы решения таких задач были развиты Вайнштейном (метод Винера — Хопфа), Уфимцевым и некоторыми другими учеными. Особо следует отметить теорию граничного слоя.

В нашей книге мы подробно рассматриваем основы теории дифракции, уделяя особое внимание асимптотическим методам, широко используемым в настоящее время. Из всех многочисленных приложений для более подробного рассмотрения мы выбрали оптические резонаторы и многослойные среды, учитывая их важность в лазерной физике и оптической технологии.

Хорошо известно, что открытые резонаторы применяются в лазерах для генерации излучения — это их первое, но далеко не последнее приложение. Характерное свойство открытых резонаторов в том, что их размеры гораздо больше длины волны.

Если говорить только о главных приложениях многослойных систем (мультислоев), то следует отметить отражатели света, лазерные зеркала, светоделители, оптические фильтры. Современная технология позволяет без особых трудностей получать мультислои для рентгеновского излучения, и уже в нескольких лабораториях были получены зеркала с отражательной способностью порядка 60%. В будущем эти исследования должны оказать влияние на развитие астрономии, источников синхротронного излучения и рентгеновской микроскопии. Хотя наша книга и посвящена оптическому диапазону частот, анализ многослойных систем без больших изменений можно приложить и к рентгеновскому диапазону.

Последняя глава книги посвящена волоконной оптике — предмету, который не нуждается в каком-либо дополнительном представлении.

Различные математические методы вводятся и обсуждаются в книге по мере возникновения в них надобности. Они не выделены в отдельную главу. По нашему мнению, читатель гораздо эффективнее овладеет математическим аппаратом, если будет применять его к конкретным возникающим задачам. Исключение сделано лишь для формул, касающихся специальных функций. Их можно найти в приложениях к книге.

В конце каждой главы помещен набор задач. Это связано с тем, что, как правило, читатель изучает теорию, применяя ее к конкретным примерам. Мы надеемся, что возможностей для этого будет вполне достаточно. Среди задач есть и такие, которые расширяют содержание глав или вводят понятия, которым по тем или иным причинам не нашлось места в основном тексте.

В заключение мы пользуемся возможностью выразить свою глубокую благодарность переводчикам Е.В. Московцу и В.В. Тяхту из Института спектроскопии АН СССР за подготовку русского издания книги. Наша признательность редактору перевода проф. В.С. Летохову чересчур велика, чтобы ее можно было измерить.

Переводчикам был предоставлен список ошибок и опечаток, попавших в оригинальное английское издание. Необходимые поправки были внесены при переводе.

И наконец, нам хотелось бы выразить глубокую признательность издательству «Мир» и его персоналу за внимание и тщательность, с которыми они отнеслись к переводу, редактированию и печати этой книги.

*С. Солимено, Университет г. Неаполя  
Б. Крозиньяни, Университет г. Акуила  
П. Ди Порто, Университет г. Акуила*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последующих двадцати лет после появления в начале 1960 годов лазера было разработано множество приборов и устройств, позволяющих управлять электромагнитным излучением в оптическом диапазоне. К настоящему времени опубликовано немало превосходных книг, в которых более или менее подробно описываются конкретные классы этих оптических приборов (например, оптические резонаторы и оптические волокна). Однако мы понимали, что назрела необходимость в написании руководства, которое познакомило бы читателя с общими принципами, лежащими в основе таких приборов, и проиллюстрировало бы общие идеи на большом числе примеров, разбросанных, как правило, по отдельным книгам. При таком подходе читатель ознакомится с рядом аналитических методов (многие из которых развиты, вообще говоря, специалистами в области классического электромагнетизма, а не собственно оптики), которые дают основу для полного понимания отдельного предмета.

Настоящая книга появилась благодаря научному опыту, накопленному авторами, которые работали в областях, тесно связанных со многими рассматриваемыми здесь вопросами, а также благодаря их преподавательской деятельности в университетах г. Акуила (Ди Порто, физика твердого тела), г. Рима (Крозиньяни, оптоэлектроника) и г. Неаполя (Солимено, электромагнитные поля и оптика). В результате возникла книга, которую можно использовать как учебник и как монографию, посвященную современному состоянию исследований в данной области, причем благодаря большому числу помещенных в ней задач ее предпочтительнее отнести к учебнику.

В гл. 1 рассмотрены общие свойства распространения электромагнитного излучения и вводятся основные понятия, касающиеся описания электромагнитного поля и его взаимодействия с веществом.

Глава 2 посвящена главным образом асимптотическим методам решения волнового уравнения, причем особое внимание уделено асимптотическому представлению поля в виде ряда Лунберга — Клейна (для которого геометрическая оптика является приближением низшего порядка). В частности, с помощью уравнения эйконала исследуются многие оптические системы с различными распределениями показателя преломления.

В гл. 3 изучаются слоистые среды (например, многослойные тонкие пленки, металлические и диэлектрические отражатели, интерференционные фильтры), которые играют весьма важную роль в инте-

гральной оптике, а также распространение волн в периодических структурах.

В гл. 4 задача о распространении волн рассматривается с позиций теории дифракции и состоит главным образом в вычислении поля в некоторой области с учетом вкладов от самого поля на опорной поверхности. Этот метод, который можно считать прямым следствием принципа Гюйгенса, связан с вычислением дифракционных интегралов. Данная задача и различные систематические способы ее решения рассматриваются в гл. 5.

В гл. 6 изучается по существу рассеяние электромагнитных волн на различных препятствиях. Она включает в себя также описание металлических и диэлектрических дифракционных решеток. Кроме того, в этой главе довольно подробно излагается теория дифракционных матриц и  $S$ -матриц рассеяния, обсуждение которой нечасто встретишь в других учебниках по оптике.

В последних двух главах рассматривается концентрация поля в некоторых ограниченных областях пространства, в которых имеют место определенные комбинации длин волн и неоднородностей среды; это приводит к эффекту, который можно назвать своего рода удержанием излучения. В частности, в гл. 7 мы рассмотрим пассивные и активные резонаторы, используемые в лазерных устройствах и предназначенные для удержания излучения вблизи оси оптических резонаторов и интерферометров Фабри — Перо. При этом мы будем проводить изучение главным образом на основе теории дифракции. В гл. 8 для исследования удержания излучения в поперечном направлении вблизи оси диэлектрического световода задача решается аналитически с использованием модовых решений волнового уравнения. Это позволяет рассмотреть единым образом самые современные вопросы, связанные с такими нелинейными оптическими явлениями, как фазовая самомодуляция и солитоны.

Настоящая книга предназначена в первую очередь аспирантам, специализирующимся по оптике и электромагнетизму, и исследователям, интересующимся вопросами распространения и удержания оптического излучения. От читателя требуется предварительное знакомство с основами теории электромагнитного поля на уровне хорошего аспирантского курса. Что касается математического аппарата, то необходимо предварительное знакомство со специальными функциями, рядами Фурье и дифференциальными уравнениями. Мы думаем, что широкий спектр рассматриваемых задач, а также строгость аналитического описания сделают нашу книгу полезным справочником для физиков и инженеров, работающих в области квантовой электроники.



Мы благодарим г-жу К. Кутилло за квалифицированную перепечатку рукописи, М. Сансоне за подготовку оригиналов рисунков и А. Торре за внимательное прочтение рукописи. Двое из авторов (Крозиньяни и Ди Порто) признательны фонду Уго Бордони (Высший институт почты и телекоммуникаций, Рим) за гостеприимство во время написания части этой книги. Бруно Крозиньяни глубоко признателен своей жене Марии и дочерям Джиневре и Вере за их поддержку при подготовке настоящей монографии. Сальваторе Солимено благодарит Национальный совет исследований и Национальный институт ядерной физики за поддержку, а также Р. Бруццезе за полезные советы.

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 1.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Электромагнитное поле в среде с непрерывно изменяющимися физическими параметрами характеризуется четырьмя векторными величинами —  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (-\partial/\partial t)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + (\partial/\partial t)\mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (1.1.4)$$

В данной книге мы будем использовать систему единиц МКСА, поэтому *электрическое поле*  $\mathbf{E}$  измеряется в вольтах на метр, *магнитная индукция*  $\mathbf{B}$  — в веберах на квадратный метр, *электрическая индукция*  $\mathbf{D}$  — в кулонах на квадратный метр, *магнитное поле*  $\mathbf{H}$  — в амперах на метр. В уравнения Максвелла входят также *объемная плотность заряда*  $\rho$ , измеряемая в кулонах на кубический метр, и *плотность тока*  $\mathbf{J}$  — в амперах на квадратный метр.

Наличие плотности тока  $\mathbf{J}$  в уравнении (1.1.2) может быть связано с присутствием в среде проводящих материалов (например, металлов или полупроводников) или внешних источников (таких, как магнитные и электрические диполи, движущийся электрон). В некоторых случаях вектор  $\mathbf{J}$  заранее не известен; например, электрический ток, циркулирующий на поверхности металлического объекта при рассеянии на нем электромагнитной волны, сложным образом зависит от падающего и рассеянного излучений. Поскольку решение этих задач не является предметом изучения в данной книге, посвященной рассмотрению вопросов оптики, плотность тока  $\mathbf{J}$  мы будем считать, как правило, известной величиной. При этом объемная плотность заряда возникнет только за счет ненулевой дивергенции вектора  $\mathbf{J}$  в соответствии с отношением

$$\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (1.1.5)$$

которое непосредственно следует из уравнений (1.1.2) и (1.1.4).

Поскольку в оптическом диапазоне частот *магнитная проницаемость* среды  $\mu$  мало отличается от магнитной проницаемости вакуума (магнитной постоянной)  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, можно записать следующее простое соотношение:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.6)$$

(случаи, когда это соотношение не выполняется, имеют место при рассмотрении систем отсчета, связанных с движущейся средой; с этими случаями читатель может ознакомиться в разд. 1.7).

Векторы же  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  связаны друг с другом, вообще говоря, более сложным соотношением (см. следующий раздел). Однако если ограничиться рассмотрением *монокроматического поля*, осциллирующего с угловой частотой  $\omega$ , т. е.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \Phi(\mathbf{r})]$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \Psi(\mathbf{r})]$ , то для амплитуд поля в *комплексном представлении* (см. разд. 1.8)  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r})\exp[i\Phi(\mathbf{r}) + i\omega t] \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$  и  $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{r})\exp[i\Psi(\mathbf{r}) + i\omega t] \equiv \mathbf{D}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$  можно записать следующее соотношение, аналогичное (1.1.6):

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0(1 + \chi_\omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1.7)$$

где  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — *электрическая постоянная*, а  $\chi_\omega$  — в общем случае комплексная *диэлектрическая восприимчивость* среды. Хотя соотношение (1.1.7) верно лишь для *однородной изотропной* среды, его можно обобщить и на случай *анизотропной* среды (см. разд. 1.4), считая величину  $\chi_\omega$  зависящей от направления распространения электромагнитного излучения (если предположить, что поле представляет собой плоскую волну).

Ограничившись рассмотрением изотропной среды и используя уравнения Максвелла и соотношения (1.1.7), можно получить уравнение лишь для поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Таким образом, полагая  $\mathbf{J} = \rho = 0$ , имеем

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2(1 + \chi_\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.1.8)$$

где  $k_0 = \omega/c$ , а  $c = 1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$  — *скорость света* в вакууме. Это же уравнение (1.1.8) можно переписать в другом виде:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.1.9)$$

где  $\tilde{n}(\omega) = (1 + \chi_\omega)^{1/2}$  — в общем случае комплексный *показатель преломления* среды. Уравнение (1.1.9) нетрудно получить, применяя оператор  $\nabla \times$  к обеим частям уравнений (1.1.1) и (1.1.2), записанных в комплексном представлении, и используя соотношение (А.13) (см. приложение А в конце книги) и уравнение (1.1.4).

Диэлектрическая восприимчивость изотропной *неоднородной* среды является функцией координаты; при этом уравнение (1.1.7) принимает вид

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0[1 + \chi_\omega(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.1.10)$$

В этом случае уравнение для  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  запишется в виде

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \tilde{n}^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.1.11)$$

где коэффициент преломления  $\tilde{n}(\mathbf{r}, \omega) + \sqrt{1 + \chi_\omega(\mathbf{r})}$  также является функцией координаты  $\mathbf{r}$ . Используя уравнение (1.1.4) и соотношение (A.7), можно записать

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \tilde{n}^2 \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla \tilde{n}^2 + \varepsilon_0 \tilde{n}^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

откуда следует, что  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \tilde{n} / \tilde{n}$ , а это, в случае когда  $\tilde{n}(\mathbf{r}, \omega)$  представляет собой медленноменяющуюся функцию расстояния  $\mathbf{r}$  и (или) поле  $\mathbf{E}$  перпендикулярно вектору  $\nabla \tilde{n}$ , позволяет в свою очередь пренебречь вторым членом в уравнении (1.1.11). В этом случае любая составляющая вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  [обозначим ее как  $u(\mathbf{r})$ ] в декартовой системе координат удовлетворяет *скалярному волновому уравнению*

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k_0^2 \tilde{n}^2(\mathbf{r}, \omega) u(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.1.12)$$

Большая часть математических методов, представленных в данной книге, посвящена решению уравнения (1.1.12). В связи с этим еще раз подчеркнем, что в тех областях пространства, где свойства среды резко изменяются (см., например, гл. 3 и 4), уравнения Максвелла и следующие из них волновые уравнения должны быть дополнены соотношениями, связывающими векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  по обе стороны поверхности разрыва. Для диэлектрической среды без внешних источников (зарядов и токов) эти условия состоят в том, что при пересечении поверхностей разрыва нормальные составляющие векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  и тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  изменяются непрерывно [1].

### 1.1.1. Векторный и скалярный потенциалы

В качестве неизвестных уравнения Максвелла содержат шесть скалярных функций [ $E_i, B_i; (i = x, y, z)$ ], но их число можно уменьшить до четырех, если выразить  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  через *векторный потенциал*  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и *скалярный потенциал*  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad (1.1.13)$$

Первое из этих соотношений следует непосредственно из (1.1.3) и векторного тождества (A.15), а второе — из (1.1.1) и (A.14).

Для стационарной, однородной и анизотропной среды с пространственно-временной дисперсией имеем (см. разд. 1.5)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \equiv \tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}; \quad (1.1.14)$$

здесь тензор  $\tilde{\epsilon}$  является линейным оператором, а  $d\mathbf{r}' \equiv dx' dy' dz'$ . Учитывая при этом независимость  $\tilde{\epsilon}$  от времени  $[(\partial/\partial t)\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\partial/\partial t)]$  и используя соотношение (1.1.6) и векторное тождество (A.13), можно показать, что потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  удовлетворяют системе уравнений

$$\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{A}) = -\rho, \quad (1.1.15a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\epsilon} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\epsilon} \right) \cdot \nabla \Phi, \quad (1.1.15b)$$

которая эквивалентна уравнениям Максвелла.

Следует заметить, что  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  определены с точностью до произвольной функции  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , так как при одновременной замене  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$  и  $\Phi' = \Phi - \partial \Psi / \partial t$  векторные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , связанные с потенциалами соотношениями (1.1.13), не изменяются. Это свойство можно использовать для выбора такого потенциала  $\mathbf{A}'$ , чтобы он удовлетворял условию кулоновской калибровки:

$$\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{A}') = 0, \quad (1.1.16)$$

которое эквивалентно выбору функции  $\Psi$  такой, что

$$\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla \Psi) = -\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{A}) \equiv -g(\mathbf{r}, t). \quad (1.1.17)$$

Здесь  $g(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция. Уравнение (1.1.17) нетрудно решить, используя его пространственно-временное преобразование Фурье, которое дает

$$(\mathbf{q} \cdot \tilde{\epsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q}) \Psi_{\mathbf{q}, \omega} = g_{\mathbf{q}, \omega}, \quad (1.1.18)$$

где мы определили

$$g_{\mathbf{q}, \omega} \equiv \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} g(\mathbf{r}, t). \quad (1.1.19)$$

Из уравнения (1.1.18) находим  $\Psi_{\mathbf{q}, \omega}$ , а затем, используя обратное преобразование Фурье, и искомое решение  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ .

При кулоновской калибровке (1.1.16) система уравнений (1.1.15) упрощается и может быть записана в виде

$$\nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \cdot \nabla \Phi) = -\rho, \quad (1.1.20a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\epsilon} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\epsilon} \right) \cdot \nabla \Phi \equiv -\mu_0 \mathbf{J}^{(0)}. \quad (1.1.20b)$$

Первое из этих уравнений описывает изменение скалярного потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  за счет плотности заряда  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . Точнее говоря, проводя преобразование Фурье по времени, сразу получаем, что  $\Phi_{\omega}(\mathbf{r})$  линейно за-

висит от  $\rho_\omega(\mathbf{r})$  (см. задачи 2 и 3):

$$\varepsilon_0 \Phi_\omega(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}' G_C(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \rho_\omega(\mathbf{r}'), \quad (1.1.21)$$

где функция Грина  $G_C$  дается выражением

$$G_C(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{q} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q}}. \quad (1.1.22)$$

Аналогично, используя преобразование Фурье уравнения (1.1.20б), получаем

$$\begin{aligned} (\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} + \mathbf{q}\mathbf{q} - q^2 \mathbf{1}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{q}, \omega} &= -\mu_0 \left( 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q}\mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q}} \right) \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega} \equiv \\ &\equiv -\mu_0 \mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega}^{(t)}, \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

где использовано также условие *сохранения заряда* [выражение (1.1.5)], которое в фурье-представлении эквивалентно соотношению

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega} = \omega \rho_{\mathbf{q}, \omega}. \quad (1.1.24)$$

Заметим, что, поскольку  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega}^{(t)} \cdot \mathbf{q} = 0$ ,  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega}^{(t)}$  представляет собой поперечную компоненту вектора  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega}$ .

В случае *изотропной* и *однородной* среды для потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  можно потребовать выполнения так называемой *лоренцевой калибровки*, а именно условия

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (1.1.25)$$

При этом  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  удовлетворяют *неоднородным уравнениям Гельмгольца*

$$\nabla^2 \Phi - \mu_0 \tilde{\varepsilon} (\partial^2 / \partial t^2) \Phi = -\rho / \tilde{\varepsilon}, \quad (1.1.26a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \tilde{\varepsilon} (\partial^2 / \partial t^2) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.1.26б)$$

в правые части которых входят соответственно  $\rho$  и  $\mathbf{J}$ .

Наконец, для однородной анизотропной среды фурье-компоненту  $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$  можно представить в виде свертки

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = -i\omega \mu_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}' \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r}'), \quad (1.1.27)$$

где  $\Gamma(\mathbf{r})$  — *функция Грина в диадном представлении* (см. задачи 4, 5 и 7).

## 1.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В предыдущем разделе основная временная зависимость амплитуды поля в комплексном представлении учитывалась множителем  $\exp(i\omega t)$ . Для статической и слабодиспергирующей (в пределах ширины линии излучения) среды это предположение не ограничивало общности рассмотрения, поскольку общее решение могло быть представлено в виде суперпозиции монохроматических решений. Принцип суперпозиции применим даже для дисперсной, но линейной среды, однако он нарушается, как только становятся существенными нелинейные эффекты. Следует заметить, что благодаря обычно выполняющемуся соотношению  $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$ , связывающему спектральную ширину  $\delta\omega$  поля и его среднюю частоту  $\omega_0$ , во многих случаях выражение для поля удается факторизовать, т. е. представить его в виде произведения  $\exp(i\omega_0 t)$  на медленно меняющуюся во времени амплитуду. Иногда подобный прием оказывается допустим и в координатном пространстве, если поле можно приближенно представить плоской волной (см., например, разд. 2.1).

Взаимодействие излучения с материальной средой обычно описывают *вектором индуцированной поляризации*  $\mathbf{P}$ , определяемым как дипольный момент единицы объема вещества, возникающий под действием электрического поля  $\mathbf{E}$  [1]. Учет поляризации приводит к соотношению

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.2.1)$$

где  $\mathbf{P}$  — в общем случае сложная функция электрического поля  $\mathbf{E}$ . Почти во всех случаях, которые мы будем рассматривать, соотношение между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  можно записать в простом виде (для удобства обозначений мы не выписываем в явном виде зависимости всех рассматриваемых величин от пространственных координат):

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t') \mathbf{E}(t - t') dt', \quad (1.2.2)$$

где функция  $\chi(t')$ , которая зависит лишь от параметров среды, в силу *принципа причинности* должна обращаться в нуль при  $t' < 0$ . Подставляя (1.2.2) в (1.2.1) и применяя преобразование Фурье по времени к обеим частям получаемого выражения, находим *материальное соотношение*

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon_0(1 + \chi_\omega) \mathbf{E}_\omega \equiv \tilde{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}_\omega. \quad (1.2.3)$$

Фурье-образ произвольной функции  $f(t)$  обозначим через  $f_\omega$  и опреде-

лим его следующим выражением:

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Выражение (1.2.3) позволяет выразить *диэлектрическую проницаемость*  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  через *диэлектрическую восприимчивость*  $\chi_{\omega} \equiv \chi'_{\omega} - i\chi''_{\omega}$  и *показатель преломления*  $\tilde{n}(\omega)$ :

$$\tilde{\epsilon}(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \chi_{\omega} = \tilde{n}^2(\omega). \quad (1.2.5)$$

Зависимость  $\tilde{\epsilon}$  от  $\omega$  обычно называют *законом дисперсии*.

Простое линейное соотношение (1.2.2) применимо в случае малых интенсивностей поля и веществ с низкой плотностью и является первым приближением общего выражения, связывающего  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  [2]. В тех случаях, когда в среде присутствуют временные флуктуации, медленные по сравнению с характерным временем изменения функции  $\chi(t)$ , выражение (1.2.3) можно обобщить, включая в него параметрическую зависимость  $\chi_{\omega}$  от времени [3], т. е. вместо  $\chi_{\omega}$  нужно использовать медленно меняющуюся во времени восприимчивость  $\chi_{\omega}(t)$ . (В частности, это приводит к уширению спектра первоначально монохроматического излучения, распространяющегося во флуктуирующей среде.) Подобное рассмотрение применимо для описания оптического эффекта Керра (разд. 8.19).

Зависимость диэлектрической восприимчивости и, следовательно, показателя преломления  $\tilde{n}$  от частоты  $\omega$  называют *дисперсией среды* (рис. 1.1). Она ответственна за искажение сигнала в *прозрачных средах* [в которых  $\tilde{n}(\omega)$  можно рассматривать как вещественную величину; см. разд. 1.3]. Мы детально рассмотрим этот эффект в гл. 8 в связи с изучением распространения света в оптических волокнах. Дисперсия приводит к различию *групповых скоростей*

$$v(\omega) = \left\{ \frac{d}{d\omega} \left[ \frac{\omega}{c} n(\omega) \right] \right\}^{-1}, \quad (1.2.6)$$

где  $n(\omega)$  — вещественный показатель преломления прозрачной среды, в которой распространяются различные частотные компоненты элек-

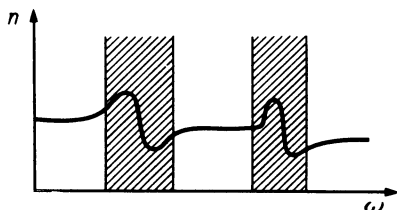


Рис. 1.1. Качественная зависимость показателя преломления от частоты. Заштрихованные области соответствуют резонансам.



ромагнитного поля. Следует заметить, что, хотя в оптике удобно выделить частотные области *нормальной* и *аномальной* дисперсии, в которых показатель преломления увеличивается или уменьшается соответственно с частотой ( $dn/d\omega > 0$  или  $dn/d\omega < 0$ ), в современной литературе по оптическим волокнам эти области нередко определяют как такие, в которых  $(d/d\omega)[1/v(\omega)] > 0$  или  $(d/d\omega)[1/v(\omega)] < 0$ , т. е. области, в которых  $v(\omega)$  является соответственно убывающей или возрастающей функцией частоты  $\omega$  (см. разд. 8.19).

Как показано на рис. 1.1, область аномальной дисперсии заключена между максимумом и минимумом функции  $\chi'(\omega)$ . В небольшом частотном интервале, центр которого  $\omega_0$  совпадает с *резонансной частотой* элементарных систем, составляющих среду, среда оказывается сильно поглощающей, т. е. возникает очень большая мнимая восприимчивость  $\chi''(\omega)$ . Исследование этой частотной области требует микроскопического описания. Пример такого подхода приведен в разд. 1.2.2 в связи с рассмотрением распространения волн в среде резонансных двухуровневых систем.

В случае когда электрическое поле становится настолько сильным, что нельзя пренебрегать вкладом нелинейности, простое соотношение (1.2.2) необходимо модифицировать. При этом в большинстве случаев понятие показателя преломления становится бессмысленным. Как следствие, функциональная зависимость  $\mathbf{P}$  от  $\mathbf{E}$  должна определяться отдельно для каждого конкретного нелинейного процесса, и подставлять ее в уравнения Максвелла необходимо с помощью соотношения (1.2.1). Примеры этого мы рассмотрим в следующем разделе, однако сразу заметим, что, несмотря на явно нелинейную природу *оптического эффекта Керра* (см. разд. 8.19), понятие коэффициента преломления сохраняет свою применимость и в этом случае.

### 1.2.1. Нелинейное распространение волн

Рассмотрим уравнения Максвелла (1.1.1) и (1.1.2), дополненные соотношением (1.2.1) и *законом Ома* в дифференциальной форме:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.2.7)$$

Здесь  $\sigma$  — *электропроводность* среды. Для проводников уравнение (1.2.7) остается справедливым в пределе малых частот  $\omega \rightarrow 0$ . Строго говоря, соотношение (1.2.7) справедливо для почти монохроматического поля, центральная частота которого равна  $\omega_0$ . При этом величина  $\sigma \equiv \sigma(\omega_0)$  не имеет очевидного физического смысла и введена лишь для учета потерь, связанных с мнимой частью диэлектрической восприимчивости. С помощью метода, аналогичного использованному

при выводе уравнения (1.1.8), нетрудно получить следующее уравнение:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (1.2.8)$$

где при записи члена  $\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$  [см. (1.1.11)] мы воспользовались приближенным соотношением  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (которое строго справедливо лишь в тех случаях, когда среду можно считать идеально однородной).

Если записать теперь вектор индуцированной поляризации  $\mathbf{P}$  как сумму линейной части  $\mathbf{P}^{(L)}$ , удовлетворяющей соотношению (1.2.2) и нелинейной части  $\mathbf{P}^{(NL)}$ , т. е. в виде  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}$ , то уравнение (1.2.8) принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(L)}}{\partial t^2} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2}. \quad (1.2.9)$$

Теперь, прежде чем приступить к исследованию и решению уравнения (1.2.9), необходимо получить выражение, определяющее  $\mathbf{P}^{(NL)}$  для рассматриваемого нелинейного процесса. Эту задачу можно решать, пользуясь совершенно разными методами описания — начиная от точного квантовомеханического микроскопического метода и кончая чисто феноменологическим подходом. В следующем разделе мы приведем пример первого метода описания; здесь же рассмотрим кратко феноменологический подход.

Запишем  $i$ -ю компоненту вектора поляризации  $\mathbf{P}(t)$  как сумму поляризуемостей первого, второго, третьего и т. д. порядков [4] (мы воспользуемся здесь для простоты соглашением о суммировании по повторяющимся индексам):

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x_{ij}(t-t') E_j(t') dt' + \varepsilon_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} x_{ijk}(t-t', t-t'') E_j(t') E_k(t'') dt' dt'' + \\ + \varepsilon_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} x_{ijkl}(t-t', t-t'', t-t''') E_j(t') E_k(t'') E_l(t''') dt' dt'' dt''' + \dots, \\ i, j, k, l = x, y, z. \quad (1.2.10)$$

Здесь тензорный характер  $\chi_{ij}$  позволяет обобщить соотношение (1.2.2) на случай анизотропных сред.

В некоторых конкретных случаях общее выражение (1.2.10) можно существенно упростить, учитывая либо симметричные свойства среды, либо характер временного отклика. Например, второе слагаемое в сумме (1.2.10) равно нулю в средах, симметричных относительно ин-

версии. Другой пример — при определенной частоте и ширине спектра излучения отклик среды можно считать мгновенным, т. е. величины  $\chi$  зависят от времени в виде  $\delta$ -функции (см., например, разд. 8.19).

Рассмотрение большинства задач нелинейной оптики основано на предположении о том, что поле является суперпозицией нескольких монохроматических волн. Этот подход является самосогласованным, так как сам вид разложения (1.2.10) подразумевает возможность генерации волн в виде дискретной суперпозиции монохроматических полей. В соответствии с этим электрическое поле нередко записывают в виде

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{E}_{\omega_i} e^{i\omega_i t} + \mathbf{E}_{\omega_i}^* e^{-i\omega_i t}). \quad (1.2.11)$$

*Пример: генерация второй гармоники.* Рассмотрим в качестве примера процесс, связанный с поляризуемостью второго порядка, — *генерацию второй гармоники* (ГВГ). Чтобы описать этот процесс, предполагают, что поле состоит из двух частотных слагаемых, одно из которых осциллирует с круговой частотой  $\omega_1$ , а другое — с  $\omega_2 = 2\omega_1$  [см. выражение (1.2.11)].

После подстановки выражения (1.2.11) во второе слагаемое в правой части суммы (1.2.10) необходимо прежде всего выделить члены, осциллирующие с частотами  $\omega_1$  и  $2\omega_1$ , т. е.

$$P_i^{(NL)}(t) = p_{\omega_i} e^{i\omega_i t} + q_{2\omega_i} e^{i2\omega_i t} + \text{к. с.} \quad (1.2.12)$$

(здесь к.с. означает «комплексно-сопряженные члены») и

$$p_{\omega_i} = \varepsilon_0 \chi_{-\omega_1, 2\omega_1 ij k} E_{\omega_1 j}^* E_{2\omega_1 k} + \varepsilon_0 \chi_{2\omega_1, -\omega_1 ij k} E_{2\omega_1 j} E_{\omega_1 k}^*, \quad (1.2.13)$$

$$q_{2\omega_i} = \varepsilon_0 \chi_{\omega_1, \omega_1 ij k} E_{\omega_1 j} E_{\omega_1 k}, \quad (1.2.14)$$

причем символ  $\chi_{\omega, \omega' ij k}$  означает двойное временное преобразование Фурье величины  $\chi_{ij k}(t', t'')$ . Подставляя выражение (1.2.12) в уравнение (1.2.9), получаем

$$\nabla^2 E_{\omega_i} - i\mu_0 \sigma \omega_1 E_{\omega_i} + \frac{\omega_1^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{\omega_1 ij}}{\varepsilon_0} E_{\omega_1 j} = -\mu_0 \omega_1^2 p_{\omega_i}, \quad (1.2.15a)$$

$$\nabla^2 E_{2\omega_i} - 2i\mu_0 \sigma \omega_1 E_{2\omega_i} + \frac{(2\omega_1)^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{2\omega_1 ij}}{\varepsilon_0} E_{2\omega_1 j} = -4\mu_0 \omega_1^2 q_{2\omega_i}. \quad (1.2.15b)$$

Входящий в эти уравнения *тензор диэлектрической проницаемости* определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\omega ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{\omega ij}). \quad (1.2.16)$$

Система уравнений (1.2.15) обеспечивает аналитическое описание ГВГ, и ее решение (которое читатель может найти в более специали-

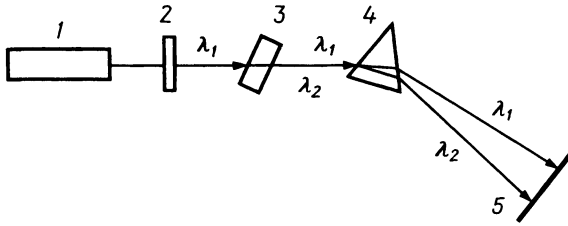


Рис. 1.2. Экспериментальная установка для демонстрации генерации второй гармоники света. 1 — рубиновый лазер; 2 — пропускающий фильтр; 3 — нелинейный кристалл; 4 — призма; 5 — фотопленка.

зированных книгах, например [5]) позволяет сделать общие выводы относительно эффективности и характеристик процесса. В частности, эффективность ГВГ существенно зависит от разности фазовых скоростей волны накачки ( $\omega_1$ ) и второй гармоники ( $2\omega_1$ ) (рис. 1.2). Их совпадения (условия *фазового синхронизма*) можно достичь в одноосном кристалле, используя различие скоростей обыкновенной и необыкновенной волн (см. разд. 1.4).

### 1.2.2. Распространение импульса в двухуровневой резонансной среде

В этом разделе мы приведем пример того, как микроскопический подход позволяет вычислить точное значение вектора поляризации **P**. Рассматриваемый случай взаимодействия электромагнитного поля с двухуровневой системой является довольно общей моделью, описывающей физические ситуации, в которых происходит *когерентное взаимодействие* излучения с веществом.

Задача состоит в нахождении функциональной зависимости поляризации **P** от **E** — амплитуды квазимонохроматической плоской волны, средняя частота которой совпадает с частотой перехода системы  $\omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar$  в отсутствие поля (рис. 1.3). Это требует решения уравнения Шрёдингера при наличии внешнего возмущения. Будем следовать полуклассическому подходу, когда электрическое поле считается классической величиной (это соответствует пренебрежению вкла-

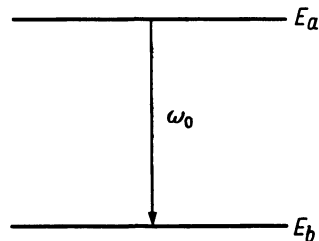


Рис. 1.3. Двухуровневая система.

дом в электромагнитное поле от фотонов спонтанного излучения), а атомная система рассматривается в рамках квантовой механики, т. е. ее состояние  $|\Psi\rangle$  представляется в виде суперпозиции собственных энергетических состояний  $|u_a\rangle$  и  $|u_b\rangle$ , соответствующих собственным значениям  $E_a$  и  $E_b$ ; таким образом,

$$|\Psi\rangle = a(t)|u_a\rangle + b(t)|u_b\rangle. \quad (1.2.17)$$

Вектор состояния  $|\Psi\rangle$  должен удовлетворять временному уравнению Шрёдингера

$$H|\Psi\rangle = (H_0 + V)|\Psi\rangle = i\hbar \partial|\Psi\rangle/\partial t, \quad (1.2.18)$$

где  $H_0$  — гамильтониан невозмущенной системы, а  $V$  — внешнее возмущение, которое описывает взаимодействие поля излучения и атомов. В *дипольном приближении*, т. е. в случае когда длина волны значительно больше размеров атомной системы, это взаимодействие дается выражением  $V = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ . Решив уравнение (1.2.8), т. е. определив зависящие от времени амплитуды  $a(t)$  и  $b(t)$ , выраженные через  $\mathbf{E}$ , дипольный момент  $\mathbf{p}$  элементарной системы можно записать в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0(ab^* + a^*b), \quad (1.2.19)$$

где

$$\mathbf{p}_0 = -e\langle u_a|\mathbf{r}|u_b\rangle \quad (1.2.20)$$

— электрический дипольный матричный элемент. Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  получается суммированием вкладов от всех систем, находящихся в единичном объеме.

Предположим теперь, что в начальный момент времени  $t = 0$  каждый из атомов находится в состоянии либо  $a$ , либо  $b$ , и обозначим через  $v_z$  скорость атома в направлении  $z$ , в котором распространяется электромагнитное поле. При этом частота его перехода в лабораторной системе координат будет равна  $\omega = \omega_0 + k_0 v_z$ . Если теперь обозначить через  $g(\omega)$  функцию распределения частот  $\omega$ , обусловленную движением атомов в газе или наличием локальных кристаллических неоднородностей в твердом теле, то можно написать следующее выражение:

$$P(z, t) = \frac{p_0}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) \sum_{\alpha=a,b} N_{\alpha 0} [a(z, t, \omega, \alpha)b^*(z, t, \omega, \alpha) + \text{к. с.}], \quad (1.2.21)$$

где  $N_{a0}$  и  $N_{b0}$  — число атомов в единице объема соответственно на верхнем и нижнем уровнях при  $t = 0$ , а амплитуды  $a(z, t, \omega, \alpha)$  и  $b(z, t, \omega, \alpha)$  относятся к атому со средней частотой перехода  $\omega$ , имеющему координату  $z$  в момент времени  $t$  и находившемуся при  $t = 0$  в состоянии  $|u_\alpha\rangle$ . Множитель  $1/\sqrt{3}$  возникает вследствие усреднения по возможным ориентациям атомных систем, которые предполагаются изотропно поляризуемыми.

Случайные столкновения между атомами приводят к статистической неопределенности фаз у  $a(t)$  и  $b(t)$ . Это означает, что для определения поляризации  $\mathbf{P}$  в макроскопических уравнениях Максвелла [в частности, в (1.2.8)] необходимо провести усреднение по времени в выражении (1.2.21). Таким образом, необходимо найти  $\langle ab^* \rangle$  и  $\langle a^* b \rangle$  (здесь скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по ансамблю), т. е. недиагональные элементы *матрицы плотности* [6]:

$$\rho = \begin{bmatrix} \langle |a|^2 \rangle & \langle ab^* \rangle \\ \langle a^* b \rangle & \langle |b|^2 \rangle \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{bmatrix}, \quad (1.2.22)$$

Временная эволюция матрицы плотности может быть описана, исходя из уравнения Шрёдингера, с учетом феноменологических членов распада. Таким образом получают *уравнения Блоха*

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ab} &= -i\omega\rho_{ab} - \gamma_{ab}\rho_{ab} + \frac{i}{\hbar}V(z, t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}), \\ \dot{\rho}_{aa} &= -\gamma_a(\rho_{aa} - \rho^{eq}_{aa}) + \frac{i}{\hbar}V(z, t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \\ \dot{\rho}_{bb} &= -\gamma_b(\rho_{bb} - \rho^{eq}_{bb}) - \frac{i}{\hbar}V(z, t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}). \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, а  $\gamma_{ab} = (\frac{1}{2})(\gamma_a + \gamma_b) + 1/T_c$ . В уравнения (1.2.23) были феноменологически введены времена жизни состояний  $a$  и  $b$  ( $1/\gamma_a$  и  $1/\gamma_b$ ), а также характерное время атомных столкновений  $T_c$ . Уравнения (1.2.23) можно переписать таким образом, что они будут описывать прецессию магнитного диполя в магнитном поле, что и было первоначально сделано Фейнманом, Верноном и Хеллуортом (см. также работы [5, 6]).

Поскольку мы ищем решение уравнений Максвелла, соответствующее линейно-поляризованной (см. разд. 1.3) узкополосной плоской волне с центральной частотой вблизи  $\omega_0$ , справедливы следующие выражения для  $E(z, t)$  и  $P(z, t)$ :

$$E(z, t) = |\mathcal{E}(z, t)| \cos[\omega_0 t - kz + \Phi(z, t)], \quad (1.2.24)$$

$$\begin{aligned} P(z, t) &= S(z, t) \sin[\omega_0 t - kz + \Phi(z, t)] + C(z, t) \cos[\omega_0 t - kz + \Phi(z, t)] = \\ &= \left( \frac{P_0}{\sqrt{3}} \right) \sum_{a=a,b} N_{a0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) [\rho_{ab}(z, t, \omega, \alpha) + \text{к. с.}] d\omega \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Здесь  $\mathcal{E} = |\mathcal{E}|e^{i\Phi}$  — огибающая поля, а вещественные функции  $S$  и  $C$  предполагаются медленно меняющимися по сравнению с временным  $1/\omega_0$  и пространственным  $1/k_0$  интервалами. Необходимо также заметить, что в электрическом дипольном приближении, как это следует

из (1.2.24), возмущение  $V$  равно  $-(1/2)p_0 \mathcal{E} e^{i(\omega - \Omega)t}/\sqrt{3}$ . Подставляя соотношения (1.2.24) и (1.2.25) в уравнение (1.2.8) и используя перечисленные выше условия и обозначения, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) |\mathcal{E}| = \frac{\omega_0 \mu_0 c}{2n_1} S, \quad (1.2.26)$$

$$|\mathcal{E}| \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n_1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Phi = -\frac{\omega_0 \mu_0 c}{2n_1} C, \quad (1.2.27)$$

где  $\alpha = \mu_0(\sigma/2n_1)$  — потери на единицу длины, а  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}$  — показатель преломления инертной среды, окружающей активные атомы.

Теперь необходимо добавить уравнения, описывающие эволюцию переменных  $S(z, t)$  и  $C(z, t)$ ; их можно вывести из уравнений (1.2.23). После несколько утомительных расчетов (для более подробного ознакомления с ними мы отсылаем читателя к статье [7]) можно показать, что для симметричной относительно  $\omega_0$  функции  $g(\omega)$  справедливо равенство  $C = \Phi = 0$ . Если предположить, что вклад в электрическое поле от спонтанного излучения пренебрежимо мал, то распределение поля полностью описывается двумя величинами, а именно функцией  $\mathcal{E}(z, t)$  и *интегральной комплексной восприимчивостью*

$$\chi(z, T, t) = \frac{1}{2\pi g(\omega_0)} \sum_{\alpha=a,b} \frac{N_{\alpha 0}}{N_{\alpha 0} - N_{\beta 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)T] \times \\ \times [\rho_{\alpha\alpha}(z, t, \omega, \alpha) - \rho_{\beta\beta}(z, t, \omega, \alpha)] d\omega, \quad (1.2.28)$$

где элементы матрицы плотности  $\rho_{\alpha\alpha}$  и  $\rho_{\beta\beta}$  относятся к атому, имеющему частоту перехода  $\omega_0$ , находящемуся в момент времени  $t$  в точке с координатой  $z$  и имевшему при  $t = 0$  состояние  $u_\alpha$ . Для медленно меняющихся амплитуд  $S(z, t)$  и  $\mathcal{E}(z, t)$  величина  $\exp(-\gamma_{ab}t') \times \chi(z, t', t - t')$  играет ту же роль, что и  $\chi(t)$  в соотношении (1.2.2). Это подтверждается следующим соотношением:

$$S(z, t) = -\frac{2c\epsilon_1}{\omega_0} d \int_0^{+\infty} e^{-t'\gamma_{ab}} \chi(z, t', t - t') \mathcal{E}(z, t - t') dt', \quad (1.2.29)$$

где  $d = (1/3)p_0^2 \omega_0 (N_{\alpha 0} - N_{\beta 0}) \pi g(\omega_0) / (cn_1 \epsilon_0 \hbar)$ . Точнее говоря, распространение сигнала в двухуровневой среде описывается системой двух интегродифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{n_1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \alpha \mathcal{E} = d \int_{-\infty}^t e^{-t-t'} \gamma_{ab} \chi(z, t - t', t') \mathcal{E}(z, t') dt', \quad (1.2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi(z, T, t) = & \frac{\gamma_a^2}{\gamma_{ab}} \chi(z, T, +\infty) - \gamma_{ab} \chi(z, T, t) - \\ & - \frac{p_0^2}{6\hbar^2} \mathcal{E}(z, t) \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')\gamma_{ab}} [\chi(z, T+t-t', t') + \\ & + \chi(z, T-t+t', t')] \mathcal{E}(z, t') dt' \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

с граничным условием  $\mathcal{E}(z=0, t) = \mathcal{E}_i$  для электрического поля и начальным условием

$$\chi(z, T, t = -\infty) = \frac{1}{2\pi g(\omega_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)T] d\omega. \quad (1.2.32)$$

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи, когда эта система уравнений принимает значительно более простой вид и становится аналитически разрешимой.

### 1.2.2.а. Режим скоростных уравнений для длинных импульсов

Пусть  $T_c$  пренебрежимо мало по сравнению со всеми остальными характерными временами системы, т. е. по сравнению с  $1/\gamma_a$ ,  $1/\gamma_b$ ,  $\bar{T}_2$  — обратной шириной полосы функции  $g(\omega)$  и  $T_p$  — длительностью импульса. При этом уравнения (1.2.30) и (1.2.31) принимают соответственно вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{n_1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \alpha \mathcal{E} = -dT_2 \chi(z, 0, t) \mathcal{E}(z, t), \quad (1.2.33)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(z, 0, t) = -\frac{p_0^2}{3\hbar^2} T_2 \chi(z, 0, t) \mathcal{E}^2(z, t), \quad (1.2.34)$$

в то время как выражение (1.2.28) можно записать следующим образом:

$$\chi(z, 0, t) = \frac{1}{2\pi g(\omega_0)} \frac{N_a(z, t) - N_b(z, t)}{N_{a0} - N_{b0}}. \quad (1.2.35)$$

Здесь  $N_a(z, t)$  и  $N_b(z, t)$  — плотности атомов на верхнем и нижнем уровнях [в частности,  $N_a(z, -\infty) = N_{a0}$ ,  $N_b(z, -\infty) = N_{b0}$ ]. Таким образом, система уравнений (1.2.33) и (1.2.34) связывает между собой мгновенные значения интенсивности поля [которая пропорциональна  $\mathcal{E}^2(z, t)$ ; см. разд. 1.8] и плотности инверсии населенностей  $\Delta N = N_a - N_b$ . Эти уравнения обычно используют для описания лазерной генерации в стационарном режиме [8] (см. разд. 7.19). Вообще говоря, эти скоростные уравнения хороши в тех случаях, когда амплитуда поля заметно изменяется на временах, больших по сравнению с



$T_2$ . В следующем подразделе мы опишем противоположную ситуацию, которую называют *когерентным распространением*.

В пределе  $\alpha = 0$ , что соответствует отсутствию потерь, система уравнений (1.2.33) и (1.2.34) имеет аналитическое решение [9], особенно полезное при исследовании распространения импульса в каскаде лазерных усилителей.

### 1.2.2.6. Самоиндуцированная прозрачность

Можно показать, что для узкой линии при резонансе ( $\omega_0 = \Omega$ ) и в отсутствие диссипации

$$\frac{p_0}{3^{1/2}\hbar} \left( \frac{d}{dz} + \alpha \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z, t) dt = \frac{d}{2} \sin \left\{ \frac{p_0}{3^{1/2}\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z, t) dt \right\}. \quad (1.2.36)$$

Тогда если величину в фигурных скобках, пропорциональную огибающей поля, обозначить через  $\Theta(z)$ , то мы можем написать следующее уравнение:

$$d\Theta/dz + \alpha\Theta = \frac{1}{2}d \sin \Theta. \quad (1.2.37)$$

В пределе  $\alpha = 0$  это уравнение имеет общее решение

$$\Theta(z) = 2 \arctg \left[ e^{zd/2} \operatorname{tg} (\Theta_0/2) \right], \quad (1.2.38)$$

которое приводит к так называемой *теореме площадей* [10]; согласно этой теореме, величины  $\Theta(z) = (2m + 1)\pi$  и  $\Theta(z) = 2m\pi$  (где  $m$  — целое) являются устойчивыми решениями в усиливающей ( $d > 0$ ,  $N_{a0} > N_{b0}$ ) и поглощающей ( $d < 0$ ) среде соответственно (рис. 1.4). В

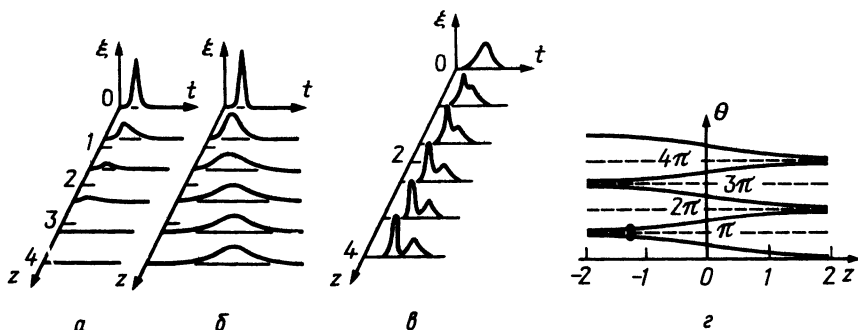


Рис. 1.4. Компьютерные графики. Эволюция импульсов с различными начальными площадями  $\Theta_0$ , полученная из расчетов на ЭВМ. (Из работы [10].) а —  $\Theta_0 = 0,9\pi$ ; б —  $\Theta_0 = 1,1\pi$ ; в —  $\Theta_0 = 4\pi$  для положительного параметра ослабления  $\alpha$ . Расстояние  $\omega$  измеряется в единицах длины поглощения  $\pi/\alpha$ . Заметим, что для  $\Theta_0 = 4\pi$  импульс разбивается на два  $2\pi$ -импульса; г — эволюция площади импульса, описываемая уравнением (1.2.37).

частности, для данного начального значения  $\Theta_0$  величина  $\Theta(z)$  стремится к ближайшему четному (для усилителя) или нечетному (для поглотителя) кратному числу  $\pi$ .

Из уравнения (1.2.30) следует, что при  $\alpha = 0$  импульс в форме *гиперболического секанса* [10]

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{3^{1/2} \hbar}{p_0 T_p} \operatorname{sch} \left\{ \frac{t - z/v}{T_p} \right\} \quad (1.2.39)$$

при  $T_p \ll \bar{T}_2$  распространяется без изменения формы с групповой скоростью:

$$\frac{1}{v} = \frac{n_1}{c} + \frac{T_p^2 d}{2\pi g(\omega_0)}. \quad (1.2.40)$$

Это явление, когда короткий импульс, интенсивность которого имеет оптимальную величину, может распространяться в среде двухуровневых систем с аномально низкими потерями энергии, называют *самоиндуцированной прозрачностью* [10].

### 1.2.2.в. Общий случай

Для получения решения в общем случае, описываемом интегродифференциальными уравнениями (1.2.30) и (1.2.31), приходится, как правило, использовать численные методы. С этой целью уравнения удобно представить в дифференциальной форме. Точнее говоря, с помощью определяющих выражений (1.2.28) и (1.2.29) можно показать, что при  $\bar{T}_2 > \gamma_{ab}^{-1}$  (см. разд. 1.2.2.а) эти уравнения эквивалентны системе уравнений, одним из которых является (1.2.26), а два других имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t} S = -\frac{S}{T_2} - \frac{p_0^2}{3\hbar} \mathcal{E}(N_a - N_b), \quad (1.2.41a)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} (N_a - N_b) = -\mathcal{E} S. \quad (1.2.41б)$$

Эту систему необходимо дополнить условиями  $N_a(z, t=0) - N_b(z, t=0) = N_{a0} - N_{b0}$ ,  $\mathcal{E}(z=0, t) \equiv \mathcal{E}_i(t)$ ,  $S(z, t=0) = 0$ .

Такая система уравнений описывает распространение очень коротких импульсов ( $T_p \lesssim 1$  нс) в лазерах высокой мощности, используемых в экспериментах по инерциональному удержанию плазмы.

### 1.2.3. Соотношение Крамера — Кронига и монохроматические волны

Аналитические свойства функции  $\chi_\omega$  определяются принципом причинности, согласно которому вектор поляризации среды  $\mathbf{P}$  в некоторый

момент времени определяется значениями электрического поля только в предшествующие моменты времени. Действительно, равенство нулю  $\chi(t)$  при отрицательных значениях аргумента позволяет написать выражение

$$\chi_{\omega} = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \chi(t) dt. \quad (1.2.42)$$

Отсюда сразу следует, что если рассматривать  $\omega$  как комплексную переменную ( $\omega = \omega' + i\omega''$ ), то в случае пассивной среды величина  $\chi_{\omega}$  является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексного  $\omega$  ( $\omega'' < 0$ ), а в случае активной среды (т. е. в лазерах) она аналитическая в верхней полуплоскости. На этом основывается вывод (см., например, [8]) так называемых *соотношений Крамерса — Кронига* между вещественной и мнимой частями  $\chi_{\omega} = \chi'_{\omega} - i\chi''_{\omega}$

$$\chi'_{\omega} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''_{\omega'}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (1.2.43a)$$

$$\chi''_{\omega} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'_{\omega'}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (1.2.43b)$$

где  $P$  обозначает главное значение интеграла в смысле Коши.

Если диспергирующая среда находится в тепловом равновесии, то можно показать (см. § 82 в книге [1]), что величина  $\chi''_{\omega}$  всегда положительна при  $\omega > 0$ , отрицательна при  $\omega < 0$  и равна нулю при  $\omega = 0$ . Последнее утверждение следует непосредственно из равенства

$$\chi_{\omega} = \chi_{-\omega}^*, \quad (1.2.44)$$

которое сразу следует из (1.2.42). Это, разумеется, не противоречит тому, что  $\chi''_{\omega}$  может принимать очень небольшие значения в некотором интервале частот; при этом о диэлектриках говорят, что они прозрачны в области частот, в которой  $|\chi'_{\omega}| \ll |\chi''_{\omega}|$ .

Используя тот факт, что  $\chi''_{\omega}$  является нечетной функцией частоты  $\omega$  [следствие соотношения (1.2.44)], выражение (1.2.43a) можно переписать в виде

$$\chi'_{\omega} = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''_{\omega'}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{0-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{\omega' \chi''_{\omega'}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' - i2\chi''_{\omega}, \quad (1.2.45)$$

где  $\varepsilon > 0$ . Справедливость этого выражения нетрудно проверить, заменяя контур интегрирования  $(0, \omega - \varepsilon) \cup (\omega + \varepsilon, \infty)$ , по которому вычисляется главное значение интеграла в смысле Коши, на луч  $(0 - i\varepsilon, \infty - i\varepsilon)$  и отдельно вычисляя интеграл по полуокружности радиусом  $\varepsilon$  с центром в  $\omega$ . Для того чтобы между старым и новым

контурами интегрирования не оказалось полюсов функции  $\chi''_{\omega}$ , величина  $\varepsilon$  должна быть достаточно мала.

Дифференцируя выражение (1.2.45) по  $\omega$ , получаем

$$\frac{d\chi'_{\omega}}{d\omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\omega}{\pi} \int_{0-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{\omega' \chi''_{\omega'}}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} d\omega' - i2 \frac{d\chi''_{\omega}}{d\omega}. \quad (1.2.46)$$

В случае когда производная  $d\chi''_{\omega}/d\omega$  пренебрежимо мала, правая часть выражения (1.2.46) является положительной величиной, если  $\chi'' > 0$  (пассивная среда), т. е.  $\chi'_{\omega}$  представляет собой монотонно возрастающую функцию частоты  $\omega$  так же, как и вещественная часть  $n_{\omega}$  показателя преломления [ $n_{\omega} = (1 + \chi'_{\omega})^{1/2}$ ] и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_0(1 + \chi'_{\omega})$ . Вспоминая определение, данное в разд. 1.2, можно сделать заключение, что спектральная область, в которой потери постоянны, является областью нормальной дисперсии.

Проведенное выше рассмотрение одинаково справедливо при высоких частотах как для диэлектриков, так и для металлов. При очень высоких частотах не существует даже количественного различия между этими двумя случаями, причем диэлектрическая проницаемость, как правило, имеет вид (см., например, § 84 в книге [1])

$$\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2} \right) \equiv \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (1.2.47)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота,  $e$  и  $m$  — соответственно заряд и масса электрона, а  $N$  — полное число электронов в единице объема среды (рис. 1.5).

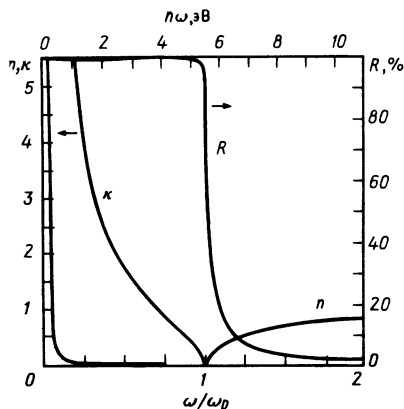


Рис. 1.5. Спектральная зависимость вещественной ( $n$ ) и мнимой ( $k$ ) частей комплексного показателя преломления  $\tilde{n} = n - ik$  металла, диэлектрическая проницаемость которого описывается зависимостью, аналогичной (1.2.47), причем плазменная частота  $\hbar\omega_p = \hbar(Ne^2/m\varepsilon_0)^{1/2} = 4,7$  эВ. Для учета затухания, определяемого коэффициентом  $\gamma$ , член  $\omega^2$  заменен на  $\omega(\omega - i\gamma)$ , причем в данном случае  $\gamma = 4 \cdot 10^{-3}\omega_p$ . Кривая  $R(\omega)$  изображает коэффициент отражения, вычисленный по формулам Френеля в гл. 3.

(Согласно работе [10а].)

### 1.2.3.а. Диэлектрическая восприимчивость в резонансной двухуровневой среде

Представленные в разд. 1.2 выражения позволяют нам, основываясь на простой, но реалистической модели, точно вычислить вещественную и мнимую части диэлектрической восприимчивости  $\chi_\omega$  вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ . Заметим, что, используя соотношения (1.2.24) и (1.2.25), а также определение аналитического сигнала (см. разд. 1.8), можно записать

$$\hat{E}(z, t) \cong e^{i\omega_0 t - ikz} \mathcal{G}(z, t), \quad \hat{P}(z, t) \cong -ie^{i\omega_0 t - ikz} S(z, t). \quad (1.2.48)$$

Тогда из выражения (1.2.29) следует, что

$$\hat{P}(z, t) = -i \int_0^{+\infty} dt' \xi(z, t', t - t') \hat{E}(z, t - t'); \quad (1.2.49)$$

здесь использовано определение

$$\xi(z, t', t - t') = -(2\pi c d / \omega_0) e^{-\gamma_{ab} t' + i\omega_0 t'} \chi(z, t', t - t'). \quad (1.2.50)$$

Рассмотрим случай, когда интенсивность сигнала достаточно мала, так что распределение населенностей в двухуровневой атомной системе не меняется, т. е. среда находится практически в термодинамическом равновесии. При этом имеем  $\chi(z, t', t - t') \approx \chi(z, t', -\infty)$ , так что, применяя преобразование Фурье к обеим частям выражения (1.2.49), получаем

$$\hat{P}_\omega(z) = -i \xi_\omega \hat{E}_\omega(z), \quad (1.2.51)$$

где  $\xi_\omega$  — фурье-образ функции  $\xi(z, t', 0)$ . В то же время из определения функции  $\chi(t)$  [см. (1.2.2)] следует, что при  $\omega > 0$

$$\hat{P}_\omega(z) = \varepsilon_0 \chi_\omega \hat{E}_\omega(z). \quad (1.2.52)$$

Таким образом, сравнивая два последних выражения, имеем

$$\chi_\omega = -(i/\varepsilon_0) \xi_\omega, \quad (1.2.53)$$

или

$$\chi_\omega = \frac{2icn_1^2 d}{\omega_0} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_{ab} t' - i(\omega - \omega_0)t'} \chi(z, t', -\infty) dt'. \quad (1.2.54)$$

Учитывая соотношение (1.2.32), окончательно находим

$$\chi_\omega = f \frac{e^2}{\varepsilon_0 m 2\omega_0} \Delta N_0 i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega')}{\gamma_{ab} + i(\omega - \omega')} d\omega', \quad (1.2.55)$$

где

$$f = \frac{2m\omega_0 p_0^2}{3\hbar e^2}, \quad \Delta N_0 = N_{a0} - N_{b0}, \quad (1.2.56)$$

$m$  — масса электрона,  $\Delta N_0$  — инверсия населенностей в единице объема, а  $f$  — так называемая *сила осциллятора*. Если  $g = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$ , то

$$\chi'_{\omega} = f \frac{\Delta N_0 e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad \chi''_{\omega} = -f \frac{\Delta N_0 e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (1.2.57)$$

Используя *параметр расстройки*  $\zeta = (\omega - \omega_0)/\gamma_{ab}$  и *лоренцеву функцию*  $\mathcal{L} = (1 + \zeta^2)^{-1}$ , выражения (1.2.57) можно переписать в виде

$$\frac{\chi'_{\omega}}{\chi'_{\omega_0}} = -\zeta \mathcal{L}, \quad \frac{\chi''_{\omega}}{\chi''_{\omega_0}} = \mathcal{L}, \quad (1.2.58)$$

Соответствующие этим выражениям кривые показаны на рис. 1.6. Для более подробного ознакомления с этими вопросами мы отсылаем читателя к разд. 7.19.

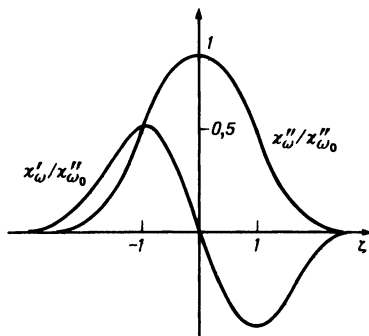


Рис. 1.6. Вещественная  $\chi'_{\omega}$  и мнимая  $\chi''_{\omega}$  части восприимчивости в зависимости от параметра расстройки  $\zeta$  для лоренцевой линии.

### 1.2.3.6. Распространение монохроматической волны в однородной среде

В области оптических частот уравнения Максвелла, достаточные для описания распространения волны на одной частоте в диспергирующей среде в отсутствие внешних зарядов и токов, записываются в виде

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1.2.59a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0 \tilde{n}^2(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.2.59b)$$

Если предположить, что пространственная зависимость векторов  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  имеет вид  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$  может быть комплексной величиной, то из уравнений (1.2.59) можно сразу получить следующие соотношения:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon_0 \tilde{n}^2(\omega) \mathbf{E}. \quad (1.2.60)$$

Умножая скалярно эти уравнения на  $\mathbf{k}$ , имеем

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.2.61)$$

а исключая из тех же уравнений  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) и используя векторное тождество (A.2), приходим к соотношению

$$k^2 = k'^2 - k''^2 - 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = k_0^2 \tilde{n}_\omega^2.$$

Если  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  параллельны друг другу (скажем, они направлены вдоль оси  $z$ ), то пространственная зависимость векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеет вид *плоской затухающей волны* (поверхности постоянного поля ортогональны направлению распространения, вдоль которого волна затухает); иными словами,

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto e^{-ik'z - k''z}, \quad (1.2.62)$$

здесь

$$k' - ik'' = k_0 \tilde{n} \equiv k_0(n - ik), \quad (1.2.63)$$

где величина  $k$  называется *коэффициентом поглощения* (или *экстинкции*).

### 1.3. СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы напомним некоторые основные понятия, касающиеся поляризации электромагнитного излучения. Исторически первые интуитивные предположения о возможности описать особые свойства света, связанные с их состоянием поляризации, принадлежат Ньютону. Этой задачей Ньютон занялся в связи с интерпретацией результатов экспериментов, выполненных Гюйгенсом. Гюйгенс наблюдал, что при падении луча света на двоякопреломляющий кристалл (см. разд. 1.4) возникают два луча (*обыкновенный* и *необыкновенный*), которые при прохождении второго двоякопреломляющего кристалла ведут себя иначе, чем контрольный луч, не испытывавший предварительного двойного лучепреломления.

Рассмотрим прежде всего распространение света в однородной среде, когда вектор электромагнитной волны лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны  $z$ . Пусть электрический вектор  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  соответствует волне, которая в комплексном представлении описывается следующим аналитическим выражением:

$$\hat{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = a_1(x, y)e^{i\omega t - ikz} \hat{x} + a_2(x, y)e^{i\omega t - ikz} \hat{y}. \quad (1.3.1)$$

Тогда в каждой фиксированной точке пространства конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает замкнутую кривую. Исключая параметр  $t$  из выражений для компонент  $E_x$  и  $E_y$ , нетрудно показать, что эта кривая является

эллипсом, уравнение которого имеет вид

$$\frac{E_x^2}{|a_1|^2} + \frac{E_y^2}{|a_2|^2} - 2 \frac{E_x E_y}{|a_1 a_2|} \cos \delta = \sin^2 \delta; \quad (1.3.2)$$

здесь мы положили  $a_1 = |a_1| \exp(i\delta_1)$ ,  $a_2 = |a_2| \exp(i\delta_2)$  и  $\delta = \delta_2 - \delta_1$ . Если  $|a_1| = |a_2|$  и  $\delta = \pm \pi/2$ , то эллипс вырождается в окружность (*круговая поляризация*), а если  $\delta = 0, \pm \pi$ , он вырождается в прямую линию (*линейная поляризация*).

Это рассмотрение можно обобщить [11] на произвольное поле  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ , которое в комплексном представлении имеет вид

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{p}(\mathbf{r}) + i\mathbf{q}(\mathbf{r})]e^{i\omega t}, \quad (1.3.3)$$

где  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{q}(\mathbf{r})$  — два вещественных вектора. При любом фиксированном  $\mathbf{r}$  конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает замкнутую кривую [вследствие периодичности  $\mathbf{E}(t)$ ], которая лежит в плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ . Поскольку в любой такой плоскости всегда можно выбрать пару взаимно ортогональных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathbf{p} + i\mathbf{q} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{-i\eta}, \quad (1.3.4)$$

где  $\eta$  — вещественная величина, определяемая выражением

$$\operatorname{tg} 2\eta = \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{q^2 - p^2}, \quad (1.3.5)$$

выражение (1.3.3) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} \exp(i\omega t - i\eta) + i\mathbf{b} \exp(i\omega t - i\eta).$$

Отсюда сразу видно, что, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены соответственно вдоль  $\hat{\mathbf{x}}$  и  $\hat{\mathbf{y}}$ , мы приходим к зависимости поля, аналогичной (1.3.1). Следовательно, в рассматриваемой нами плоскости конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс, уравнение которого следует из (1.3.2) при  $\delta = \pi/2$ :

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1. \quad (1.3.6)$$

### 1.3.1. Параметры Стокса и матрица Джонса

Как мы уже показали, вектор электрического поля монохроматической волны в данной точке  $\mathbf{r}$  изменяется во времени, оставаясь параллельным одной плоскости. Если выбрать в качестве этой плоскости плоскость  $xy$ , то общее выражение для поля имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = a_x \cos(\omega t + \Phi_x) \hat{\mathbf{x}} + a_y \cos(\omega t + \Phi_y) \hat{\mathbf{y}}, \quad (1.3.7)$$



или, в комплексном представлении,

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \tilde{a}_x e^{i\omega t} \hat{x} + \tilde{a}_y e^{i\omega t} \hat{y}, \quad (1.3.8)$$

где  $\tilde{a}_x = a_x \exp(i\Phi_x)$ ,  $\tilde{a}_y = a_y \exp(i\Phi_y)$ . Конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс, главная ось которого образует угол  $\psi$  с осью  $x$ :

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \cos \delta \right), \quad (1.3.9)$$

где  $\delta = \Phi_x - \Phi_y$ . Кроме того, отношение  $b/a$  меньшей полуоси эллипса к большей можно выразить как функцию вспомогательного угла  $\chi$ , так что  $b/a = \operatorname{tg} \chi$ , где

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2a_x a_y}{a_x^2 + a_y^2} \sin \delta \right). \quad (1.3.10)$$

Таким образом, поле в точке  $\mathbf{r}$  однозначно характеризуется плоскостью, в которой лежит его эллипс поляризации, а также углами  $\chi$  и  $\psi$ , определенными выше, и своей интенсивностью. Столь же полно поле можно характеризовать так называемыми *параметрами Стокса*  $s_0, s_1, s_2$  и  $s_3$ , определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_x^2 + a_y^2, \\ s_1 &= a_x^2 - a_y^2 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi, \\ s_2 &= 2a_x a_y \cos \delta = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi = 2 \operatorname{Re}(\tilde{a}_x \tilde{a}_y^*), \\ s_3 &= 2a_x a_y \sin \delta = s_0 \sin 2\chi = 2 \operatorname{Im}(\tilde{a}_x \tilde{a}_y^*). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Очевидно, что параметр  $s_0$  пропорционален интенсивности, а  $s_1, s_2, s_3$  можно интерпретировать [11] как декартовы координаты точки на сфере радиусом  $s_0$  (рис. 1.7), известной как *сфера Пуанкаре*. Долгота и широта этой точки равны соответственно  $2\psi$  и  $2\chi$ . В частности, северный полюс соответствует левой, южный полюс — правой круговой

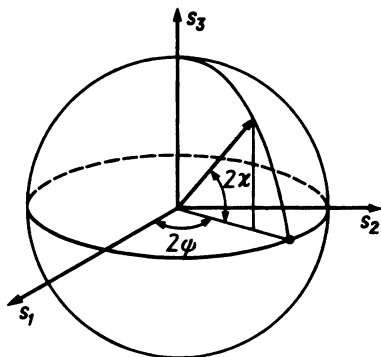


Рис. 1.7. Сфера Пуанкаре.

поляризации, в то время как линейно-поляризованным полям соответствуют точки на экваторе.

Для квазимонохроматических волн, когда амплитуды  $a_x$  и  $a_y$ , а также фаза являются зависящими от времени случайными величинами, параметры Стокса нужно заменить на средние по ансамблю (см. разд. 1.8):

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle, \\ s_1 &= \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle, \\ s_2 &= 2\langle a_x(t)a_y(t) \cos \delta(t) \rangle, \\ s_3 &= 2\langle a_x(t)a_y(t) \sin \delta(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

В частности, если электромагнитное поле представляет собой суперпозицию нескольких статистически независимых волн, параметры Стокса суммарного поля равны сумме параметров Стокса всех составляющих волн. Исходя из этого, ван де Хюлст сформулировал следующий *принцип оптической эквивалентности* [12]: «Ни один прибор не может отличить две различные некогерентные суммы простых волн, если результирующие пучки имеют одинаковые параметры Стокса».

Волна, для которой  $s_0 \neq 0$ , но  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ , называется *неполяризованной*. Данную квазимонохроматическую волну можно однозначно разложить на сумму поляризованной и неполяризованной составляющих. Действительно, используя аддитивность параметров Стокса, можно записать

$$s_0 = s_0^{(1)} + s_0^{(2)}, \quad s_i = s_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3.13)$$

где верхний индекс (1) обозначает вклад поляризованной волны, а (2) — неполяризованной. Поскольку [см. выражение (1.3.11)]  $(s_0^{(2)})^2 = (s_1^{(2)})^2 + (s_2^{(2)})^2 + (s_3^{(2)})^2$ , можно определить *степень поляризации*  $m$  как отношение интенсивности  $s_0^{(2)}$  поляризованной компоненты к полной интенсивности  $s_0$  волны:

$$m = [(s_1^{(2)})^2 + (s_2^{(2)})^2 + (s_3^{(2)})^2]^{1/2} / s_0. \quad (1.3.14)$$

В некоторых случаях необходимо знать, как изменяются параметры Стокса оптического пучка, распространяющегося в данной среде или рассеянного на каком-либо препятствии. При этом результирующее поле  $E'_{x'}$ ,  $E'_{y'}$ , заданное в некоторых выбранных декартовых координатах  $x'$ ,  $y'$ , связано с начальным полем  $E_x$ ,  $E_y$  следующим линейным преобразованием [13]:

$$\begin{bmatrix} E'_{x'} \\ E'_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \\ A_4 & A_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (1.3.15)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — так называемая *матрица Джонса*. Если определить вещественные величины

$$M_k = A_k A_k^*, \quad S_{kj} = S_{jk} = \operatorname{Re}(A_j A_k^*)$$

$$D_{jk} = -D_{kj} = -\operatorname{Im}(A_j A_k^*) \quad (j, k = 1, 2, 3, 4), \quad (1.3.16)$$

то с помощью простых преобразований можно показать, что

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s'_0 + \frac{1}{2}s'_1 \\ \frac{1}{2}s'_0 - \frac{1}{2}s'_1 \\ s'_2 \\ s'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s_0 + \frac{1}{2}s_1 \\ \frac{1}{2}s_0 - \frac{1}{2}s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad (1.3.17)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_2 & M_3 & S_{23} & -D_{23} \\ M_4 & M_1 & S_{41} & -D_{41} \\ 2S_{24} & 2S_{31} & S_{21} + S_{34} & -D_{21} + D_{34} \\ 2D_{24} & 2D_{31} & D_{21} + D_{34} & S_{21} - S_{34} \end{bmatrix}. \quad (1.3.18)$$

Более подробно свойства матрицы  $\mathbf{F}$  будут рассмотрены в разд. 6.13.

### 1.3.2. Поляризация затухающих волн

Рассмотрим затухающую волну в виде, в котором мы ее записали в разд. 1.2. С помощью (1.2.61) и с учетом комплексного характера вектора  $\mathbf{k}$  можно показать, что поле является эллиптически поляризованным. Для доказательства этого рассмотрим поперечную магнитную (ТМ) волну (см. разд. 3.7), составляющие электрического поля которой запишутся в виде

$$E_x(\mathbf{r}) = E_0 \cos \theta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.3.19a)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = E_0 \sin \theta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.3.19b)$$

где  $\theta = \theta' - i\theta''$  — комплексный угол между  $\mathbf{k}$  и единичным вектором  $\hat{\mathbf{z}}$ . При записи этих выражений мы учли, что  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$ , а также то, что для ТМ-волны  $H_x = H_z = 0$ .

Без потери общности можно предположить, что  $E_0 = 1$ , и пренебречь несущественным общим фазовым множителем  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Тогда зависимость составляющих электрического поля от времени запишется в виде

$$\hat{E}_x(t) = \operatorname{Re}(\cos \theta e^{i\omega t}) = \cos \theta' \operatorname{ch} \theta'' \cos \omega t - \sin \theta' \operatorname{sh} \theta'' \sin \omega t \quad (1.3.20a)$$

$$\hat{E}_z(t) = \operatorname{Re}(\sin \theta e^{i\omega t}) = \sin \theta' \operatorname{ch} \theta'' \cos \omega t + \cos \theta' \operatorname{sh} \theta'' \sin \omega t. \quad (1.3.20b)$$

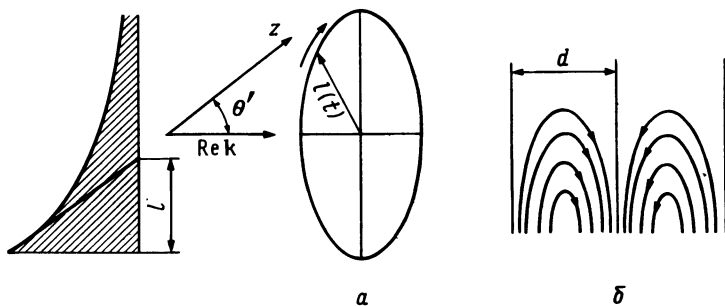


Рис. 1.8. *a* — поляризационный эллипс, описываемый электрическим вектором неоднородной плоской волны, распространяющейся в среде без потерь. Комплексный волновой вектор  $k = k' - ik''$  образует угол  $\theta = \theta' - i\theta''$  с осью  $z$ . Оси эллипса пропорциональны с  $\text{ch}\theta'$  и  $|\text{sh}\theta''|$ . Малая ось образует угол  $\theta''$  с осью  $z$ ; *b* — силовые линии электрического поля в данный момент времени; с течением времени распределение сдвигается вдоль направления вектора  $k'$ .

Исключая отсюда  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} & \hat{E}_x^2(\sin^2 \theta' + \text{sh}^2 \theta'') + \hat{E}_z^2(\cos^2 \theta' + \text{sh}^2 \theta'') \\ & - \hat{E}_x \hat{E}_z \sin 2\theta' = \frac{1}{4} \text{sh}^2 2\theta''. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Следовательно, вектор  $\hat{E}_x(t)\hat{x} + \hat{E}_y(t)\hat{y}$  описывает эллипс, большая ось которого составляет с осью  $x$  угол  $\theta'$ , а длины двух осей пропорциональны  $\text{ch}\theta''$  и  $|\text{sh}\theta''|$ . Таким образом, у ТМ-волны электрическое поле эллиптически поляризовано в плоскости  $xz$  (рис. 1.8), а магнитное поле направлено вдоль оси  $y$ . При  $\theta'' = 0$  (распространяющиеся волны) эллипс вырождается в прямую линию. Для поперечных электрических (ТЕ) волн вектор  $\mathbf{H}$  оказывается эллиптически поляризованным, а вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения.

#### 1.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Многие макроскопические среды анизотропны. Поэтому в таких случаях при решении задачи о распространении волн необходимо выделить геометрически некоторое направление и обобщить введенные до сих пор понятия [13]. В частности, заранее очевидно, что с макроскопической точки зрения среда не может описываться теперь скалярной диэлектрической или магнитной проницаемостью ( $\epsilon$  или  $\mu$ ). Очевидные обобщения материальных соотношений, связывающих  $\mathbf{E}_\omega$  и  $\mathbf{H}_\omega$  с  $\mathbf{D}_\omega$  и  $\mathbf{V}_\omega$  [см. соотношение (1.2.3)], запишутся в виде

$$D_{\omega i} = \tilde{\epsilon}_{\omega ij} E_{\omega j}, \quad (1.4.1a)$$

$$B_{\omega i} = \tilde{\mu}_{\omega ij} H_{\omega j}, \quad (1.4.16)$$

где  $\tilde{\epsilon}_{\omega ij}$  и  $\tilde{\mu}_{\omega ij}$  — элементы тензора второго ранга.

В соотношениях (1.4.1), применяемых для описания распространения оптического излучения в кристаллах,  $\mu$  обычно можно считать скалярной величиной, равной примерно  $\mu_0$ . Это справедливо для большинства представляющих интерес частот излучения. Таким образом, среда описывается тензором диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}_{\omega}$ , элементы которого определяются выражением (1.2.16); отсюда следует, что среда по-разному откликается на приложенное в разных направлениях поле (вектор  $\mathbf{D}$  не обязательно параллелен  $\mathbf{E}$ ). Это в свою очередь означает, что характеристики распространения волн зависят от направления распространения и поляризации волны (*двойное лучепреломление*).

#### 1.4.1. Двойное лучепреломление

Рассмотрим распространение плоских монохроматических волн в прозрачном кристалле (при этом тензор  $\tilde{\epsilon}_{\omega}$  равен вещественному тензору диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{\omega}$ ). Предположим, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  пропорциональны общему множителю  $\exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  — вещественный вектор. Тогда уравнения Максвелла (1.2.60) принимают вид

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.4.2a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (1.4.2b)$$

Подставляя уравнение (1.4.2a) в (1.4.2b) и используя векторное тождество (A.2), чтобы вычислить возникающее при этом тройное векторное произведение, получаем

$$\mu_0 \omega^2 \mathbf{D} = k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}; \quad (1.4.3)$$

здесь мы учли, что произведение  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$  отлично от нуля. Таким образом, вектор  $\mathbf{k}$  не перпендикулярен  $\mathbf{E}$ . В то же время из уравнений (1.4.2) непосредственно следует, что  $\mathbf{k}$  ортогонален векторам  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ . Это демонстрируется на рис. 1.9, который, в частности, показывает, что  $\mathbf{k}$  и вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  (см. разд. 1.6), вообще говоря, не параллельны друг другу, т. е. поток энергии не обязательно направлен вдоль нормали к волновому фронту.

Предположим далее, что задан единичный вектор в направлении распространения пучка  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{k}/k$ . При этом можно показать, что системе уравнений (1.4.2) удовлетворяют две возможные величины  $k$  и, следовательно, два различных показателя преломления  $n = k/k_0$ . Для этого удобно ввести систему декартовых координат, совпадающих с *главными осями* ( $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) тензора диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{\omega}$ .

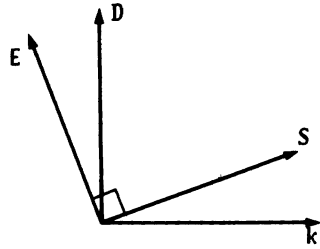


Рис. 1.9. Взаимное расположение вектора в задаче о распространении нормальных мод в анизотропной среде.

При этом соотношение (1.4.1a) приобретает диагональную форму

$$D_{\omega i} = \bar{\epsilon}_{\omega i} E_{\omega i}, \quad (1.4.4)$$

причем величины  $\bar{\epsilon}_{\omega i}$  называют *главными диэлектрическими проницаемостями*. В этой системе отсчета после подстановки (1.4.4) в (1.4.3) нетрудно получить:

$$E_{\omega i} = \frac{n_{\omega, s}^2 \hat{s} \cdot \mathbf{E}_{\omega}}{n_{\omega, s}^2 - \bar{\epsilon}_{\omega i}/\epsilon_0} s_i. \quad (1.4.5)$$

Умножая обе части этого уравнения на  $s_i$  и суммируя по  $i$ , имеем

$$\hat{s} \cdot \mathbf{E}_{\omega} = \hat{s} \cdot \mathbf{E}_{\omega} \sum_{i=1}^3 \frac{n_{\omega, s}^2 s_i^2}{n_{\omega, s}^2 - \bar{\epsilon}_{\omega i}/\epsilon_0}. \quad (1.4.6)$$

Отсюда следует *уравнение Френеля*

$$\frac{s_1^2}{n_{\omega, s}^2 - \bar{\epsilon}_{\omega 1}/\epsilon_0} + \frac{s_2^2}{n_{\omega, s}^2 - \bar{\epsilon}_{\omega 2}/\epsilon_0} + \frac{s_3^2}{n_{\omega, s}^2 - \bar{\epsilon}_{\omega 3}/\epsilon_0} = \frac{1}{n_{\omega, s}^2}. \quad (1.4.7)$$

Это биквадратное уравнение относительно неизвестной  $n_{\omega, s}$ ; следовательно, оно имеет две пары решений  $\pm n_1$  и  $\pm n_2$ . Вырождение по знаку ( $\pm$ ) тривиально и является следствием возможности распространения волны в противоположных направлениях. Существование же двух, не равных по модулю, решений означает, что в одном и том же направлении  $\mathbf{s}$  могут распространяться две различные плоские волны с разными фазовыми скоростями  $c/n_1$  и  $c/n_2$ . Можно показать, что обе эти волны линейно-поляризованы и их направления поляризации (т. е. направления вектора  $\mathbf{E}$ ) взаимно перпендикулярны. Таким образом, для любого направления  $\hat{s}$  в анизотропной среде две плоские волны (нормальные моды) могут распространяться, «чувствуя» каждая свой показатель преломления  $n_1$  или  $n_2$ .

Если отложить из начала координат в направлении  $\hat{\mathbf{t}}$  вектора Пойнтинга плоской волны с волновым вектором  $k\hat{\mathbf{s}}$  отрезок длиной  $n^{-1}$ , то получим так называемую *лучевую поверхность* или *волновую поверхность Френеля*. Она дает полную картину распределения лучевых скоростей  $v_{1, 2} = c/n_{1, 2}$  во всех направлениях. В общем случае мы получаем двулистую поверхность — один лист соответствует  $1/n_1$ , а другой  $1/n_2$ . Эти два листа пересекаются в двух (*одноосный*

*кристалл*) или четырех (*двухосный кристалл*) точках, которые определяют оптические оси кристалла.

Когда мы откладываем на графике величины  $n_{1,2}^{-1}$  как радиус-векторы в направлении  $\hat{S}$  из начала координат, то получаем двулиственную *поверхность нормалей*. В частности, для одноосного кристалла один из листов является сферой (соответствует обыкновенной волне), а другой — овалоидом (поверхность вращения четвертого порядка соответствует необыкновенной волне). Эти две поверхности касаются друг друга в двух точках, соответствующих оптической оси.

Следует заметить здесь, что реализовать в эксперименте такую ситуацию, когда две волны имеют в кристалле один и тот же вектор  $\mathbf{k}$ , довольно сложно. Дело в том, что, попадая в кристалл извне, эти волны преломляются на разный угол (см. гл. XIV в книге [11]).

В любом одноосном кристалле одна из главных диэлектрических осей совпадает с осью симметрии (вдоль этой *оптической оси* обычно направляют ось  $z$ ). Две же другие оси перпендикулярны ей и произвольны (обычно используют  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \varepsilon_2 = \varepsilon_y$ ).

Для решения многих задач по распространению волн удобно обратиться к геометрическим построениям, использующим *эллипсоид* показателей преломления (см. гл. XIV в книге [11]), определяемый уравнением

$$(x^2/n_x^2) + (y^2/n_y^2) + (z^2/n_z^2) = 1. \quad (1.4.8)$$

Здесь  $n_x, n_y, n_z$  — главные показатели преломления. Эллипсоид показателей преломления, называемый также *оптической индикатрисой*<sup>1)</sup>, можно использовать для определения двух показателей преломления ( $n_1$  и  $n_2$ ), связанных с двумя независимыми линейно поляризованными плоскими волнами, которые могут распространяться вдоль произвольного направления  $\hat{S}$  в кристалле. Для этого нужно найти эллипс, образующийся при пересечении плоскости, перпендикулярной  $\hat{S}$  и проходящей через начало координат, с эллипсоидом индексов. Две полуоси построенного таким образом эллипса равны показателям преломления  $n_1$  и  $n_2$  двух нормальных мод. Эти же оси оказываются также параллельными направлению векторов  $\mathbf{D}_{1,2}$  двух мод. Электрические поля  $\mathbf{E}_{1,2}$  параллельны нормальям к эллипсоиду показателей преломления — в точках его пересечения с осями эллипса.

Оказывается, что для одноосного кристалла лишь одно из решений уравнения Френеля зависит от угла между вектором  $\hat{S}$  и осью  $z$ . При этом одна из волн (*обыкновенная*) имеет эффективный показатель преломления, который не зависит от  $\theta$  и равен  $n_1 \equiv n_0 \equiv \sqrt{\varepsilon_x/\varepsilon_0}$ . Другая же волна (*необыкновенная*) имеет показатель преломления

<sup>1)</sup> В книге Борна и Вольфа [11] поверхность, описываемая уравнением (1.4.8), называется *эллипсоидом волновых нормалей*. — Прим. перев.

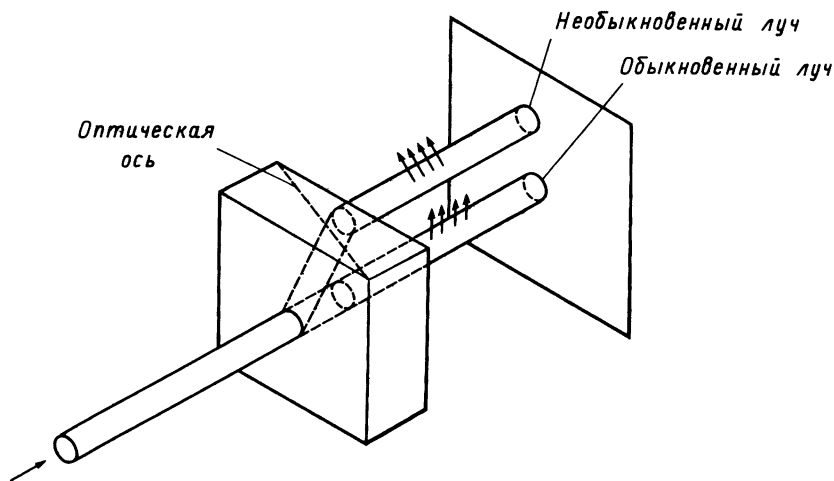


Рис. 1.10. Двойное лучепреломление обыкновенного и необыкновенного лучей.

$n_2 \equiv n_2(\theta)$ , зависящий от  $\theta$ . Величина  $n_2$  изменяется в диапазоне от  $n_0$  до  $\sqrt{\bar{\epsilon}_z/\epsilon_0} \equiv n_e$  (см. задачу 1.13).

Различие между эффективными показателями преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей имеет одно очевидное следствие. Падая на поверхность кристалла, эти два луча преломляются по-разному (рис. 1.10), чем и оправдывается название «двойное лучепреломление» рассматриваемого в данном разделе явления.

Следует заметить, что в общем случае вектор Пойнтинга  $(\frac{1}{2}) \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  составляет некоторый угол с волновым вектором нормальной моды. Если рассматривать распространение пучка лучей, например гауссова лазерного пучка, то его направление не совпадает с вектором распространения центральной компоненты плоских волн, составляющих пучок. С.М. Рытов показал, что пучок лучей распространяется вдоль направления вектора Пойнтинга, вычисленного для центральной компоненты волнового пакета плоских волн. Этот результат довольно легко получить, если представить поле в виде дифракционного интеграла (см. гл. 4), который можно вычислить с помощью метода стационарной фазы, рассматриваемого в гл. 5.

#### 1.4.1.а. Электрооптический эффект

Если вдоль некоторого направления в кристалле приложить электрическое поле  $\mathbf{E}^{(0)}$ , то при этом элементы  $\epsilon_{ij}$  тензора диэлектрических проницаемостей изменятся. Новые компоненты  $\epsilon'_{ij}$  можно выразить



через прежние с помощью следующих соотношений:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + t_{ijk}E_k^{(0)} + T_{ijkl}E_k^{(0)}E_l^{(0)}. \quad (1.4.8a)$$

Здесь  $t_{ijk}$  и  $T_{ijkl}$  — тензоры третьего и четвертого рангов, которые характеризуют соответственно *линейный электрооптический эффект* (называемый также *эффектом Поккельса*) и *квадратичный электрооптический эффект* (*эффект Керра*). Эффект Поккельса возможен лишь в кристаллах, не имеющих центра симметрии (т. е. не симметричных относительно инверсии), а эффект Керра наблюдается в центрально-симметричных кристаллах.

Из соотношения (1.4.8a) мы видим, что под действием внешнего поля  $\mathbf{E}^{(0)}$  изменяются как главные оси, так и главные диэлектрические проницаемости кристалла, причем эти изменения зависят от направления и силы внешнего поля. Следовательно, изменяя к примеру лишь амплитуду поля  $E^{(0)}$ , можно управлять параметрами распространения электромагнитного поля  $\mathbf{E}^{(1)}$ , падающего на кристалл. По такому принципу построена, например, *ячейка Поккельса*. Она состоит из расположенной между взаимно ортогональными поляризаторами кристаллической пластинки с проводящими электродами на рабочих поверхностях (рис. 1.11). Прикладывая к кристаллу напряжение  $V$ , можно менять на необходимую величину разность фаз  $\Gamma$  двух распространяющихся через кристалл лучей.

Рассмотрим, в частности, одноосный кристалл дигидрофосфата калия ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ; обычно его называют KDP), вырезанный в форме пластинки, с двумя поверхностями, перпендикулярными оси симметрии четвертого порядка (оптической оси  $z$ ), и двумя электродами, которыми служат покрытия из прозрачного оксида металла. Если внешнее напряжение отсутствует, то одна из главных осей совпадает с оптической осью  $z$ , а две другие могут быть выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Прикладывая внешнее напряжение  $V$ , мы снимаем это вырождение, и в то время как одна из глав-

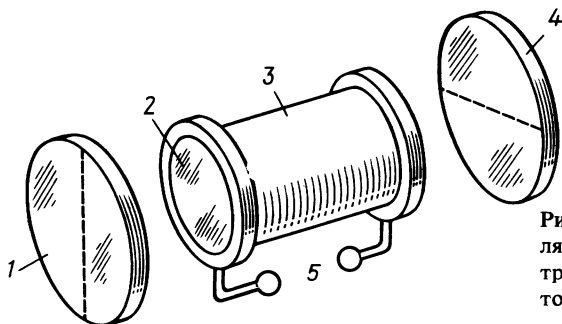


Рис. 1.11. Ячейка Поккельса. 1 — поляризатор; 2 — прозрачный электрод; 3 — кристалл; 4 — поляризатор; 5 — модулирующее напряжение.

ных осей по-прежнему совпадает с осью  $z$ , две другие совпадают с двумя осями симметрии второго порядка кристалла, повернутыми на угол  $\pi/4$  [13]. Соответствующие главные диэлектрические проницаемости  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  можно выразить через обыкновенный показатель преломления  $n_o$ , который имеет место в отсутствие напряжения, и амплитуду внешнего поля  $E^{(0)}$ :

$$\epsilon_o/\bar{\epsilon}_x = (1/n_o^2) + rE^{(0)}, \quad (1.4.9a)$$

$$\epsilon_o/\bar{\epsilon}_y = (1/n_o^2) - rE^{(0)}, \quad (1.4.9b)$$

где  $r$  — постоянная, свойственная конкретному кристаллу. Из соотношений (1.4.9) следует, что эффективные значения показателей преломления даются следующими приближенными выражениями (с учетом того, что выполняется неравенство  $rE^{(0)} \ll 1$ ):

$$n_1 = n_o - \frac{1}{2}rn_o^3E^{(0)}, \quad n_2 = n_o + \frac{1}{2}rn_o^3E^{(0)}. \quad (1.4.10)$$

Таким образом, две составляющие линейно поляризованного поля  $E^{(1)}$ , распространяющегося вдоль оси  $z$  на расстояние  $L$  (длина кристалла), приобретают *разность фаз*  $\Gamma$ :

$$\Gamma = k_o(n_2 - n_1)L = n_o^3k_o rLE^{(0)} = k_o n_o^3 rV, \quad (1.4.11)$$

где  $V = LE^{(0)}$ .

Во многих случаях удобно пользоваться величиной

$$V_\pi = \lambda/2n_o^3r, \quad (1.4.12)$$

которая равна напряжению, приводящему к задержке фазы на  $\pi$ . При  $\lambda = 0,54$  мкм в кристалле KDP мы имеем  $V_\pi = 7,9$  кВ, а в KD\*P (водород замещен на дейтерий)  $V_\pi \approx 3,4$  кВ. Если поляризованный анализатор на входе ориентирован так, что  $\hat{E}_x^{(1)} = \hat{E}_y^{(1)}$ , а на выходе анализатор повернут на  $\pi/2$ , то выходная интенсивность равна (без учета размерного множителя)

$$I_{\text{вых.}} = \frac{1}{2}|\hat{E}_x^{(1)}(e^{i\Gamma} - 1)|^2. \quad (1.4.13)$$

Зависимость коэффициента пропускания  $T$  ячейки Поггеля от приложенного напряжения  $V$  дается выражением

$$T = I_{\text{вых.}}/I_{\text{вх.}} = \sin^2(\Gamma/2) = \sin^2(\pi V/2V_\pi). \quad (1.4.14)$$

## 1.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В разд. 1.2 [см. (1.2.1) и (1.2.2)] мы привели соотношение между векторами электрической индукции  $\mathbf{D}$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ . В этом соотношении вектор  $\mathbf{D}$  в момент времени  $t$  определяется значениями поля  $\mathbf{E}$  в момент времени  $t$  и в более ранние моменты времени  $t' < t$ . Такая нелокальность во времени неразрывно связа-

на с нелокальностью в пространстве [в соотношении (1.2.2) этой нелокальностью мы полностью пренебрегли, считая, что  $\mathbf{P}$  в точке  $\mathbf{r}$  зависит лишь от  $\mathbf{E}$  в той же самой точке]. Действительно, если вектор поляризации  $\mathbf{P}$  в данный момент времени  $t$  и в данной точке  $\mathbf{r}$  определяется значением вектора  $\mathbf{E}$  в той же точке в момент времени  $t - \Delta t$ , то за время  $\Delta t$  возмущение переместится на расстояние  $v\Delta t$  ( $v$  — характерная скорость возмущения). Как следствие, на поляризацию  $\mathbf{P}$  в точке  $\mathbf{r}$  будет оказывать влияние также электрическое поле в момент времени  $t$  в соседних точках  $\mathbf{r}'$ , таких, что  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = v\Delta t$ . Таким образом, если величина  $v\Delta t$  (что представляет собой характерную длину  $l$  среды, например молекулярный размер, постоянную решетки или дебаевский радиус экранирования) становится сравнимой с длиной волны  $\lambda$ , то необходимо учитывать *пространственную дисперсию*. Например, это может оказаться существенным вблизи резонансной частоты, когда показатель преломления  $n$  может быть очень большим и длина волны в среде  $\lambda = \lambda_0/n$  может соответственно измениться (см., например, разд. 1.2.2).

Эти соображения приводят к необходимости замены обычного соотношения между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  [см. (1.2.2)] на более общее:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (1.5.1)$$

Используя пространственно-временное преобразование Фурье [см. (1.1.19)], материальное соотношение (1.2.3) между  $\mathbf{D}_{\mathbf{q}, \omega}$  и  $\mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega}$  запишется в виде

$$\mathbf{D}_{\mathbf{q}, \omega} = \varepsilon_0(1 + \chi_{\mathbf{q}, \omega}) \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega} = \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega}, \quad (1.5.2)$$

где  $\mathbf{q}$  и  $\omega$  — независимые переменные. Как следствие пространственной дисперсии, *диэлектрическая проницаемость*  $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega}$  в общем случае имеет тензорный характер, так что соотношение (1.5.2) принимает вид

$$\mathbf{D}_{\mathbf{q}, \omega} = \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega}, \quad (1.5.3)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega}$  — тензор второго ранга. Такой тензорный подход необходим даже для среды, обычно рассматриваемой как изотропная (в нулевом приближении по  $l/\lambda$ ). Кроме того, если среда помимо макроскопической неоднородности обладает пространственной дисперсией, то  $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega}$  параметрически зависит от  $\mathbf{r}$  (в полной аналогии со случаем временной дисперсии; см. разд. 1.2).

Главные различия между распространением волн в обычной среде и в среде с пространственной дисперсией могут быть выявлены на примере решений уравнений Максвелла (1.1.1) и (1.1.2) в виде плоских

мономатических волн. Для случая  $\mathbf{J} = 0$  с помощью соотношения (1.1.6) можно получить уравнение

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} = 0. \quad (1.5.4)$$

Будем искать решения этого уравнения в виде *нормальных мод*, т. е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega} e^{i\omega t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_{\mathbf{q}, \omega} e^{i\omega t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.5.5)$$

Используя соотношение (1.5.3) и уравнение (1.1.4), записанное для случая  $\rho = 0$ , получаем

$$\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega}) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega} = 0 \quad (1.5.6)$$

и

$$\mathbf{q} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega} = 0. \quad (1.5.7)$$

При этом необходимо сделать различие между двумя возможностями:  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} \neq 0$  и  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} = 0$ . В первом случае  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{q}, \omega} = 0$  (*поперечные волны*), и из уравнения (1.5.6) [после использования векторного тождества (A.2)] получаем

$$D(\mathbf{q}, \omega) \equiv \det(\mu_0 \omega^2 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} + \mathbf{q}\mathbf{q} - q^2 \mathbf{1}) = 0. \quad (1.5.8)$$

Это соотношение (*дисперсионное уравнение*) позволяет выразить  $\mathbf{q}$  через  $\omega$  (или наоборот) с помощью дисперсионной функции  $D(\mathbf{q}, \omega)$ . В частности, в среде, не имеющей пространственной дисперсии,  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega}$  не зависит от  $\mathbf{q}$  и уравнение (1.5.8) квадратично по  $q^2$ . В дальнейшем мы будем обозначать через  $\mathbf{k} = \mathbf{q}(\omega)$  значение  $\mathbf{q}$ , которое удовлетворяет приведенному дисперсионному уравнению для данного  $\omega$ . В частности, если положить  $\mathbf{q} = nk_{\hat{\boldsymbol{\rho}}}$ , то можно показать, что в случае когда величина  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  не зависит от  $\mathbf{q}$ , уравнение (1.5.8) эквивалентно уравнению Френеля (1.4.7).

Во втором случае ( $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{q}, \omega} = 0$ ) из уравнения (1.5.6) следует, что

$$\mathbf{q} \times \mathbf{E}_{\mathbf{q}, \omega} = 0, \quad (1.5.9)$$

т. е. волны являются *продольными*.

### 1.5.1. Естественная оптическая активность

Пространственная дисперсия приводит к *естественной оптической активности*, а именно к повороту плоскости поляризации линейно-поляризованного света, распространяющегося через определенную среду. Можно ожидать, что пространственная дисперсия будет играть значительную роль только при очень малой длине волны  $\lambda$ , которая сравнима с характерной длиной среды  $l$ . (Заметим, что теория, не учитывающая дисперсии, является нулевым приближением по  $l/\lambda$ .) Век-

тор индукции  $\mathbf{D}$  можно записать в виде следующего разложения:

$$D_i = \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} E_k, \quad (1.5.10)$$

где для простоты мы опустили нижний индекс  $\omega$ . В этом уравнении  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  — тензор диэлектрической проницаемости в пределе  $q \rightarrow 0$ , а  $\gamma_{ijk}$  — антисимметричный тензор. Для плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{q} = k_0 \hat{\mathbf{s}}$  имеем  $\nabla \mathbf{E}_\omega = -ik_0 \hat{\mathbf{s}} \mathbf{E}_\omega$ , так что тензор  $\tilde{\varepsilon}$  можно переписать как

$$\tilde{\varepsilon}_{q,\omega ij} = \tilde{\varepsilon}_{0,\omega ij} - ik_0 \gamma_{ijk} s_k. \quad (1.5.11)$$

Теперь удобно ввести *вектор гирации*  $\mathbf{g}$ , определяемый соотношением

$$k_0 \gamma_{ijk} s_k = e_{ijk} g_k, \quad (1.5.12)$$

где  $e_{ijk}$  — *антисимметричный единичный тензор третьего ранга* (тензор Леви — Чивита) ( $e_{ijk} \neq 0$  для  $i \neq j \neq k$ ,  $e_{ijk} = -e_{jik} = -e_{kji} = -e_{ijl}$ ,  $e_{123} = 1$ ). В соответствии с этим имеем

$$\tilde{\varepsilon}_{q,\omega ij} = \tilde{\varepsilon}_{0,\omega ij} - ie_{ijk} g_k. \quad (1.5.13)$$

Подставляя это соотношение в (1.5.3), приходим к выражению

$$\mathbf{D}_{q,\omega} = \tilde{\varepsilon}_\omega \cdot \mathbf{E}_{q,\omega} + i\mathbf{g} \times \mathbf{E}_{q,\omega}, \quad (1.5.14)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_\omega = \tilde{\varepsilon}_{0,\omega}$ .

В частности, для изотропной среды тензор  $\tilde{\varepsilon}_\omega$  диагонален и  $\mathbf{g} = g \hat{\mathbf{s}}$ , т. е. вектор гирации параллелен направлению распространения волны. Из соотношения (1.5.14) сразу следует, что, поскольку  $\mathbf{D}_{q,\omega} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0$  (*поперечные волны*), должно выполняться и условие  $\mathbf{E}_{q,\omega} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0$ . Используя его в уравнении (1.5.4) и выбирая направление распространения вдоль оси  $z$ , получаем следующее решение [1]:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= E_0 e^{ikz - i\omega t} \cos \chi z, \\ \hat{E}_y(z, t) &= E_0 e^{ikz - i\omega t} \sin \chi z, \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

где  $k = (\frac{1}{2})k_0(n_+ - n_-)$ ,  $\chi = (\frac{1}{2})k_0(n_+ + n_-)$ , а  $n_+$  и  $n_-$  можно получить из уравнения

$$n_\pm^2 = n_0^2 \pm gn_0. \quad (1.5.16)$$

Здесь  $n_0$  — показатель преломления изотропной среды, не имеющей пространственной дисперсии. Говорят, что материалы, у которых  $g \neq 0$ , обладают *естественной оптической активностью*.

Из выражений (1.5.15) следует, что после прохождения волной расстояния  $L$  в среде отношение  $\hat{E}_y/\hat{E}_x = \text{tg}(\chi L)$  по-прежнему является вещественным, т. е. поле линейно поляризовано, но направление поляризации меняется. Именно это явление открыли в 1811 г. Араго в кристаллах кварца и в 1815 г. Био в жидкостях (таких, как скипидар и

водные растворы винной кислоты). В 1810 г. Френель объяснил оптическую активность *циркулярным двойным лучепреломлением*, т. е. различием в среде скоростей распространения лево- и правополяризованных по кругу волн. Позднее, в 1848 г. Пастер связал это понятие с *энантиоморфизмом* (существованием зеркальных разновидностей молекул), положив таким образом начало новой области химии, называемой теперь *стереохимией*.

## 1.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

*Мгновенный вектор Пойнтинга* определяется как

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (1.6.1)$$

Применяя оператор  $\nabla \cdot$  к обеим частям этого равенства, используя векторное тождество (А.9), а также уравнения Максвелла (1.1.1) и (1.1.2), сразу получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.6.2)$$

Интегрируя обе части этого уравнения по произвольному объему  $V$  и с помощью теоремы Гаусса преобразуя интеграл в левой части к интегралу по окружающей объем поверхности  $\partial V$ , получаем

$$-\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \left( \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) dV. \quad (1.6.3)$$

Здесь  $\hat{n}$  — единичный вектор внешней нормали. Используя уравнения (1.1.6) и (1.2.1), приходим к следующему интегральному соотношению:

$$-\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial t} w_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \right) dV, \quad (1.6.4)$$

где

$$w_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}. \quad (1.6.5)$$

Уравнение (1.6.4) можно интерпретировать как *закон сохранения энергии* электромагнитного поля. При этом взятый с обратным знаком поток вектора Пойнтинга представляет собой полную энергию, втекающую в объем  $V$  за единицу времени;  $w_0$  — плотность запасенной в вакууме электромагнитной энергии;  $-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  — мощность, передаваемая от источников поля (при  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} < 0$ ) [или от поля источникам (при  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} > 0$ )] в единице объема. И наконец,  $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{P} / \partial t)$  — изменение в единице объема за единицу времени внутренней энергии электрических диполей за счет работы поля.

### 1.6.1. Соотношения Пойнтинга для квазимонохроматического пучка в среде с пространственной дисперсией

В случае когда среда обладает пространственной и частотной дисперсией, член  $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t)$  нельзя интерпретировать как производную по времени от плотности энергии. Действительно, эта величина по своему должна определяться локальным мгновенным значением поля. Однако если рассматривать линейную среду и квазимонохроматический свет с пространственным распределением, аналогичным плоской волне, то первые два члена в правой части уравнения (1.6.2) можно преобразовать к сумме двух вкладов, представляющих обратимый и необратимый переход энергии в среду (или из среды). Покажем это на примере узкого пучка, направленного вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , который в общем случае является комплексным. Этот узкий пучок можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \text{Re} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6.6)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  удовлетворяют дисперсионному уравнению (1.5.8), а

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathbf{E}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}', \omega + \omega'} e^{i\omega' t - i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.6.7)$$

Будем считать, что  $\mathbf{E}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}', \omega + \omega'}$  существенно отлично от нуля, когда  $\omega'$  и вещественный вектор  $\mathbf{q}'$  достаточно малы (*пучок лучей*). При этом электрическую индукцию можно записать в том же виде, что и (1.6.6), а именно

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \text{Re} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}', \omega + \omega'} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}', \omega + \omega'} e^{i\omega' t - i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} \cong \\ &\cong \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \left[ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} + \mathbf{q}' \cdot (\nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega}) + \omega' \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} \right) \right] \cdot \\ &\cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}', \omega + \omega'} e^{i\omega' t - i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

что эквивалентно выражению

$$\mathcal{D} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} \mathcal{E} + i(\nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega}) \cdot \nabla \mathcal{E} - i \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} \right) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}. \quad (1.6.10)$$

Предположим теперь, что мы провели усреднение по времени (обозначим его как  $\langle \dots \rangle_t$ ) за период, много больший, чем  $2\pi/\omega$ . Тогда можно написать следующее приближенное выражение (см. разд. 1.8):

$$\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \hat{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{D}}^* \right). \quad (1.6.11)$$

Однако в соответствии с выражениями (1.6.8) и (1.6.10) мы имеем

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial t} \cong e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[ i\omega \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} : \mathcal{E} - \omega (\nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}, \omega}) : \nabla \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}, \omega}) \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right], \quad (1.6.12)$$

так что, используя обозначение  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}, \omega} = \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega} - i\boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega}$ , где обе диады  $\boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega}$  эрмитовы, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \hat{\mathbf{E}}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) &= \omega \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega} : \mathcal{E} \mathcal{E}^* - \left( \frac{\omega}{2} \right) (\nabla_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega}) : \nabla (\mathcal{E} \mathcal{E}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial (\omega \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega})}{\partial \omega} : \frac{\partial (\mathcal{E} \mathcal{E}^*)}{\partial t} + \\ &+ \frac{i\omega}{2} \left\{ (\nabla_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega}) : ((\nabla \mathcal{E}) \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \nabla \mathcal{E}^*) \right\} - \\ &- \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega}) : \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} \right) \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t} \right), \quad (1.6.13) \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle w \rangle_t + \frac{1}{2} \omega \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega} : \mathcal{E} \mathcal{E}^* + \left( \frac{i\omega}{2} \right) \left\{ \nabla_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega} : ((\nabla \mathcal{E}) \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \nabla \mathcal{E}^*) - \right. \\ \left. - \frac{\partial (\omega \boldsymbol{\varepsilon}''_{\mathbf{k}, \omega})}{\partial \omega} : \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} \right) \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t} \right) \right\} = \\ = -\nabla \cdot (\mathbf{S}^{(0)} + \mathbf{S}^{(1)}) - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle_t, \quad (1.6.14) \end{aligned}$$

$$\langle w \rangle_t = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega}) : \mathcal{E} \mathcal{E}^* + \frac{1}{4} \mu_0 |\mathcal{H}|^2, \quad (1.6.15)$$

$$\mathbf{S}^{(0)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}^*), \quad (1.6.16)$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = -\frac{\omega}{4} \nabla_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathbf{k}, \omega} : \mathcal{E} \mathcal{E}^*. \quad (1.6.17)$$

Для рассматриваемого нами волнового пакета вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}^{(0)} + \mathbf{S}^{(1)}$  должен быть равен произведению плотности энергии  $\langle w \rangle_t$  на групповую скорость, т. е.

$$\mathbf{S}^{(0)} + \mathbf{S}^{(1)} = \langle w \rangle_t \mathbf{v}_g. \quad (1.6.18)$$



В частности, для анизотропной среды без пространственной дисперсии групповая скорость дается следующим выражением:

$$\mathbf{v}_g = \frac{2 \operatorname{Re}(\mathcal{E} \times \mathcal{H}^*)}{[\partial(\omega \varepsilon'_{\mathbf{k}, \omega})/\partial \omega] : \mathcal{E} \mathcal{E}^* + \mu_0 |\mathcal{H}|^2}. \quad (1.6.19)$$

## 1.7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Если однородная изотропная среда без дисперсии как целое движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = c\beta$  относительно системы отсчета  $F$ , то векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  связаны с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  материальными соотношениями Минковского [15]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{b} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{b} \times \mathbf{E}, \quad (1.7.1)$$

где  $\mathbf{A}$  — диада, определяемая как

$$\mathbf{A} = a(\mathbf{I} - \mathbf{V}) + \mathbf{V}, \quad (1.7.2)$$

$\mathbf{I}$  — единичная диада,  $\mathbf{V} = \hat{v}\hat{v}$ , а

$$a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n\beta^2}, \quad \mathbf{b} = b\hat{v} = \frac{\beta}{c} \frac{n^2 - 1}{1 - n^2\beta^2} \hat{v}. \quad (1.7.3)$$

Вместо того чтобы рассматривать реальное электромагнитное поле, описываемое сложными материальными соотношениями (1.7.1), можно ввести фиктивные поля  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ , порожденные источниками  $\rho'$  и  $\mathbf{J}'$  в области пространства, характеризуемой координатой  $\mathbf{r}'$ . Связь с реальными физическими величинами устанавливается следующими соотношениями [16]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^{1/2} \cdot \mathbf{r}', \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{T}{a} \rho'(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{T}{a} \mathbf{A}^{1/2} \cdot \mathbf{J}'(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = T \mathbf{A}^{-1/2} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = T \mathbf{A}^{-1/2} \cdot \mathbf{H}'(\mathbf{r}'), \quad (1.7.4)$$

где  $T$  — линейный оператор  $\exp(b\hat{v} \cdot \mathbf{r}' \partial/\partial t)$ , переводящий всякую функцию  $f(\mathbf{r}', t)$  в  $f(\mathbf{r}', t + b\hat{v} \cdot \mathbf{r}')$ . При  $a > 0$  пространство, описываемое координатой  $\mathbf{r}'$ , соответствует физическому пространству, у которого перпендикулярные вектору  $\hat{v}$  координаты сжаты в  $1/\sqrt{a}$  раз. При  $a < 0$  координаты пространства  $\{\mathbf{r}'\}$  комплексные, поэтому требуется определенная осторожность при рассмотрении соответствующих полей  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ . Можно показать [16], что эти поля удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon a} (\rho' + \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}'),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \varepsilon a \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}', \quad (1.7.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\mu a \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}'.$$

Следовательно, поля  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  можно рассматривать как решения уравнений Максвелла в неподвижной среде, характеризуемой диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon a$  и  $\mu a$  соответственно, в то время как плотность заряда оказывается равной  $\rho' + \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}'$ .

В отсутствие источников уравнения (1.7.5) имеют решения в виде набора плоских волн

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}'_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}, \quad (1.7.6)$$

причем  $\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{k}' = 0$  и  $k' = \omega a \sqrt{\varepsilon \mu}$ , так что истинное поле  $\mathbf{E}$  запишется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{-1/2} \cdot \mathbf{E}'_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.7.7)$$

где

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}^{-1/2} \cdot \mathbf{k}' - \omega b \hat{\mathbf{v}}. \quad (1.7.8)$$

В частности, если  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\hat{\mathbf{v}}$ , то величина вектора  $\mathbf{k}$  дается выражением [17]

$$k = k_0 \frac{[1 + \gamma^2(n^2 - 1)(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)]^{1/2} - \beta \gamma^2(n^2 - 1) \cos \theta}{1 - \gamma^2(n^2 - 1)\beta^2 \cos^2 \theta} \equiv \frac{\omega}{v_\Phi}, \quad (1.7.9)$$

где  $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ . В случае  $\beta \ll 1$  выражение (1.7.9) принимает простой вид

$$k = k_0 [n - (n^2 - 1)\beta \cos \theta]. \quad (1.7.10)$$

Строго говоря, это выражение справедливо лишь в том случае, когда среда движется с одной и той же скоростью во всем пространстве. Однако это требование можно существенно ослабить и ограничиться лишь условием постоянства скорости на размерах порядка нескольких длин волн [18], и, следовательно, выражение (1.7.10) можно также использовать для вращающейся среды. В самом общем случае фазовая скорость  $v_\Phi$  в движущейся и неподвижной среде различается на величину, пропорциональную проекции  $\mathbf{v}$  на направление распространения, т. е.

$$v_\Phi = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}}. \quad (1.7.11)$$

Это известная формула Френеля, экспериментально проверенная Физо. Множитель  $1 - 1/n^2$  называют *френелевским коэффициентом увеличения*.

## 1.8. СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Развитая в предыдущих разделах теория была основана главным образом на детерминистическом описании электромагнитного поля, т. е. предполагалось, что поле имеет вполне определенное значение даже при конечной ширине частотной полосы излучения (что можно приписать амплитудной или фазовой модуляции). На самом же деле всегда есть некоторая статистическая неопределенность, связанная с любым электромагнитным полем (это касается даже излучения лучших стабилизированных по амплитуде одномодовых лазеров). Эту неопределенность можно учесть, пользуясь методами статистической теории, т. е. определив подходящим образом средние (по времени или ансамблю) от ненаблюдаемых в эксперименте величин. Именно эта программа — определение средних и нахождение их связи с наблюдаемыми — и является содержанием *теории когерентности* электромагнитного излучения. Почти всюду в этой книге мы будем иметь дело с детерминированными полями (за исключением задач, связанных с некогерентным изображением; см. разд. 4.15). Однако читателя необходимо ознакомить с некоторыми основными элементами теории когерентности, чтобы понять, каким образом по одной определенной реализации поля можно вычислить его значимые статистические средние.

Прежде всего введем понятие *аналитического сигнала*  $\hat{f}(t)$  для данной зависящей от времени величины  $f(t)$  [11]. Это понятие оказывается весьма полезным для рассматриваемой теории. Если *вещественный сигнал*  $f(t)$  допускает фурье-разложение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.8.1)$$

то аналитический сигнал  $\hat{f}(t)$  определяется соотношением

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.8.2)$$

откуда сразу следует, что  $f(t) = \text{Re} \hat{f}(t)$ . Если сигнал монохроматический, т. е.  $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \Phi)$ , то имеем выражение

$$\hat{f}(t) = f_0 e^{i\Phi + i\omega t} \quad (\omega > 0), \quad (1.8.3)$$

которое называют также *комплексным представлением*.

Практическая важность аналитического сигнала связана со способом измерения *мгновенной интенсивности оптического сигнала* быстрым детектором. Действительно, рассмотрим реальный детектор, имеющий время отклика  $T_d$ , малое по сравнению с обратной ши-

риной полосы поля  $\delta\omega$ , но большое по отношению к обратной средней частоте  $\omega_0$ . В этом случае отклик оказывается пропорциональным следующей величине [19]:

$$I(t) = \frac{1}{T_d} \int_{t-T_d/2}^{t+T_d/2} E^2(t') dt', \quad (1.8.4)$$

причем выполнение условий

$$1/\omega_0 \ll T_d \ll 1/\delta\omega \quad (1.8.5)$$

оправдывает то, что записанный выше интеграл называют мгновенной интенсивностью. Запишем теперь выражение

$$E(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left( e^{i\omega_0 t} \int_0^\infty E_\omega e^{i(\omega - \omega_0)t} d\omega \right) = \operatorname{Re} [e^{i\omega_0 t} \mathcal{E}(t)], \quad (1.8.6)$$

где, как можно предполагать, величина  $\mathcal{E}(t) = e^{-i\omega_0 t} \hat{E}(t)$  изменяется медленно на временном интервале  $T_d$ . Тогда получаем, что с достаточной степенью точности мгновенная интенсивность равна квадрату модуля аналитического сигнала:

$$I(t) = |\hat{E}(t)|^2 = |\mathcal{E}|^2. \quad (1.8.7)$$

Точно так же можно показать, что поток мгновенного вектора Пойнтинга (см. разд. 1.6), усредненный по нескольким периодам электромагнитного поля, удобнее всего выразить как поток вещественной части *комплексного вектора Пойнтинга*

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*. \quad (1.8.8)$$

Модуль вектора Пойнтинга одиночной плоской волны можно определить как

$$|\tilde{\mathbf{S}}| = \frac{1}{2} |\tilde{\varepsilon}/\mu_0|^{1/2} |\hat{\mathbf{E}}|^2 = \frac{1}{2} \tilde{n} \zeta_0^{-1} I. \quad (1.8.9)$$

Таким образом, в этом случае модуль вектора Пойнтинга пропорционален мгновенной интенсивности  $I$  (о сравнении величин  $|\tilde{\mathbf{S}}|$  и  $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*$  см., например, работу [19]). Коэффициент пропорциональности в (1.8.9) равен произведению обратного волнового сопротивления вакуума  $\zeta_0$  и показателя преломления  $\tilde{n}$ . Вообще говоря, мгновенная интенсивность оптического сигнала имеет флуктуационный характер, т. е.  $I(t)$  является отдельной реализацией статистического ансамбля. В соответствии с этим полное описание требует в принципе определения иерархии средних по ансамблю следующего вида:

$$\langle I(t) \rangle, \langle I^2(t) \rangle, \dots, \langle I^n(t) \rangle \quad (1.8.10)$$

и

$$\langle I(t)I(t') \rangle, \dots, \langle I(t_1) \cdots I(t_n) \rangle. \quad (1.8.11)$$

В стационарных случаях усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по интервалу времени, который больше по сравнению с  $1/\delta\omega$ .

Заметим, что до появления лазеров (в начале 1960-х годов) об определении средних и высших порядков особенно не задумывались, так как не существовало источников излучения, *время когерентности* которых  $T_c = 2\pi/\delta\omega$  было бы больше, чем время отклика имеющихся детекторов  $T_d$ . Действительно, как видно из выражения (1.8.4), если  $T_d \gg T_c$ , то для всех практических применений интенсивность  $I(t)$  становится детерминированной величиной, а все средние факторизуются, т. е. их можно представить в виде произведения средних низшего порядка.

Если же теперь рассмотреть более общие случаи, когда происходит интерференция двух или более пучков (например, в экспериментах Юнга и Майкельсона; рис. 1.12), то естественно определить корреляционную функцию [20], известную также как *функция взаимной когерентности* (см. разд. 4.15):

$$G^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \hat{E}^*(\mathbf{r}, t) \hat{E}(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (1.8.12)$$

Эта функция так же, как и средние высокого порядка, а именно

$$\begin{aligned} G^{(n,m)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_n, t_n, \dots, \mathbf{r}_{n+m}, t_{n+m}) = \\ = \langle \hat{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{E}^*(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{E}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \cdots \hat{E}(\mathbf{r}_{n+m}, t_{n+m}) \rangle, \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

определяет вклад интерференционного члена в сигнал, регистрируемый детектором.

С аналитической точки зрения введенное выше статистическое описание полностью характеризует стохастическое электромагнитное поле. На практике средние электромагнитного поля порядка  $n + m$  (выше второго) связаны либо с интерференционными экспериментами высшего порядка (как в звездном интерферометре Хэнбери — Брауна и Твисса), либо с экспериментами по счету фотонов [21].

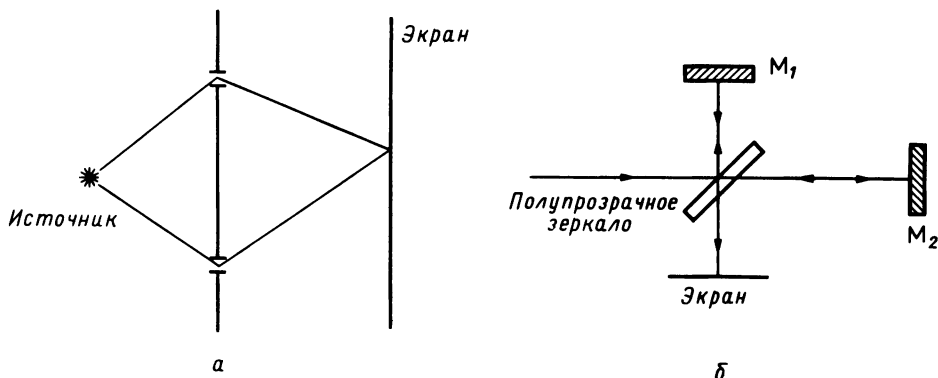


Рис. 1.12. Схемы интерферометров Юнга (а) и Майкельсона (б).  $M_1$  и  $M_2$  — зеркала.

## ЗАДАЧИ

### Раздел 1.1.

1. Покажите, что для однородной стационарной среды фурье-образы потенциалов  $\mathbf{A}_{\mathbf{q}, \omega}$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}, \omega}$  удовлетворяют соотношению

$$(q^2 \mathbf{1} - \mathbf{q}\mathbf{q} - \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{q}, \omega} + \omega \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q} \Phi_{\mathbf{q}, \omega} = \mu_0 \mathbf{J}_{\mathbf{q}, \omega}.$$

2. Покажите, что пространственно-временное преобразование Фурье скалярного потенциала  $\Phi$  в кулоновской калибровке [см. выражение (1.1.20а)] связано с  $\rho_{\mathbf{q}, \omega}$  соотношением

$$\Phi_{\mathbf{q}, \omega} = \rho_{\mathbf{q}, \omega} / \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} \cdot \mathbf{q}.$$

3. Покажите, что в анизотропной среде функция  $G_{\mathbf{C}}(\mathbf{r}, \omega)$  [см. выражение (1.1.22)] записывается в виде

$$G_{\mathbf{C}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 / (\bar{\varepsilon}_1 x^2 + \bar{\varepsilon}_2 y^2 + \bar{\varepsilon}_3 z^2)^{1/2},$$

где  $\bar{\varepsilon}_{1,2,3}$  — компоненты диэлектрического тензора относительно главных осей (см. разд. 1.4).

4. Покажите, что пространственно-временное преобразование Фурье функции Грина в диадном представлении в анизотропной среде имеет вид

$$\Gamma_{\mathbf{q}, \omega} = (\omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} + \mathbf{q}\mathbf{q} - q^2)^{-1} = \mathbf{A}' / D(\mathbf{q}, \omega),$$

где компоненты тензора  $\mathbf{A}'$  являются алгебраическими дополнениями тензора  $\mathbf{A} = \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}, \omega} + \mathbf{q}\mathbf{q} - q^2 \mathbf{1}$ , а  $D(\mathbf{q}, \omega) = \det \mathbf{A}$  [см. выражение (1.5.9)].

5. Покажите, что для однородной и изотропной среды функция Грина в диадном представлении дается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}}{k^2} \right) \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 - q^2} d^3 q = \\ &= \left( \mathbf{1} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 - q^2} d^3 q = \left( \mathbf{1} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

где  $G(\mathbf{r})$  — скалярная функция Грина.

6. Используя интегральное фурье-представление скалярной функции Грина из предыдущей задачи, покажите, что

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 - q^2} d^3 q = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

7. Используя асимптотическое выражение для величины  $\Gamma$

$$\Gamma(\mathbf{r}) \sim (\mathbf{1} - \hat{r}\hat{r})G(\mathbf{r}),$$

покажите, что поле в дальней от источников области равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim -i\omega \mu_0 G(\mathbf{r}) \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{i\hat{n} \cdot \mathbf{r}'} dV',$$

где  $\hat{n}$  — единичный вектор, параллельный вектору  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

8. Рассмотрим временное преобразование Фурье ( $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ) полей, излучаемых двумя монохроматическими источниками

$$\hat{\mathbf{J}}_1(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{J}}_1(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_2(\mathbf{r})e^{i\omega t}.$$

Используя уравнения Максвелла и векторное тождество (А.9), докажите следующее соотношение, справедливое для анизотропной среды:

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dV = & \oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \\ & + i\omega \iiint_V E_{1i} E_{2j} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) dV. \end{aligned}$$

Покажите, что в частном случае, когда  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  и объем ограничен металлической поверхностью, имеет место следующее соотношение:

$$\iiint_V \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dV = \iiint_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV,$$

которое называют *теоремой взаимности*.

### Раздел 1.2.

9. Покажите, что  $n(\omega)$  и  $\kappa(\omega)$  связаны следующими соотношениями Крамерса — Кронига:

$$n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \kappa(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad \kappa(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{n(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'.$$

Для этого используйте свойство  $\tilde{n}^*(\omega) = \tilde{n}(-\omega)$  и преобразуйте контуры интегрирования к положительным осям. Кроме того, запишите диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_0 [\delta_{ij} - i\sigma_{ij}(\omega)/(\omega\varepsilon_0)]$$

и выведите следующие соотношения Крамерса — Кронига:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} \operatorname{Re} \sigma_{ij} &= -\frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \sigma_{ij}}{\omega'^2 - \omega^2} \frac{1}{\omega'} d\omega', \\ \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \sigma_{ij} &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \sigma_{ij}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned}$$

10. Вычислите восприимчивость  $\chi_\omega$  ансамбля двухуровневых систем, используя формулы (1.2.57) и считая, что частоты перехода  $\omega_0 + \delta$  имеют гауссово распределение:

$$\chi(\omega) \propto -\frac{-if}{\pi^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\delta^2/2\sigma^2}}{\gamma_{ab} + i(\omega - \omega_0 - \delta)} d\delta.$$

11. Покажите, что при  $\sigma \gg \gamma_{ab}$  мнимая часть  $\chi''$  рассмотренной в предыдущей задаче восприимчивости записывается в виде

$$\chi'' \propto (f/\sigma) \pi^{1/2} e^{-(\omega - \omega_0)^2/2\sigma^2}.$$

Затем, воспользовавшись соотношениями Крамера — Кронига из задачи 8, найдите  $\chi'$ :

$$\chi' = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

и покажите, что  $\chi'$  можно выразить через интеграл Даусона [см. выражение (7.19.9)].

#### Раздел 1.4.

12. Нормальные моды анизотропной среды характеризуются показателем преломления  $\tilde{n}$ , определяемым выражением

$$\mathbf{q} = (\omega/c)\tilde{n}(\omega, \mathbf{q})\hat{\mathbf{s}},$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  связаны дисперсионным уравнением (1.5.8). Покажите, что  $\tilde{n}$  удовлетворяет уравнению Френеля

$$\varepsilon_0^2 \tilde{n}^4 \varepsilon_{ij} s_i s_j - \tilde{n}^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij} s_i s_j \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ij} s_i s_j) + \det \varepsilon_{\mathbf{q}, \omega} = 0.$$

13. Покажите, что в одноосном кристалле показатель преломления необыкновенной волны дается выражением

$$\tilde{n}_e(\theta) = (\cos^2 \theta / n_0^2 + \sin^2 \theta / n_e^2)^{-1/2}$$

(см. определение одноосного кристалла в задаче 15).

14. Если величины  $\tilde{n}$  откладывать из начала координат в направлении  $\hat{\mathbf{s}}$ , то полученная двулистная поверхность называется *поверхностью волновых векторов*. Один ее лист соответствует  $\tilde{n}_1$ , второй —  $\tilde{n}_2$ . Используя второе уравнение из задачи 12, покажите, что пересечение поверхности волновых векторов с плоскостью, перпендикулярной главной (направленной, скажем, вдоль оси  $z$ ), определяется точками

$$\tilde{n}_1 = (\bar{\varepsilon}_z / \varepsilon_0)^{1/2}, \quad \tilde{n}_2 = [\bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y / \varepsilon_0 (\bar{\varepsilon}_x s_x^2 + \bar{\varepsilon}_y s_y^2)]^{1/2}.$$

15. Те направления в кристаллах, для которых  $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2$ , называются *оптическими осями*. Используя второе уравнение из задачи 12, покажите, что в кристаллах может быть не более двух таких направлений (*двухосные кристаллы*). Если же они совпадают, то кристаллы называют *одноосными*. В частности, для случая  $\bar{\varepsilon}_z > \bar{\varepsilon}_y > \bar{\varepsilon}_x$  покажите, что две оптические оси лежат в плоскости  $xz$  (рис. 1.13) и образуют с осью  $z$  угол  $\eta$  такой, что

$$\operatorname{tg} \eta = [\bar{\varepsilon}_z (\bar{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}_x) / \bar{\varepsilon}_x (\bar{\varepsilon}_z - \bar{\varepsilon}_y)]^{1/2}.$$

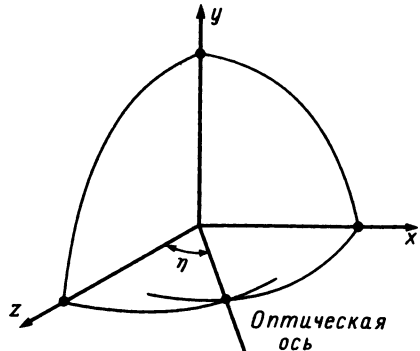


Рис. 1.13. Поверхность волновых векторов для двухосного кристалла.



16. Докажите, что для одноосного кристалла поверхность волновых векторов состоит из сферы (обыкновенный луч) и эллипсоида (необыкновенный луч). При  $n_e > n_o$  сфера лежит внутри эллипсоида и кристалл называется *положительным одноосным*. Если  $n_o > n_e$ , то кристалл называют *отрицательным одноосным*.

*Раздел 1.5.*

17. Исследуйте распространение нормальных мод через плазму, находящуюся в магнитном поле, тензор диэлектрических проницаемостей которой записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{xx} &= \tilde{\epsilon}_{yy} = \epsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu)}{\omega[(\omega - i\nu)^2 - \omega_g^2]} \right\}, \\ \tilde{\epsilon}_{xy} &= -\tilde{\epsilon}_{yx} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega + \omega_g - i\nu)(\omega - \omega_g - i\nu)}, \\ \tilde{\epsilon}_{zz} &= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\nu} \right),\end{aligned}$$

а остальные его компоненты равны нулю. Здесь  $\omega_g = (e/m)B_0$  — *гирочастота* электронов,  $B_0$  — внешнее поле, приложенное вдоль оси  $z$ , а  $\omega_p$  и  $\nu$  — соответственно плазменная частота и частота столкновений.

18. Рассмотрите распространение волн через полярный кристалл, характеризующийся скалярной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) \left( 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right) \equiv \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega),$$

где  $\epsilon_b(\omega)$  — вклад от электронной поляризуемости атомов,  $\omega_T$  — *поперечная резонансная частота* ансамбля осцилляторов,  $\Omega^2 = Ne^2/[m_{\text{эфф}}\epsilon_b(\omega)]$ ,  $N$  — плотность ионов, дающих вклад в поляризуемость,  $m_{\text{эфф}}$  — характеристическая масса, а постоянная  $\gamma$  учитывает затухание. Частота, при которой  $\epsilon'(\omega) = 0$ , называется *продольной резонансной частотой*; частоты  $\omega_L$  и  $\omega_T$  связаны с  $\epsilon_S = \epsilon(0)$  и  $\epsilon_\infty = \epsilon(\infty)$  соотношением *Лиддана — Сакса — Теллера*  $\omega_L^2/\omega_T^2 = \epsilon_S/\epsilon_\infty$ .

19. Рассмотрите гиротропную среду, диэлектрический тензор которой

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Найдите нормальные моды и покажите, что те из них, которые распространяются вдоль оси  $z$ , имеют круговую поляризацию.

20. Волновой пакет распространяется с групповой скоростью  $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial k_x, \partial\omega/\partial k_y, \partial\omega/\partial k_z$ . Покажите, что  $\mathbf{v}_g$  можно записать через дисперсионную функцию  $D(\mathbf{q}, \omega)$  с помощью соотношения

$$\mathbf{v}_g = - \left( \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} D.$$

В частности, покажите, что для одноосного кристалла без дисперсии групповая ско-

рость необыкновенного луча равна

$$v_g = (\bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_3 \mu_0)^{-1/2} (\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{q}\mathbf{q})^{-1/2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q}$$

и образует с вектором  $\mathbf{q}$  угол  $\delta$ :

$$\delta = \arctg \frac{(n_e^2 - n_0^2) \sin \theta \cos \theta}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_0^2 \sin^2 \theta},$$

где  $\theta$  — угол, образуемый вектором  $\mathbf{q}$  и оптической осью.

21. Покажите, что в случае анизотропного кристалла дисперсионная функция  $D(\mathbf{q}, \omega)$  имеет вид

$$D(\mathbf{q}, \omega) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_{ij} s_i s_j (q^2 - k_0^2 \tilde{n}_1^2)(q^2 - k_0^2 \tilde{n}_2^2),$$

где  $\tilde{n}_1$  и  $\tilde{n}_2$  — показатели преломления для нормальных мод, распространяющихся вдоль направления  $\mathbf{s}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1982.
2. Van Kranendonk J., Sipe J. E., Prog. Opt., **15**, 245—350 (1977).
3. Mandel L., Wolf E. Opt. Commun., **8**, 95 (1973).
4. Owyyoung A., Ph.D. Thesis, California Inst. Technol., Pasadena, 1971 (Clearing House Fed. Sci. Tech. Inf. Rep. AFOSR-TR-71-3132).
5. Shen Y. R., Principles of Nonlinear Optics, Wiley, New York, 1984.
6. Sargent M., Scully M. O., Lamb W. E., Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974.
7. Hopf F. A., Scully M. O., Phys. Rev., **179**, 399 (1969).
8. Yariv A., Quantum Electronics, 2nd ed., Wiley, New York, 1975. [Имеется перевод: Яриу А. Квантовая электроника. — М.: Сов. радио, 1980.]
9. Frantz L. M., Nodvik J. S., J. Appl. Phys., **34**, 2346 (1963).
10. McCall S. L., Hahn E. L., Phys. Rev., **183**, 457 (1969).
- 10a. Wooten F., Optical Properties of Solids, Academic Press, New York, 1972.
11. Born M., Wolf E., Principles of Optics, Pergamon, Oxford, 1970. [Имеется перевод: Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.]
12. van de Hulst H. C., Light Scattering by Small Particles, Wiley, New York, 1957. [Имеется перевод: Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961.]
13. Yariv A., Yeh P., Optical Waves in Crystals, Wiley, New York, 1983. [Имеется перевод: Яриу А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.]
14. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979.
15. Sommerfeld A., Electrodynamics, Academic Press, New York, 1952. [Имеется перевод: Зоммерфельд А. Электродинамика. — М.: ИЛ, 1958.]
16. Solimeno S., Alta Freq., **43**, 1005 (1974); J. Math. Phys., **16**, 218 (1975).
17. Papas C. H., Theory of Electromagnetic Wave Propagation, McGraw-Hill, New York, 1965.
18. Sensor D. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-16**, 565 (1968).
19. Marathay A. S., Elements of Optical Coherence Theory, Wiley, New York, 1982.
20. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965).

21. *Peřina J.*, Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena, Reidel Publ., Dordrecht, Netherlands, 1984. [Имеется перевод: *Перина Я.* Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. — М.: Мир, 1987.]

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Akhmanov S. A., Khokhlov R. V.*, Problems of Nonlinear Optics, Gordon and Breach, New York, 1972. См. также: *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: ВИНТИ, 1964.
- Allen L., Eberly J. H.*, Optical Resonances and Two-Level Atoms, Wiley, New York, 1975. [Имеется перевод: *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.]
- Bloembergen N.*, Nonlinear Optics, Benjamin-Cummings, Menlo Park, California, 1965. [Имеется перевод: *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.]
- Brewer R. G.*, Phys. Today, **30**, 50 (1977).
- Chow W. W., Gea-Banacloche J., Pedrotti L. M., Sanders V. E., Schleich W., Scully M. O.*, Rev. Mod. Phys., **57**, 61 (1985).
- Clarke D., Grainger J. F.*, Polarised Light and Optical Measurement, Pergamon, Oxford, 1971.
- Feynman R. P., Vernon F. L., Hellwarth R. W.*, J. Appl. Phys., **28**, 49 (1957).
- Haken H.*, Light, v. 1 and 2. North-Holland Publ., Amsterdam, 1981 and 1985.
- Hange P. S., Muller R. H., Smith C. G.*, Surf. Sci., **96**, 81 (1980).
- Hecht E., Zajac A.*, Optics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- Loudon R.*, The quantum Theory of Light, Oxford Univ. Press (Clarendon), London, New York, 1978. [Имеется перевод: *Лоудон Р.* Квантовая теория света. — М.: Мир, 1976.]
- Mo T. C.*, J. Math. Phys., **11**, 2589 (1970).
- Nussenzveig H. M.*, Causality and Dispersion Relations, Academic Press, New York, 1972.
- Pekar S. I.*, Cristal Optics and Additional Light Waves, Benjamin-Cummings, Menlo Park, California, 1983.
- Quantum Electronics (eds. H. Rabin, C. L. Tang), v. 1, Parts A and B, Academic Press, New York, 1975.
- Ramachandran G. N., Ramasehan S.* — In: Handbuch der Physik (ed. S. Flugge), v. 25, Part 1, Springer-Verlag, Berlin, 1961, p. 1—217.
- Toraldo di Francia G.*, Electromagnetic Waves, Wiley (Interscience), New York, 1955.
- Van Bladel J.*, Proc. IEEE, **64**, 301 (1976). [Имеется перевод: *ван Бладель Дж.* — ТИИЭР, 1972, т. 64, № 3, с. 14.]
- Whitham G. B.*, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, 1973.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### 2.1. ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В среде с однородным показателем преломления  $n(\omega)$  решениями уравнений Максвелла являются плоские волны, которые в комплексном представлении имеют вид  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-ik_0 n \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} + i\omega t)$ . В случае когда  $n$  зависит от  $\mathbf{r}$ , таких решений в виде плоских волн не существует (всюду, кроме специальных случаев, мы не будем явно указывать зависимость  $n$  от  $\omega$ ). Рассмотрим возможность описания поля в первом приближении «локальными» плоскими волнами вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp[-ik_0 S(\mathbf{r}) + i\omega t], \quad (2.1.1)$$

где  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  — медленно меняющаяся, а  $S(\mathbf{r})$  — произвольная функция координаты  $\mathbf{r}$ . Для однородной среды  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ ,  $S = n\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}$ . Подставляя выражение (2.1.1) в уравнения Максвелла, записанные для случая  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , и используя векторные тождества (А.7) и (А.8), сразу же получаем

$$\nabla S \times \mathbf{E}_0 - \zeta_0 \mathbf{H}_0 + (i/k_0) \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0, \quad (2.1.2a)$$

$$\nabla S \times \mathbf{H}_0 + (n^2/\zeta_0) \mathbf{E}_0 + (i/k_0) \nabla \times \mathbf{H}_0 = 0, \quad (2.1.2b)$$

$$\nabla S \cdot \mathbf{H}_0 + (i/k_0) \nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (2.1.2в)$$

$$\nabla S \cdot \mathbf{E}_0 + [i/(k_0 n^2) \nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}_0)] = 0, \quad (2.1.2г)$$

где  $\zeta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  ( $\approx 377$  Ом) — волновое сопротивление вакуума (вакуумный импеданс). В дальнейшем импеданс произвольной среды с показателем преломления  $n$  мы будем обозначать как  $\zeta = \zeta_0/n$ .

Если  $k_0 \rightarrow \infty$ , то в уравнениях (2.1.2) членами, в которые входит  $1/k_0$ , можно пренебречь, выбирая как  $\mathbf{E}_0$ , так и  $S$  не зависящими от  $k_0$ . Умножая затем векторно обе части уравнения (2.1.2a) на  $\nabla S$  и используя уравнения (2.1.2б) и (2.1.2г), а также тождество (А.2), имеем

$$\begin{aligned} \nabla S \times (\nabla S \times \mathbf{E}_0) + n^2 \mathbf{E}_0 &= \nabla S (\nabla S \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\nabla S)^2 + n^2 \mathbf{E}_0 = \\ &= [n^2 - (\nabla S)^2] \mathbf{E}_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Функция  $S(\mathbf{r})$ , называемая *эйконалом*, должна быть выбрана таким образом, чтобы удовлетворять *уравнению эйконала*

$$(\nabla S)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (2.1.4)$$

В уравнениях (2.1.2) при конечных значениях  $\omega$  пренебречь *a priori* членами с  $1/k_0$  нельзя, поскольку мы не можем заранее знать погрешность, связанную с таким приближением при выборе поля в виде (2.1.1). Обратимся поэтому к более строгому представлению поля в виде *асимптотического ряда*; этому вопросу мы и посвятим следующий раздел.

## 2.2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать такое приближенное решение волнового уравнения для произвольной компоненты электрического поля в комплексном представлении ( $u$ ), которое локально удовлетворяет соотношению, справедливому для плоских волн:

$$u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \sim A(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}}. \quad (2.2.1)$$

Это соотношение означает, что при произвольном смещении  $d\mathbf{r}$  фаза поля изменяется на величину  $-\mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  — локальный волновой вектор, зависящий от координаты  $\mathbf{r}$ . При этом решение имеет вид обобщенной плоской волны, направление и скорость которой изменяются по мере распространения, а комплексная амплитуда

$$A(\mathbf{r}) = |u(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (2.2.2)$$

слабо меняется на расстоянии порядка длины волны. Символ  $\sim$  мы будем использовать для обозначения *асимптотического равенства*:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - A(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}}] \sim 0, \quad (2.2.3)$$

так что функцию  $u$  можно заменить ее асимптотическим представлением лишь при  $k_0 \rightarrow \infty$ .

Наиболее общее асимптотическое решение для поля можно представить как суперпозицию всевозможных частных решений вида (2.2.1):

$$u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \sim \sum_n A_n(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_n \cdot d\mathbf{r}}. \quad (2.2.4)$$

Такое суммирование описывает случай, когда через данную точку  $\mathbf{r}$  проходят различные волны, возникающие при их отражении, прелом-

лении или дифракции на поверхностях разрыва и интерференции с исходной волной.

Применимость разложения (2.2.1) ограничена малой окрестностью точки  $\mathbf{r}$ . Размер такой окрестности зависит от самой точки  $\mathbf{r}$ , а в некоторых зонах (*каустиках*) он может обратиться в нуль. Очевидно, что при этом понятие локальных плоских волн и, в частности, выражение (2.2.1) теряют смысл. Другим предельным случаем является идеальная плоская волна, которая в любой точке пространства описывается выражением (2.2.1), причем знак асимптотического равенства заменяется в нем на точное равенство.

Для более строгого обоснования интуитивных предположений, приводящих к представлению (2.2.1), рассмотрим *асимптотический ряд Лунберга — Клейна* [1, 2]:

$$u(\mathbf{r}) \sim e^{-ik_0 S(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(-ik_0)^m}, \quad (2.2.5)$$

в котором знак  $\sim$  теперь означает, что для любого целого  $N$

$$u(\mathbf{r}) = e^{-ik_0 S(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^N \frac{A_m(\mathbf{r})}{(-ik_0)^m} + o(k_0^{-N}), \quad (2.2.6)$$

где  $o(k_0^{-N})$  — символ Ландау, обозначающий любую функцию, стремящуюся к нулю быстрее чем  $k_0^{-N}$ , в то время как

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = k_0 \nabla S. \quad (2.2.7)$$

Асимптотический ряд (2.2.5) называют также *представлением геометрической оптики*, поскольку эйконал  $S(\mathbf{r})$  (введенный Бернсом в 1895 г.) приводит к интуитивному понятию о луче (см. разд. 2.4). По сравнению с традиционной геометрической оптикой формула (2.2.5) дает более полное описание распространения электромагнитных волн. Мы покажем это в разд. 2.7 на конкретном примере, связанном с введением комплексного эйконала.

Для того чтобы найти  $S(\mathbf{r})$  и коэффициенты  $A_m$ , подставим разложение (2.2.6) в волновое уравнение [(1.1.12)]. При этом мы получим выражение

$$\sum_{m=0}^N \frac{Q_m(\mathbf{r})}{(-ik_0)^{m-2}} = o(k_0^{-N-2}), \quad (2.2.8a)$$

где

$$Q_0(\mathbf{r}) = (\nabla S)^2 - n^2(\mathbf{r}), \quad (2.2.8б)$$

$$Q_1(\mathbf{r}) = (\nabla^2 S + 2\nabla S \cdot \nabla) A_0, \quad (2.2.8в)$$

$$Q_m(\mathbf{r}) = (\nabla^2 S + 2\nabla S \cdot \nabla) A_{m-1} + \nabla^2 A_{m-2} \quad (m = 2, 3, 4, \dots). \quad (2.2.8г)$$

Уравнение (2.2.8a) справедливо при любых  $N$ , только если

$$Q_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2.9)$$

откуда и следует искомая система уравнений для  $S(\mathbf{r})$  и  $A_m$ .

*Пример: разложение функции Ханкеля  $H_0^{(2)}$ .* Смысл асимптотического разложения можно пояснить на конкретном примере. Рассмотрим поле, излучаемое в вакууме *линейным током*. Для этого случая известно точное решение:

$$u \propto H_0^{(2)}(k_0 \rho), \quad (2.2.10)$$

где  $\rho$  — расстояние от источника, а  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, асимптотическое разложение которой записывается в виде [4]

$$H_0^{(2)}(k_0 \rho) \sim [2/(\pi k_0 \rho)]^{1/2} e^{-i(k_0 \rho - \pi/4)}. \quad (2.2.11)$$

Чтобы улучшить точность асимптотического представления поля, функцию  $H_0^{(2)}$  можно разложить в асимптотический ряд, в котором главный член совпадает с правой частью выражения (2.2.11). Члены высшего порядка можно найти, используя (2.2.9). При этом мы получим следующее разложение:

$$H_0^{(2)}(k_0 \rho) \sim \left( \frac{2}{\pi k_0 \rho} \right)^{1/2} e^{-i(k_0 \rho - \pi/4)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(0, m)}{(-2ik_0 \rho)^m}, \quad (2.2.12)$$

где

$$(0, m) = [(2m)!/(2^m m!)]^2 / 2^{2m} m!. \quad (2.2.13)$$

Таким образом, этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с известным асимптотическим разложением функции Ханкеля.

Если ряд (2.2.5) сходится при больших  $k_0$ , то он представляет собой разложение в ряд Тейлора по волновому числу и является точным решением уравнения (1.1.12), так что использование асимптотического ряда не дает ничего нового. Однако в большинстве случаев асимптотические ряды расходятся, причем они имеют следующие свойства:

- 1) при ограничении ряда  $n$ -м членом ошибка оказывается не больше  $(n + 1)$ -го члена;
- 2) с увеличением номера члены ряда сначала убывают, а затем возрастают;
- 3) для данного  $k_0$  существует такой член ряда, суммирование до которого позволяет получить наилучшее приближение.

В соответствии с этим, в то время как бесконечное число членов ряда может привести к расходимости поля  $u$ , конечная частичная сумма может дать хорошее приближение. Поскольку ошибка имеет порядок

величины первого из отброшенных слагаемых, наилучшую точность дает сумма, полученная обрезанием ряда при таком значении  $N$ , при котором последующий член является минимальным. Удивительная особенность этих разложений состоит в их почти неожиданной применимости даже для не очень больших  $k_0$ .

Прежде чем двигаться дальше, заметим, что приведенное выше асимптотическое разложение поля (2.2.5) неоднозначно. Некоторые авторы считают более удобным разложение

$$u = e^{-ik_0\psi(\mathbf{r})}, \quad (2.2.14)$$

где

$$\psi(\mathbf{r}) \sim S(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} (-ik_0)^{-n-1} B_n(\mathbf{r}). \quad (2.2.15)$$

Определив основные понятия геометрической оптики, в следующих разделах мы используем их для описания распространения света в различных физических системах.

## 2.3. УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА

Нетрудно показать, что  $S$  и  $A_m$  можно получить, последовательно используя уравнения (2.2.9). В частности, соотношение  $Q_0(\mathbf{r}) = 0$ , которое в декартовых координатах имеет вид

$$(\partial S/\partial x)^2 + (\partial S/\partial y)^2 + (\partial S/\partial z)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (2.3.1)$$

называется *уравнением эйконала* или *уравнением Гамильтона — Якоби*. Поверхности, на которых эйконал  $S$  является постоянным, называют *волновыми фронтами*. Если эйконал  $S$  задан на произвольной поверхности  $\Sigma$ , то его значения на близкой поверхности  $\Sigma'$  можно получить, используя соотношение (рис. 2.1)

$$\partial S/\partial \tau = [n^2(\mathbf{r}) - (\partial S/\partial \sigma)^2]^{1/2}, \quad (2.3.2)$$

где  $\partial/\partial \tau$  и  $\partial/\partial \sigma$  — соответственно нормальная и тангенциальная по отношению к  $\Sigma$  производные (разумеется,  $\partial S/\partial \sigma = 0$ , если  $\Sigma$  является волновым фронтом). Таким образом, если  $S$  (а следовательно, и ее производная  $\partial S/\partial \sigma$ ) заданы на некоторой поверхности  $\Sigma$ , то можно вычислить (с точностью до знака) и изменение  $S$  при переходе к  $\Sigma'$ . Следовательно, для решения уравнения (2.3.1) достаточно знать значения функции  $S$  на некоторой поверхности и направление ее возрастания.

Рассмотрим среду без дисперсии (показатель преломления не зависит от  $\omega$ ) и определим функцию  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}) - ct. \quad (2.3.3)$$



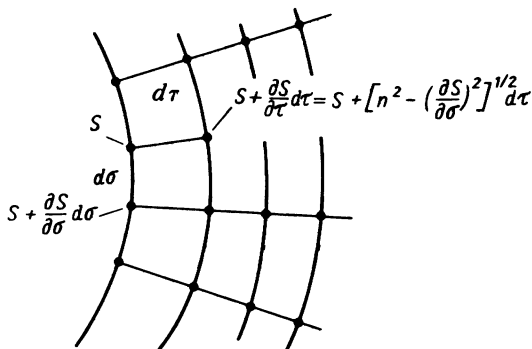


Рис. 2.1. Сетка точек, используемая для интегрирования уравнения эйконала методом конечных разностей.

Из (2.3.1) следует, что  $\Phi$  является решением уравнения

$$(\nabla\Phi)^2 - (n^2(\mathbf{r})/c^2)(\partial\Phi/\partial t)^2 = 0. \quad (2.3.4)$$

Если вспомнить, что *характеристическое уравнение* дифференциального уравнения в частных производных второго порядка [5] получается при замене вторых производных произведением соответствующих первых производных, то сразу видно, что уравнение (2.3.4) является характеристическим для зависящего от времени волнового уравнения

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - (n^2(\mathbf{r})/c^2)(\partial^2 u(\mathbf{r}, t)/\partial t^2) = 0. \quad (2.3.5)$$

Поскольку функция  $\Phi$  постоянна на поверхностях разрыва поля  $u(\mathbf{r}, t)$ , с помощью  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  можно изучать эволюцию фронтов разрыва (например, тех, на которых поле резко обрывается до нуля). Если  $\Phi = 0$  на некотором фронте разрыва, то положение этого фронта в момент времени  $t$  равно [см. (2.3.3)]  $S(\mathbf{r}) = ct$ .

Приведенные выше рассуждения дают физическую интерпретацию понятия эйконала и показывают, какую роль он играет в соответствующих расчетах. Теперь полезно определить условие, при выполнении которого некоторое семейство поверхностей

$$F(\mathbf{r}, \tilde{c}) = 0 \quad (2.3.6)$$

представляет собой множество волновых фронтов для данного распределения показателя преломления  $n(r)$ . Здесь  $\tilde{c}$  — непрерывный параметр, каждое значение которого связано с определенной поверхностью. Таким образом, дифференцируя (2.3.6), получаем следующее уравнение:

$$\nabla F \cdot d\mathbf{r} + (\partial F/\partial \tilde{c})d\tilde{c} = 0, \quad (2.3.7)$$

где  $\nabla$  обозначает градиент по переменным  $x, y, z$ . Для малого смещения  $d\mathbf{r}$ , перпендикулярного поверхности, проходящей через точку  $\mathbf{r}$  (т. е.  $d\mathbf{r} \parallel \nabla F$ ), с помощью уравнения (2.3.2) получаем

$$d\mathbf{r} = (\nabla F / |\nabla F|) [dS / n(\mathbf{r})]. \quad (2.3.8)$$

Подставляя дифференциал (2.3.8) в уравнение (2.3.7), можно написать

$$dS / d\tilde{c} = -n(\mathbf{r})(\partial F / \partial \tilde{c}) / |\nabla F|. \quad (2.3.9)$$

Таким образом, поскольку  $S$  зависит только от  $\tilde{c}$ , выражение в правой части этого уравнения также должно быть функцией только величины  $\tilde{c}$ . Иными словами, уравнение (2.3.6) описывает семейство волновых фронтов только в том случае, когда правая часть выражения (2.3.9) сохраняется постоянной на каждой поверхности этого семейства.

## 2.4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим эйконал  $S(\mathbf{r})$ , представляющий собой однозначную функцию координаты, и определим единичный вектор (рис. 2.2)

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \nabla S / |\nabla S| = \nabla S / n(\mathbf{r}), \quad (2.4.1)$$

который перпендикулярен волновому фронту и указывает направление распространения. Определим *лучи* как траектории  $\mathbf{r}(s)$ , касательные к

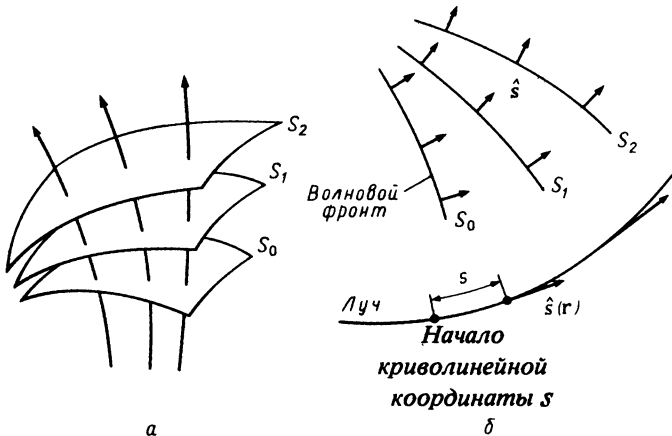


Рис. 2.2. *а* — семейство волновых фронтов; *б* — криволинейная координата  $s$  и направление  $\hat{\mathbf{s}}$  вдоль некоторой траектории (луча), перпендикулярной семейству волновых фронтов.

$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})$  в каждой точке  $\mathbf{r}$ . В случае когда  $S$  — неоднозначная функция, пространство заполняется множеством лучевых семейств. Если  $s$  — криволинейная абсцисса вдоль луча, то можно написать следующее соотношение:

$$n(\mathbf{r}) dr/ds = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \nabla S = \mathbf{k}/k_0 \quad (2.4.2)$$

[см. выражение (2.2.7)], и, дифференцируя обе части по  $s$ , мы имеем

$$\frac{d}{ds} \left[ n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \frac{d}{ds} \nabla S = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla S = \frac{1}{n(\mathbf{r})} (\nabla S \cdot \nabla) \nabla S. \quad (2.4.3)$$

Однако из уравнения (2.3.1) с учетом векторных тождеств (A.11) и (A.14) следует, что

$$2n(\mathbf{r}) \nabla n = \nabla (\nabla S \cdot \nabla S) = 2(\nabla S \cdot \nabla) \nabla S, \quad (2.4.4)$$

Подставляя (2.4.4) в (2.4.3), окончательно получаем

$$\frac{d}{ds} \left[ n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n, \quad (2.4.5)$$

или, в эквивалентном виде,

$$[\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla] [n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})] = \nabla n. \quad (2.4.6)$$

Полученное уравнение называют *векторным уравнением для лучей*. Частный случай анизотропной среды (одноосный кристалл) рассмотрен в работе [6] и разд. 2.14.1. Интересно, что при переходе к новой переменной

$$\tau = \int^s \frac{ds'}{n(s')}, \quad (2.4.7)$$

уравнение для лучей можно переписать в виде

$$d^2\mathbf{r}/d\tau^2 = \nabla \left( \frac{1}{2}n^2 \right). \quad (2.4.8)$$

Таким образом, отсюда следует, что лучи формально эквивалентны траекториям частицы единичной массы, движущейся в поле с потенциалом  $V = -n^2/2$ .

### 2.4.1. Теорема Малюса — Дюпина

Выполнение равенства (2.4.5) является *необходимым* условием ортогональности пучка лучей к семейству волновых фронтов, однако оно не всегда означает, что существует эйконал. Из (2.4.2) и (A.14) следует, что эйконал существует, только если

$$\nabla \times [n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})] = 0. \quad (2.4.9)$$

В этом случае пучок лучей называют *нормальной конгруэнцией*, и ее свойства можно описать с помощью уравнения эйконала.

Докажем теперь, что уравнение (2.4.9) справедливо всюду, если только оно выполняется в одной точке. Действительно, равенство нулю ротора вектора  $n\hat{\mathbf{s}}$  в некоторой точке означает, что *диада*  $\nabla(n\hat{\mathbf{s}})$  — симметричная. Покажем, что и все производные от  $\nabla(n\hat{\mathbf{s}})$  симметричны. Действительно, используя уравнение (2.4.6), можно получить следующие соотношения:

$$\nabla\nabla\left(\frac{1}{2}n_2\right) = \nabla[(n\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)n\hat{\mathbf{s}}] = [\nabla(n\hat{\mathbf{s}})]^2 + (n\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)[\nabla(n\hat{\mathbf{s}})] \quad (2.4.10)$$

и в более общем виде

$$(n\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)^m [\nabla(n\hat{\mathbf{s}})] = (n\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)^{m-1} [\nabla\nabla\left(\frac{1}{2}n^2\right)] - (n\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)^{m-1} [\nabla(n\hat{\mathbf{s}})]^2. \quad (2.4.11)$$

Видно, что в правой части соотношения (2.4.11) первая диада симметрична; симметрична также и вторая диада, если только симметричны производные от  $\nabla(n\hat{\mathbf{s}})$  до  $(m-1)$ -го порядка включительно. При этом симметрична и левая часть соотношения (2.4.1). Таким образом, используя метод индукции, мы показали, что все производные от  $\nabla(n\hat{\mathbf{s}})$  симметричны в рассматриваемой точке. Это означает, что  $\nabla(n\hat{\mathbf{s}})$  симметрична вдоль всего луча (если  $n$  является аналитической функцией координаты  $r$ ) и всюду выполняется равенство  $\nabla \times (n\hat{\mathbf{s}}) = 0$ .

Можно показать, что если соотношение (2.4.9) справедливо в единственной точке, то оно выполняется и вдоль всего луча даже в том случае, когда показатель преломления имеет разрывы на границах отражения или преломления. Этот результат известен как *теорема Малюса — Дюпина* (см. книгу [11] в гл. 1). Интуитивно этот вывод можно понять, если представить себе лучи как предельные траектории при плавном переходе от среды с непрерывно изменяющимся распределением  $n(r)$  к среде с резким разрывом показателя преломления. Поскольку равенство  $\nabla \times (n\hat{\mathbf{s}}) = 0$  выполняется для всех лучей в области с регулярным распределением показателя преломления, это равенство должно оставаться справедливым и при достижении границы разрыва.

#### 2.4.2. Кривизна и закручивание лучей

Геометрически луч удобно описывать с помощью трех ортогональных единичных векторов  $\hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{n}}$ , направленных соответственно

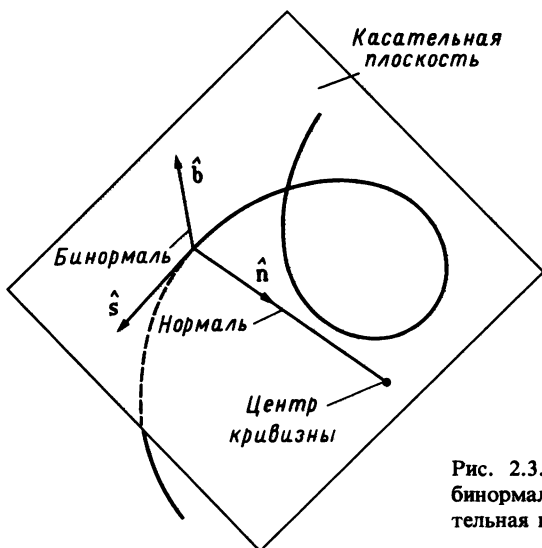


Рис. 2.3. Тангенциальный, нормальный и бинормальный единичные векторы и касательная плоскость, связанная с пространственной кривой.

тангенциально, нормально и бинормально к траектории  $\mathbf{r}(s)$  (рис. 2.3). С помощью этих обозначений для произвольной кривой можно записать уравнения Френе [7]:

$$(d/ds)\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{n}}/\rho \equiv \mathbf{K}, \quad (2.4.12a)$$

$$(d/ds)\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{s}}/\rho + \hat{\mathbf{b}}/\tilde{\tau}, \quad (2.4.12b)$$

$$(d/ds)\hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{n}}/\tilde{\tau}, \quad (2.4.12в)$$

где  $\rho$  и  $\tilde{\tau}$  — соответственно *радиус кривизны* и *закручивание* кривой. Закручивание является мерой отличия реальной кривой от плоской. Из уравнений (2.4.5) и (2.4.12a) имеем

$$\nabla n = (d/ds)(n\hat{\mathbf{s}}) = (dn/ds)\hat{\mathbf{s}} + n\mathbf{K}, \quad (2.14.13)$$

Отсюда следует, что лучи располагаются в касательной плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{s}$  и  $\nabla n$ . Из уравнений (2.4.12a) и (2.4.13) следует также, что *кривизна*  $K = 1/\rho$  связана с показателем преломления соотношением

$$K = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\ln n). \quad (2.4.14)$$

Это означает, что луч изгибается таким образом, чтобы вектор  $\nabla n$  указывал в сторону центра кривизны (рис. 2.4). В частности, рассмотрим падение луча на преломляющую поверхность. Луч будет откло-

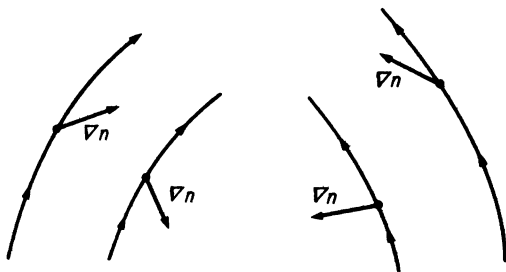


Рис. 2.4. Искривление лучей за счет градиента показателя преломления.

няться «вверх» или «вниз» от своего первоначального направления, если соответственно  $\mu = n/n' < 1$  или  $\mu > 1$ , где  $n'$  — показатель преломления преломляющей среды.

### 2.4.3. Построение луча

Простейшая вычислительная схема для построения луча [8] непосредственно основана на соотношении  $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/ds$  и уравнении (2.4.12a). Действительно,

$$\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}(s_0) + \hat{\mathbf{s}}(s_0)\Delta s + (1/2!)\mathbf{K}(s_0)(\Delta s)^2 + \dots; \quad (2.4.15)$$

здесь  $\Delta s = s_1 - s_0$  — конечная разность. При дифференцировании имеем

$$\hat{\mathbf{s}}(s_1) = \hat{\mathbf{s}}(s_0) + \mathbf{K}(s_0)\Delta s + \dots \quad (2.4.16)$$

Далее вычисления проводятся следующим образом. Для данной начальной точки  $\mathbf{r}_0$  и нормали к лучу  $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$  с помощью соотношения (2.4.14) вычисляют начальный вектор кривизны  $\mathbf{K}(s_0)$ . Таким образом, если известен вектор  $\hat{\mathbf{s}}(s_0)$ , то с помощью выражений (2.4.15) и (2.4.16) можно вычислить  $\mathbf{r}(s_1)$  и  $\hat{\mathbf{s}}(s_1)$  с любой заданной степенью точности. Затем, используя (2.4.14), мы получаем новый вектор  $\mathbf{K}(s_1)$ , причем  $\hat{\mathbf{n}}(s_1)$  определяется на касательной плоскости, содержащей единичные векторы  $\hat{\mathbf{s}}(s_0)$  и  $\hat{\mathbf{s}}(s_1)$ ; после этого процесс экстраполяции продолжается.

## 2.5. ТРАНСПОРТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $A_0$

Рассмотрим теперь более детально эволюцию амплитуды поля  $A_0$ . Умножая уравнение (2.2.9) (при  $m = 1$ ) на  $A_0$ , получаем *транспортное уравнение*

$$A_0^2 \nabla^2 S + 2A_0 \nabla S \cdot \nabla A_0 = 0, \quad (2.5.1)$$

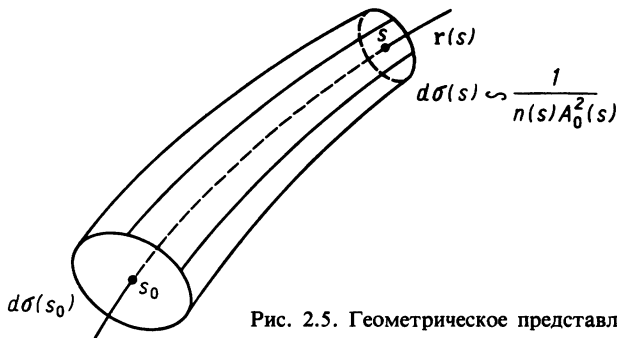


Рис. 2.5. Геометрическое представление трубки лучей.

которое с помощью векторного соотношения (А.7) и соотношения (2.4.2) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot (A_0^2 n \hat{\mathbf{S}}) = 0. \quad (2.5.2)$$

Рассматривая величину  $A_0^2 n \hat{\mathbf{S}}$  как аналог вектора Пойнтинга для скалярного поля  $A_0(\mathbf{r}) \exp[-ik_0 S(\mathbf{r})]$ , уравнение (2.5.2) можно интерпретировать как закон сохранения потока энергии. Если же, применяя теорему Гаусса к малому объему, создаваемому лучами, близкими к траектории  $\mathbf{r}(s)$  (рис. 2.5), переписать (2.5.2) в интегральной форме, то можно получить закон изменения  $A_0(s)$  вдоль произвольного луча:

$$A_0(s) = A_0(s_0) \left[ \frac{n(s_0) d\sigma(s_0)}{n(s) d\sigma(s)} \right]^{1/2}, \quad (2.5.3)$$

где  $d\sigma(s_0)$  и  $d\sigma(s)$  представляют собой сечения трубки лучей в точках  $s_0$  и  $s$ .

Заметим, что с помощью (2.4.1) уравнение (2.5.1) можно переписать в виде

$$\nabla^2 S + 2n(d/ds)(\ln A_0) = 0. \quad (2.5.4)$$

Решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$A_0(s) = A_0(s_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds' \right\}. \quad (2.5.5)$$

Таким образом, выражение (2.5.3) можно переписать в виде

$$\frac{n(s_0) d\sigma(s_0)}{n(s) d\sigma(s)} = \left( \frac{A_0(s)}{A_0(s_0)} \right)^2 = \exp \left[ - \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds' \right]. \quad (2.5.6)$$

Следовательно, в случае когда  $d\sigma \rightarrow 0$ , мы имеем  $\nabla^2 S \rightarrow -\infty$ . Этот факт непосредственно связан с понятием каустики (см. разд. 2.10.16)

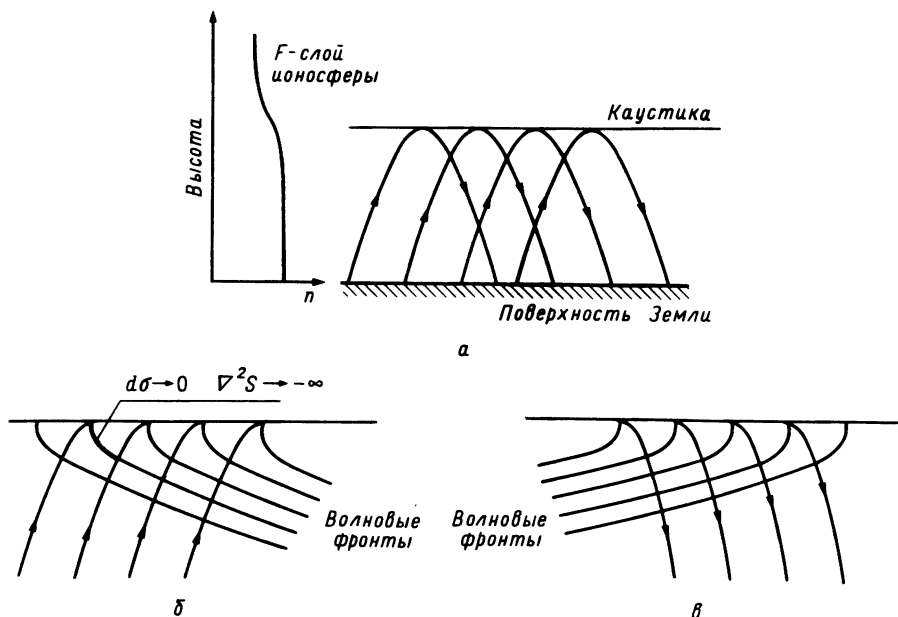


Рис. 2.6. *a* — отражение радиоволн, образующих каустик в  $F$ -слое ионосферы [слева показан профиль показателя преломления, уменьшающегося в области ионосферной плазмы в соответствии с выражением (1.2.47)]; *б* — конгруэнция падающих лучей; *в* — конгруэнция отраженных лучей; на каустике падающий и отраженный волновые фронты образуют точки возврата.

как геометрического места точек, в котором лапласиан эйконала расходится (рис. 2.6).

В соответствии с полученными выше результатами амплитуда поля вдоль луча зависит от того, как изменяется  $d\sigma$  или, что эквивалентно,  $\nabla^2 S$ . Таким образом, знания траектории отдельного луча еще не достаточно для того, чтобы можно было вычислить амплитуду  $A_0$ ; для этого необходимо найти все лучи, расположенные вблизи этой траектории.

## 2.6. ТРАНСПОРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $A_m$

Рассмотрим теперь поведение коэффициентов  $A_m(s)$  при  $m > 0$ . Для этого удобно определить новые величины  $A'_m$ , связанные с  $A_m$  соотношениями

$$A_m(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds'\right] A'_m(\mathbf{r}). \quad (2.6.1)$$



При этом, используя соотношение  $\nabla S \cdot \nabla = nd/ds$ , уравнение (2.2.9) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\nabla^2 S}{2n} + \frac{d}{ds}\right)A_m = \frac{-1}{2n}\nabla^2 A_{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.6.2)$$

Отсюда следует *транспортное уравнение*

$$\frac{dA'_m}{ds} = -\exp\left[\frac{1}{2}\int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds'\right] \frac{\nabla^2 A_{m-1}}{2n(s)}. \quad (2.6.3)$$

Интегрируя его вдоль луча и используя выражения (2.5.5) и (2.6.1), получаем

$$A_m(s) = A_m(s_0) \frac{A_0(s)}{A_0(s_0)} - A_0(s) \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 A_{m-1}(s')}{2A_0(s')n(s')} ds'. \quad (2.6.4)$$

Это выражение определяет изменение величины  $A_m$  вдоль произвольного луча через амплитуды  $A_0$  и  $A_{m-1}$ .

Если  $s_0 = 0$  и  $A_m(0) = 0$ , то

$$A_m(s) = -\frac{1}{2}A_0(s) \int_0^s \frac{\nabla^2 A_{m-1}(s')}{A_0(s')n(s')} ds'. \quad (2.6.5)$$

Это означает, что с ростом  $m$  становится существенным вклад членов высшего порядка, как если бы они возникали из-за «многократного рассеяния», связанного с изменением амплитуды  $A_m$  на волновых фронтах (рис. 2.7). Фактически  $\nabla^2 A_m \cong \nabla_i^2 A_m$ , где  $\nabla^2 = \nabla_i^2 + \partial^2/\partial s^2$ .

Подводя итог предыдущим вычислениям, удобно ввести оператор

$$\hat{L} = -A_0(s) \int_0^s \frac{\nabla^2}{2A_0(s')n(s')} ds' \quad (2.6.6)$$

таким образом, чтобы выражение (2.6.5) можно было записать в виде

$$A_m(s) = \hat{L}A_{m-1}(s) = \hat{L}^m A_0(s). \quad (2.6.7)$$

Наконец, с помощью выражений (2.6.7) и (2.2.5), последнее из которых записывается в виде  $u(s) \sim A(s)\exp[-ik_0 S(s)]$ , получаем

$$A(s) = i\hat{L}A(s)/k_0 + A_0(s), \quad (2.6.8)$$

откуда, используя определение оператора  $\hat{L}$  (2.6.6), имеем

$$A(s) = \frac{-iA_0(s)}{k_0} \int_0^s \frac{\nabla^2 A(s')}{2A_0(s')n(s')} ds' + A_0(s). \quad (2.6.9)$$

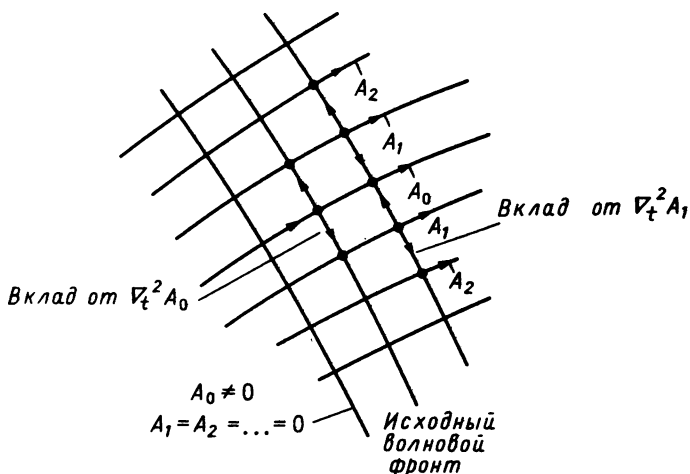


Рис. 2.7. Генерация членов высшего порядка.

Дифференцируя обе части этого выражения, приходим к равенству

$$\frac{d A(s)}{ds A_0(s)} = \frac{-i \nabla^2 A(s)}{k_0 2A_0(s)n(s)}. \quad (2.6.10)$$

### 2.6.1. Параболическое волновое уравнение Фока — Леонтовича

В тех случаях когда распространяющаяся в вакууме ( $n = 1$ ) волну можно приближенно описать идеальной конгруэнцией параллельных лучей, из выражения (2.5.3) следует, что  $A_0$  не зависит от  $s$ , т.е. уравнение (2.6.10) можно записать в виде

$$(\partial/\partial z)A(\mathbf{r}) = (-i/2k_0)\nabla^2 A(\mathbf{r}). \quad (2.6.11)$$

Здесь мы приняли соглашение о том, что общее направление лучей совпадает с осью  $z$ . Если пренебречь вкладом продольных составляющих в  $\nabla^2$ , то в этом приближении уравнение (2.6.11) совпадает с *параболическим волновым уравнением Фока — Леонтовича*

$$(\partial/\partial z)A(\mathbf{r}) = (-i/2k_0)\nabla_t^2 A(\mathbf{r}). \quad (2.6.12)$$

Таким образом, распространение электромагнитного поля можно рассматривать как необратимый диффузионный процесс, аналогичный термодиффузии или квантовомеханической эволюции волновой функции.

Доказательство того факта, что асимптотические решения уравнений (2.6.12) и (2.6.11) совпадают вплоть до членов порядка  $k_0^{-2}$ , мы оставляем в качестве задачи (см. задачу 2.5).

## 2.7. ЗАТУХАЮЩИЕ ВОЛНЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЭЙКОНАЛЫ

В предыдущих разделах мы неявно предполагали, что связанная с (действительными) лучами функция  $S$  является вещественной. Однако для описания полей, амплитуда которых существенно меняется даже на расстояниях порядка  $\lambda$ , мы по-прежнему можем опираться на формализм геометрической оптики. Для этого нужно ввести *комплексный эйконал*. Рассмотрим прежде всего простой случай плоской *затухающей* волны, распространяющейся в свободном пространстве (рис. 2.8):

$$u \propto e^{-ik' \cdot r - k'' \cdot r} = e^{-ik_0 S(r)}, \quad (2.7.1)$$

где  $k'^2 - k''^2 = k_0^2$  и  $k' \cdot k'' = 0$ .

Основываясь на этом примере, Фелсен [3] предложил искать в общем случае комплексные решения уравнения эйконала (2.3.1) в виде

$$S(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r}) - iI(\mathbf{r}), \quad (2.7.2)$$

где  $R(\mathbf{r})$  и  $I(\mathbf{r})$  удовлетворяют уравнению

$$(\nabla R)^2 - (\nabla I)^2 \equiv \beta^2 - \alpha^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (2.7.3)$$

причем  $\nabla R \cdot \nabla I = 0$  (взаимно-ортогональные *поверхности равных фаз* и *равных амплитуд*). Волны, описываемые комплексными эйконалами, называют обычно *однородными волнами*. Аналогично, если ввести величину

$$A_0(\mathbf{r}) = e^{w(\mathbf{r}) - iv(\mathbf{r})}, \quad (2.7.4)$$

то транспортное уравнение (2.5.1) приводит к следующей паре уравнений:

$$\frac{1}{2} \nabla^2 R + \nabla R \cdot \nabla w - \nabla I \cdot \nabla v = 0, \quad \frac{1}{2} \nabla^2 I + \nabla R \cdot \nabla v + \nabla I \cdot \nabla w = 0. \quad (2.7.5)$$

Рассмотрим теперь две конгруэнции лучей, которые перпендикулярны поверхностям  $R(\mathbf{r}) = \text{const}$  и  $I(\mathbf{r}) = \text{const}$ . В первом случае траектории конгруэнции, нормальной *фазовым фронтам* (*поверхностям равной фазы*), называются *фазовыми траекториями*. На них величина  $I$  постоянна. Во втором случае траектории семейства (*траектории*

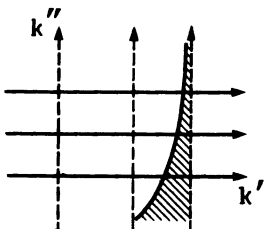


Рис. 2.8. Плоская затухающая волна. Заштрихованная область соответствует экспоненциально затухающему распределению амплитуды.

затухания или контуры равной фазы), нормальных поверхностям равной амплитуды  $I(\mathbf{r}) = \text{const}$ , лежат на фазовых фронтах. Аналогично тому, как было получено уравнение (2.4.5), можно вывести уравнения траекторий

$$(d/ds)(\beta\hat{s}) = \nabla\beta, \quad (d/dt)(\alpha\hat{t}) = \nabla\alpha, \quad (2.7.6)$$

где  $ds$  и  $dt$  — элементы длины соответственно на фазовой траектории и на траектории затухания (рис. 2.9). Единичные векторы  $\hat{s}$  и  $\hat{t}$  определяют соответствующие направления. Из уравнений (2.7.6) следует, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  формально можно рассматривать как показатели преломления.

Используя дифференциальные соотношения  $\nabla R \cdot \nabla = \beta d/ds$  и  $\nabla I \cdot \nabla = \alpha d/dt$ , транспортные уравнения (2.7.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla \cdot (\beta\hat{s}) + \beta(dw/ds) - \alpha(dv/dt) &= 0, \\ \frac{1}{2}\nabla \cdot (\alpha\hat{t}) + \beta(dv/ds) + \alpha(dw/dt) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Повторяя вывод соотношения (2.4.14), можно получить две кривизны  $K_s$  и  $K_t$ :

$$K_s = \hat{t} \cdot \nabla(\ln \beta) = (1/\beta)(d\beta/dt), \quad K_t = \hat{s} \cdot \nabla(\ln \alpha) = (1/\alpha)(d\alpha/ds). \quad (2.7.8)$$

Из представленного выше рассмотрения следует, что выбор соответствующего комплексного эйконала позволяет обобщить асимптотический ряд Луненберга — Клейна на поля, не описываемые вещественной функцией  $S$ .

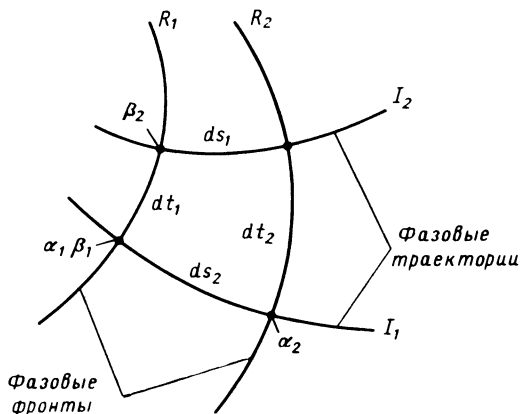


Рис. 2.9. Геометрическое представление взаимно ортогональных фазовых фронтов ( $R = \text{const}$ ) и фазовых траекторий ( $I = \text{const}$ ).

### 2.7.1. Двумерные затухающие поля

Простые примеры затухающих волн можно получить, рассматривая двумерные поля. Если задать семейство фазовых траекторий, то ортогональные траектории затухания определяются однозначно. Используя соответствующие ортогональные криволинейные координаты  $\mu$  и  $\nu$  для обозначения двух семейств, имеем  $R = R(\mu)$  и  $I = I(\nu)$ . При этом уравнение (2.7.3) запишется в виде

$$(dR/d\mu)^2(1/h_\mu^2) - (dI/d\nu)^2(1/h_\nu^2) = n^2(\mu, \nu), \quad (2.7.9)$$

где  $h_\nu$  и  $h_\mu$  — масштабные множители выбранных координат.

Рассмотрим интересный частный случай, когда фазовыми траекториями являются конфокальные гиперболы, а траекториями затухания — эллипсы (рис. 2.10). Здесь удобно выбрать эллиптические координаты, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} x &= b \sin \nu \operatorname{ch} \mu \\ z &= b \cos \nu \operatorname{sh} \mu \end{aligned} \quad (0 \leq \nu \leq 2\pi, \quad 0 \leq \mu \leq \infty), \quad (2.7.10)$$

причем  $h_\mu = h_\nu = b(\operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \nu)^{1/2}$ . В этих координатах уравнение (2.7.9) для поля в вакууме принимает вид

$$(dR/d\mu)^2 - (dI/d\nu)^2 = b^2(\operatorname{ch}^2 \mu - \sin^2 \nu). \quad (2.7.11)$$

Рассмотрим полуплоскость  $z > 0$  ( $\cos \nu > 0$ ) и решение уравнения (2.7.11):  $I(\nu) = b(1 - \cos \nu)$ ,  $R(\mu) = b \operatorname{sh} \mu = z/\cos \nu$ . В области  $z \gg |x|$  ( $\cos \nu \approx 1$ ) имеем

$$I(\nu) = \frac{b}{2} \frac{x^2}{(z^2 + b^2)}, \quad R(\mu) = z \left( 1 + \frac{x^2}{2(z^2 + b^2)} \right), \quad (2.7.12)$$

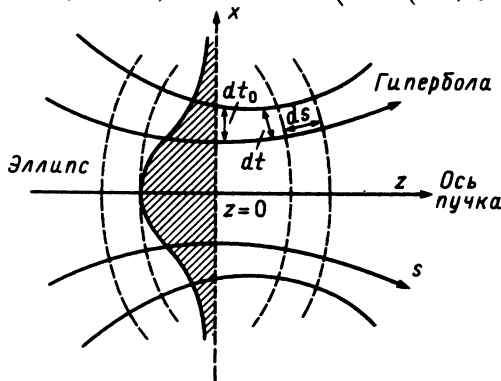


Рис. 2.10. Геометрическое представление затухающего поля, фазовые траектории которого образуют семейство конфокальных гипербол. Амплитуда поля изменяется вдоль оси  $x$  в соответствии с законом Гаусса.

т. е. [см. выражение (2.7.2)]:

$$e^{-ik_0 S} = e^{-x^2/w^2 - ik_0[z + x^2/(2\rho)]}, \quad (2.7.13)$$

где

$$w^2(z) = 2(z^2 + b^2)/bk_0, \quad \rho(z) = z + b^2/z. \quad (2.7.14)$$

Эти поля имеют гауссово распределение с шириной  $w(z)$ , причем радиус кривизны волновых фронтов равен  $\rho(z)$ . Такие поля образуют так называемые *гауссовы пучки*, поскольку поле в этом случае сконцентрировано в очень узкой трубке (см. разд. 7.7).

## 2.8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА МАКСВЕЛЛОВСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

### 2.8.1. Асимптотическое разложение электрического поля

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  в диэлектрической неоднородной среде удовлетворяет *векторному волновому уравнению* (1.1.11), записанному в виде

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 n^2 \mathbf{E} + 2\nabla[\mathbf{E} \cdot \nabla(\ln n)] = 0. \quad (2.8.1)$$

В полной аналогии со скалярным случаем будем искать представление геометрической оптики электрического поля, заменив в разложении (2.2.5)  $A_m(\mathbf{r})$  на  $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ .

Подставляя правую часть выражения (2.2.5) в уравнение (2.8.1) и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях  $k_0$ , получаем следующую рекурсивную систему уравнений:

$$(\nabla S)^2 - n^2(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.8.2a)$$

$$(\nabla^2 S + 2\nabla S \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 + 2[\mathbf{E}_0 \cdot \nabla(\ln n)]\nabla S = 0, \quad (2.8.2b)$$

$$[\nabla^2 S + 2\nabla S \cdot \nabla + 2\nabla S \nabla(\ln n) \cdot]\mathbf{E}_m + \nabla^2 \mathbf{E}_{m-1} + 2\nabla[\mathbf{E}_{m-1} \cdot \nabla(\ln n)] = 0, \quad (2.8.2в)$$

в которой последнее уравнение справедливо лишь при  $m > 0$ . Сравнивая уравнения (2.8.2) и (2.2.9), можно заключить, что векторная теория сводится к скалярной лишь в том случае, когда  $\mathbf{E}_m$  перпендикулярны градиенту показателя преломления. Вообще говоря, компоненты  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  перемешиваются за счет членов, содержащих  $\nabla(\ln n)$ , поэтому первоначально линейно-поляризованное поле при распространении не сохраняет своего состояния поляризации.

Для изучения низших порядков асимптотического ряда удобно заменить  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  на новую величину  $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ , определяемую выражением [ср. с (2.6.1)]

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds'\right]. \quad (2.8.3)$$

С учетом определения единичного вектора  $\hat{\mathbf{s}}$  (2.4.1) уравнение (2.8.2б) можно переписать в виде

$$n(d/ds)\mathbf{E}' + \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{E}' \cdot \nabla n) = 0. \quad (2.8.4)$$

Умножая скалярно это равенство на  $\hat{\mathbf{s}}$  и используя (2.4.6), получаем

$$n\hat{\mathbf{s}} \cdot (d/ds)\mathbf{E}' + \mathbf{E}' \cdot \nabla n = n\hat{\mathbf{s}} \cdot (d/ds)\mathbf{E}' + \mathbf{E}' \cdot (d/ds)(n\hat{\mathbf{s}}) = 0, \quad (2.8.5)$$

Отсюда следует, что скалярное произведение  $n\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}'$  постоянно вдоль луча.

В частности, если вектор  $\mathbf{E}'$  перпендикулярен  $\mathbf{s}$  в некоторой точке, то перпендикулярность сохраняется и вдоль всей траектории луча. Кроме того, если  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E} = 0$ , то, умножив скалярно (2.8.4) на  $\mathbf{E}'$ , имеем

$$n\mathbf{E}' \cdot (d/ds)\mathbf{E}' = \frac{1}{2}n(d/ds)(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}') = 0. \quad (2.8.6)$$

Таким образом, амплитуда ортогонального к  $\hat{\mathbf{s}}$  вектора  $\mathbf{E}'$  также постоянна вдоль луча.

### 2.8.2. Асимптотическое разложение магнитного поля

Для того чтобы дать полное описание векторного поля, необходимо найти асимптотическое разложение магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Заметим, что, используя выражение (2.4.1) и векторное соотношение (А.8), можно получить асимптотическое представление векторного произведения  $\nabla \times \mathbf{E}$ :

$$\nabla \times \mathbf{E} \sim e^{-ik_0 S} \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(n\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_{m+1} + \nabla \times \mathbf{E}_m)}{(-ik_0)^m}, \quad \mathbf{E}_{-1} \equiv 0, \quad (2.8.7)$$

так что при  $\mu = \mu_0$  из уравнения (1.1.1) следует

$$\mathbf{H} \sim \frac{e^{-ik_0 S(r)}}{\zeta_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_m + \nabla \times \mathbf{E}_{m-1}}{(-ik_0)^m} \equiv e^{-ik_0 S(r)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_m(r)}{(-ik_0)^m}. \quad (2.8.8)$$

В частности,  $\zeta \mathbf{H}_0 = \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_0$  ( $\zeta \equiv \zeta_0/n$ ). Поэтому, если  $\mathbf{E}_0$  ортогонален вектору  $\hat{\mathbf{s}}$ , то тройка векторов  $\hat{\mathbf{s}}$ ,  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  взаимно ортогональна и в нулевом порядке по  $k_0^{-1}$  поле представляет собой поперечную электромагнитную (ТЕМ) волну.

### 2.8.3. Асимптотическое разложение вектора Пойнтинга

Используя представленные выше разложения, асимптотическое представление комплексного вектора Пойнтинга  $\mathbf{S} = (1/2)\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$  [см. (1.6.8)] можно записать в виде

$$\mathbf{S} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{S}_m k_0^{-m}, \quad (2.8.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_m &= \frac{1}{2} \sum_{m'=0}^m \mathbf{E}_{m'} \times \mathbf{H}_{m-m'}^* (-i)^{-m'} (i)^{m'-m} = \\ &= \frac{i^{-m}}{2\zeta_0} \sum_{m'=0}^m (-1)^{m'} \mathbf{E}_{m'} \times (n\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_{m-m'}^* + \nabla \times \mathbf{E}_{m-m'-1}^*). \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

В частности, если  $\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0$ , то за счет векторного тождества (A.2) получаем

$$\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0,$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{2\zeta} \mathbf{E}_0 \times (\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_0^*) = \hat{\mathbf{s}} \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}'|^2 \exp \left[ - \int_0^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds' \right], \quad (2.8.11a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \frac{-i}{2\zeta_0} [-\mathbf{E}_1 \times (n\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0 \times (n\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}_1^* + \nabla \times \mathbf{E}_0^*))] = \\ &= \frac{-i}{2\zeta_0} [(-\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_0) n\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{E}_0^* (n\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E}_1) + \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*)]. \end{aligned} \quad (2.8.11b)$$

Из выражения (2.8.11a) следует, что  $\mathbf{S}_0$  является вещественным вектором. Кроме того, из ортогональности векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\hat{\mathbf{s}}$  имеем  $(1/2)\varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = (1/2)\mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*$ . Таким образом, то, что в нулевом порядке электрическая и магнитная плотности энергии равны друг другу и что вектор  $\mathbf{S}_0$  является вещественным, представляют собой взаимосвязанные факты.

Все проведенные выше рассмотрения справедливы для локальной плоской волны в нулевом порядке по  $k_0^{-1}$ , но уже в первом порядке полученные выше выводы оказываются неверными. Действительно, если в выражении (2.8.11b) пренебречь членами с  $\mathbf{E}_1$ , то оно принимает вид  $2i\zeta_0 \mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{E}_0^*)$ , так что с помощью соотношений (2.8.3), (A.8) и (A.2), а также с учетом постоянства величины  $|\mathbf{E}'|$  имеем

$$\mathbf{S}_1 = \frac{i}{2\zeta_0} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\nabla^2 S}{2n} \hat{\mathbf{s}} = \frac{i}{2n^2} (\nabla^2 S) \mathbf{S}_0; \quad (2.8.12)$$

здесь в первом приближении мы рассматриваем изменение  $\mathbf{E}_0$  только вдоль луча. Тот факт, что  $\mathbf{S}_1$  — чисто мнимая величина, указывает на то, что электрическая и магнитная энергии не равны друг другу (см. работу [17] в гл. 1 настоящей книги).



### 2.8.4. Ряд Лунеберга — Клейна на поверхности раздела двух сред

В средах с разрывами показателя преломления у плоской волны  $\mathbf{E}_0$  возникает некоторое свойство. Чтобы выявить его, рассмотрим волну, распространяющуюся в слоистой среде в направлении  $\hat{\mathbf{z}}$ , параллельном  $\nabla n$ . При этом как  $\mathbf{E}_0$ , так и  $\mathbf{H}_0$  перпендикулярны  $\nabla n$ . Если показатель преломления разрывен на некоторой плоскости  $z = \text{const}$ , то оба вектора ( $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$ ) не могут одновременно быть непрерывными функциями  $z$ . Этот факт противоречит уравнениям Максвелла, согласно которым составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , параллельные поверхности разрыва показателя преломления, должны быть непрерывными. Для адекватного описания возникающей особенности необходимо рассмотреть вторую волну, распространяющуюся от поверхности разрыва в направлении  $-\hat{\mathbf{z}}$ . В гл. 3 мы вычислим амплитуды отраженной и прошедшей волн, а также дадим подробный анализ распространения излучения в плоских многослойных средах.

## 2.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Рассмотрим некоторые важные дифференциальные свойства волновых фронтов в *однородной* среде. Разложение функции  $S$  вблизи точки  $\mathbf{r}_0$  приводит к ряду

$$S(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_0) + \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla S + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{r} \Delta\mathbf{r} : \mathbf{Q} + \dots, \quad (2.9.1)$$

где тензор  $\mathbf{Q} \equiv \nabla \nabla S$ , как будет видно в дальнейшем, описывает кривизну волнового фронта, а символ «произведения» ( $:$ ) обозначает операцию, приводящую к скалярной величине  $\sum_{ij} \Delta r_i \Delta r_j (\partial/\partial x_i)(\partial/\partial x_j) S$ . Так как в однородной среде  $\nabla S \cdot \nabla S = n^2 = \text{const}$ , из векторных тождеств (A.11) и (A.4) следует, что

$$0 = \nabla(\nabla S \cdot \nabla S) = 2(\nabla S \cdot \nabla) \nabla S + 2\nabla S \times (\nabla \times \nabla S) = 2\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{Q} \quad (2.9.2)$$

(без потери общности мы предположили, что  $n = 1$ ).

Равенство нулю произведения  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$  ненулевого вектора  $\mathbf{V}$  и ненулевого тензора  $\mathbf{A}$ , что дает по определению вектор  $B_i = \sum_j V_j A_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), означает справедливость следующих утверждений, которые нетрудно проверить: по крайней мере одна из трех компонент тензора  $\mathbf{A}$  в диагональном представлении равна нулю, равны нулю также и компоненты  $\mathbf{V}$  вдоль *главных осей* тензора  $\mathbf{A}$ , соответствующих ненулевым собственным значениям. Это означает, что тензор  $\mathbf{Q}$  можно представить в виде [см. уравнение (2.9.2)]

$$\mathbf{Q} = q_1 \hat{\mathbf{t}}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 + q_2 \hat{\mathbf{t}}_2 \hat{\mathbf{t}}_2, \quad (2.9.3)$$

где  $\hat{\mathbf{t}}_1$  и  $\hat{\mathbf{t}}_2$  (главные направления) перпендикулярны  $\nabla S$ . Покажем, что  $\mathbf{Q}$  описывает кривизну волнового фронта в точке  $\mathbf{r}_0$  [9]. (В частности, если  $\mathbf{Q} = 0$ , то волна является локально плоской; если же  $q_1 = q_2 = 0$ , то она сферическая, а если  $q_1 = 0$ ,  $q_2 \neq 0$ , то волна цилиндрическая.) Подставим представление (2.9.3) в разложение (2.9.1). Тогда с помощью (2.4.2) получим

$$S(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = S_0 + \Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0 + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2 q_1 + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2 q_2 + \dots, \quad (2.9.4)$$

где все величины в правой части вычисляются в точке  $\mathbf{r}_0$ . Дифференцируя, имеем

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{s}}_0 + \Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 q_1 + \Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 \hat{\mathbf{t}}_2 q_2 + \dots \quad (2.9.5)$$

Если использовать разложение (2.9.4) для векторов  $\Delta\mathbf{r}$ , лежащих в пересечении волнового фронта  $S = S(\mathbf{r}_0) \equiv \text{const}$  с плоскостью, проходящей через  $\mathbf{r}_0$  и параллельной  $\hat{\mathbf{s}}_0$  и  $\hat{\mathbf{t}}_1$ , а также с плоскостью, параллельной  $\hat{\mathbf{s}}_0$  и  $\hat{\mathbf{t}}_2$ , то получим соответственно (рис. 2.11)

$$\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \Delta\mathbf{r} + \frac{1}{2} q_1 (\Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2 + \dots = 0, \quad (2.9.6)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \Delta\mathbf{r} + \frac{1}{2} q_2 (\Delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2 + \dots = 0.$$

Таким образом, локально сечения являются парабололами с кривизной  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Кроме того, кривизна считается положи-

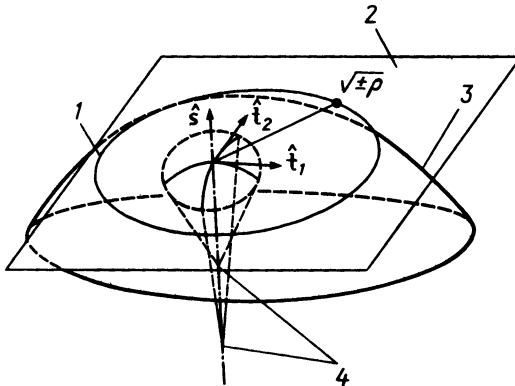


Рис. 2.11. Дифференциальные характеристики волнового фронта. *Индикатриса Дюпина* — геометрическое место точек, лежащих на касательной плоскости на расстоянии от точки касания, пропорциональном  $|\rho|^{1/2}$ ,  $\rho$  — радиус кривизны сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной этой поверхности и проходящей через точку индикатрисы. 1 — индикатриса Дюпина; 2 — плоскость, касательная к волновому фронту; 3 — волновой фронт; 4 — главные центры кривизны волнового фронта.

тельной, если соответствующий центр кривизны лежит на противоположной стороне по отношению к направлению луча  $\hat{\mathbf{S}}_0$ . Поэтому оба главных радиуса кривизны

$$\rho_1 \equiv q_1^{-1} \quad \text{и} \quad \rho_2 \equiv q_2^{-1} \quad (2.9.7)$$

положительны, если волновой фронт является вогнутым для наблюдателя при приближении к волновому фронту вдоль направления  $\hat{\mathbf{S}}_0$ . Обратная ситуация имеет место для выпуклых волновых фронтов. В заключение можно сказать, что, согласно принятому нами соглашению,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  положительны для расходящейся волны и отрицательны для сходящейся.

Теперь уже можно получить точное выражение для  $\mathbf{Q}$ . Для этого заметим, что при бесконечно малом сдвиге  $d\mathbf{r}$  уравнения (2.9.4) и (2.9.5) принимают вид соответственно

$$S(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) + S_0 + d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}_0, \quad (2.9.8)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{S}}_0 + d\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{t}}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 q_1 + \hat{\mathbf{t}}_2 \hat{\mathbf{t}}_2 q_2). \quad (2.9.9)$$

В частности, последнее равенство означает, что векторы  $\hat{\mathbf{S}}_0$ ,  $d\mathbf{r}$  и  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r})$  компланарны, если  $d\mathbf{r}$  параллелен  $\hat{\mathbf{t}}_1$  или  $\hat{\mathbf{t}}_2$ . Используя простое геометрическое построение, докажем теперь, что единичные векторы  $\hat{\mathbf{t}}_1$  и  $\hat{\mathbf{t}}_2$  постоянны вдоль луча (рис. 2.12). Рассмотрим две точки  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{S}}_0 ds$ , вектор  $d\mathbf{r}_0$ , параллельный  $\hat{\mathbf{t}}_1$ , и луч, проходящий через точку  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0$ . Так как  $d\mathbf{r}_0$  параллелен  $\hat{\mathbf{t}}_1$ , то вектор  $\hat{\mathbf{S}} \equiv \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$  компланарен с векторами  $\hat{\mathbf{S}}_0$  и  $d\mathbf{r}_0$ . Рассмотрим теперь точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \hat{\mathbf{S}} ds$  и вектор  $d\mathbf{r}'_0 = d\mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{S}} ds - \hat{\mathbf{S}}_0 ds$ . Поскольку  $\mathbf{r}'_0$  и  $\mathbf{r}'$  эквидистантны ( $ds$ ) по отношению к волновому фронту, проходящему через  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$ , они лежат на одном и том же волновом фронте. Кроме

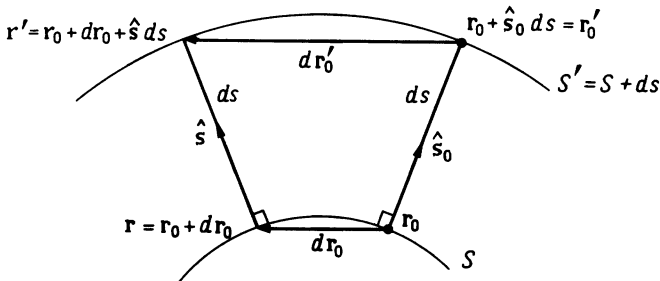


Рис. 2.12. Главное сечение волнового фронта, проходящего через точку  $\mathbf{r}_0$ . Вектор  $d\mathbf{r}'_0$  параллелен  $d\mathbf{r}_0$  и компланарен с векторами  $\hat{\mathbf{S}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}_0$ , т. е. параллелен главному направлению волнового фронта, проходящего через точку  $\mathbf{r}'_0$ .

того,  $dr'_0$  параллелен  $dr_0$ , так как  $dr'_0 \times dr_0 = ds(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \times dr_0 = 0$  [следствие соотношения (2.9.9) и параллельности векторов  $dr_0$  и  $\mathbf{t}_1$ ]. Кроме того, компланарность векторов  $\hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_0$  и  $dr_0$  означает, что  $dr'_0$ ,  $\hat{\mathbf{s}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}_0$  также компланарны, т. е. вектор  $dr'_0$  направлен вдоль  $\hat{\mathbf{t}}_1(r'_0)$ . Следовательно, поскольку  $dr'_0$  параллелен  $dr_0$ , а значит, и  $\hat{\mathbf{t}}_1(r_0)$ , мы имеем  $\hat{\mathbf{t}}_1(r'_0) = \hat{\mathbf{t}}_1(r_0)$ . Таким образом, вектор  $\hat{\mathbf{t}}_1$  является *постоянным* вдоль луча, распространяющегося в однородной среде; очевидно, что это же справедливо и для  $\hat{\mathbf{t}}_2$ . Отсюда, учитывая постоянство  $\hat{\mathbf{S}}_0$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  вдоль соответствующих лучей, из уравнения (2.9.9) имеем

$$\frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot dr_0}{\rho_1(s_0)} = \frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \times dr'_0}{\rho_1(s_0 + ds)} = \frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot d\mathbf{r}_0 + (\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}_0) \cdot \mathbf{t}_1 ds}{\rho_1(s_0 + ds)}, \quad (2.9.10)$$

откуда следует

$$d\rho = \frac{(\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}_0) \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 \rho_1 ds}{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot d\mathbf{r}_0} = ds. \quad (2.9.11)$$

Аналогичные выкладки можно повторить и для направления  $\mathbf{t}_2$ ; для тензора  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  мы получим следующую простую матричную запись (в системе координат с осями  $\hat{\mathbf{t}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{t}}_2$  и  $\hat{\mathbf{S}}$ ):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1(0) + s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2(0) + s} \end{bmatrix}. \quad (2.9.12)$$

Здесь  $\rho_1(0)$  и  $\rho_2(0)$  — главные радиусы кривизны волнового фронта, проходящего через начало координат 0 (рис. 2.13), где  $s = 0$ . Соответствующие центры кривизны (*главные центры кривизны*) лежат при  $s = -\rho_1(0)$  и  $s = -\rho_2(0)$ .

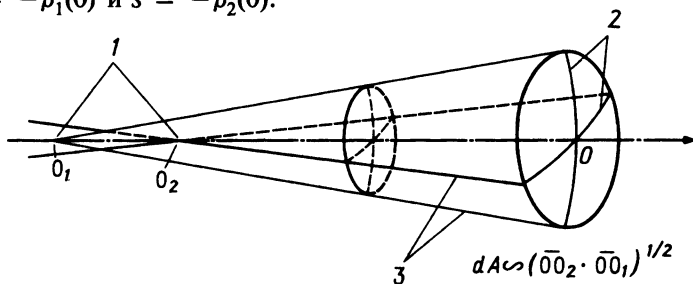


Рис. 2.13. Главные плоскости и центры кривизны волнового фронта трубки лучей, распространяющегося в однородной среде. 1 — центры кривизны; 2 — главные сечения; 3 — главные плоскости.

Теперь можно получить замечательное выражение, описывающее эволюцию амплитуды  $A_0$  вдоль луча. Действительно, поскольку

$$\nabla^2 S = \text{Tr} \nabla \nabla S = \text{Tr} \mathbf{Q} = \frac{1}{\rho_1(s)} + \frac{1}{\rho_2(s)} = \frac{1}{\rho_1(0) + s} + \frac{1}{\rho_2(0) + s}, \quad (2.9.13)$$

выражение (2.5.5) принимает вид

$$A_0(s) = A_0(0) \left[ \frac{\rho_1(0)}{\rho_1(0) + s} \right]^{1/2} \left[ \frac{\rho_2(0)}{\rho_2(0) + s} \right]^{1/2}, \quad (2.9.14)$$

где квадратные корни нужно выбирать вещественными положительными или чисто мнимыми с положительной мнимой частью. Для сферической волны ( $\rho_1 = \rho_2$ ) фаза вдоль луча при прохождении через фокус претерпевает скачок, равный  $\pi$ . Этот эффект наблюдал Гуи еще в прошлом веке, и с тех пор он называется *фазовой аномалией*. Как будет строго показано в гл. 4, сферическая волна с конечной апертурой испытывает быстрое, но непрерывное изменение фазы на  $\pi$ . Вдоль оси фазовые аномалии периодически изменяются между  $-\pi/2$  и  $-3\pi/2$  (см. рис. 4.23).

Можно привести следующие качественные соображения, объясняющие скачок фазы. Вдоль луча фаза описывается приближенно выражением

$$\phi(s) = - \int^s \kappa(s') ds', \quad (2.9.15)$$

где  $\kappa(s')$  — «эффективная» компонента волнового вектора вдоль направления распространения. Если амплитудное распределение волны почти однородно на плоскости, перпендикулярной  $\hat{\mathbf{s}}$ , то  $\kappa \cong k_0$ . Вблизи центра кривизны волна сильно неоднородна и  $\kappa = (k_0^2 - k_t^2)^{1/2} < k_0$ , где  $k_t$  — эффективный поперечный волновой вектор. Таким образом, когда луч пересекает центр кривизны, фаза  $\phi(s)$  получает положительное приращение. Точнее говоря,  $\phi(s)$  больше, чем  $\phi(0)$ , на  $n\pi/2$ , где  $n$  — число центров кривизны, заключенных между 0 и  $s$ . Все это остается справедливым лишь в том случае, если в центрах кривизны не имеется источников; в противном случае пришлось бы рассматривать два физических луча, распространяющихся вдоль каждой прямой, пересекающей центры кривизны.

## 2.10. КАУСТИКИ И ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ

Амплитуда поля, вычисленная в приближении геометрической оптики, оказывается бесконечной на некоторых поверхностях, называемых *каустиками*, где  $\nabla^2 S = -\infty$  [см. соотношение (2.5.6)]. Кроме того, в не-

которых особых точках каустики (*точках возврата*) поле расходится иначе, чем на всей остальной поверхности каустики. Как видно из выражения (2.9.14), в однородной среде каустика является геометрическим местом главных центров кривизны (*фокусов*) волнового фронта. Поскольку в большинстве случаев каждой точке волнового фронта соответствуют два главных центра кривизны, каустику можно рассматривать как двулистную поверхность. В неоднородной среде понятие о центре кривизны не имеет смысла, и каустикой является огибающая конгруэнции лучей. При этом каждый из лучей касается поверхности каустики в некоторой точке, а это в свою очередь означает, что элементарный пучок лучей стягивается в отрезок на каустике, что и приводит к сингулярности поля [выражение (2.5.3)].

Для более строгого описания рассмотрим двумерную конгруэнцию лучей и треугольный контур, состоящий из элемента луча  $\delta$ , участка каустики и отрезка на волновом фронте  $\Delta$ . Очевидно, что поток вектора  $\hat{\mathbf{S}}$  через этот контур равен  $-\Delta$ . Площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю приблизительно как  $\delta\Delta$ . Поэтому отношение потока к площади расходится как  $-1/\delta$ . Используя теорему Гаусса, получаем, что на каустике  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{S}}$  стремится к  $-\infty$ . Так как  $\nabla^2 S = \nabla n \cdot \hat{\mathbf{S}} + n \nabla \cdot \hat{\mathbf{S}}$  (2.4.1), величина  $\nabla^2 S$  также стремится к  $-\infty$ , следствием чего является расходимость амплитуды  $A_0$  [см. (2.5.6)].

В однородной среде огибающая поверхность совпадает с геометри-

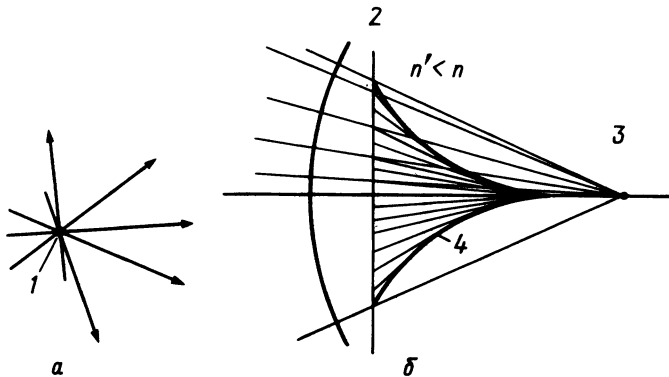


Рис. 2.14. Примеры каустик. *a* — у сферической волны каустика представляет собой точку; обратите внимание на отличие случая, когда точечный источник *испускает* лучи во всех направлениях; в первом случае поле в фокусе конечно, а во втором нет; *b* — каустика, образующаяся в случае, когда сферическая волна входит в более плотную диэлектрическую линзу через плоскую границу раздела. 1 — фокус; 2 — сферический волновой фронт; 3 — конгруэнция лучей с каустикой; 4 — каустика.

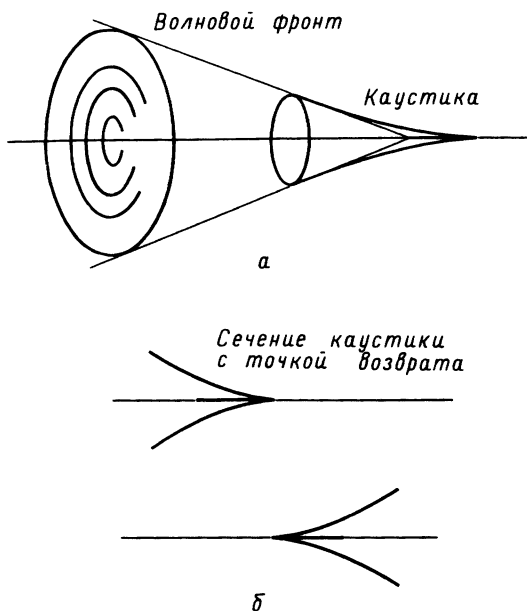


Рис. 2.15. *а* — двулистная поверхность каустики, связанная с волновым фронтом, имеющим вращательную симметрию; *б* — сечения показанной на рис. *а* каустики плоскостью, проходящей через ось вращательной симметрии; сечения с точкой возврата могут быть ориентированы в разные стороны в зависимости от вида волновых фронтов.

ческим местом главных центров кривизны и для сферической волны сводится в одну точку (рис. 2.14). Если волновые фронты имеют вид цилиндрических поверхностей, то одним из листов каустики является цилиндр, а другой лист расположен на бесконечности. Другой пример — волновые фронты в однородной среде, симметричной относительно поворота вокруг некоторой оси; главные центры кривизны относительно меридиональных сечений в общем случае отделены от центров кривизны, которые расположены на самой оси вращения (*фокальная линия*). В этом случае каустика состоит из поверхности вращения (имеющей точку возврата на оси) и отрезка самой оси (рис. 2.15). В обоих рассмотренных случаях каустики полностью определяются кривыми, которые представляют собой сечения каустик соответственно плоскостью, ортогональной цилиндрическим волновым фронтам, и плоскостью, содержащей ось вращения.

Рассмотрим двумерную задачу. На рис. 2.16 изображены близкая к каустике точка *P* и два луча, проходящие через эту точку (здесь и далее мы будем рассматривать однородную среду). Через каждую из то-

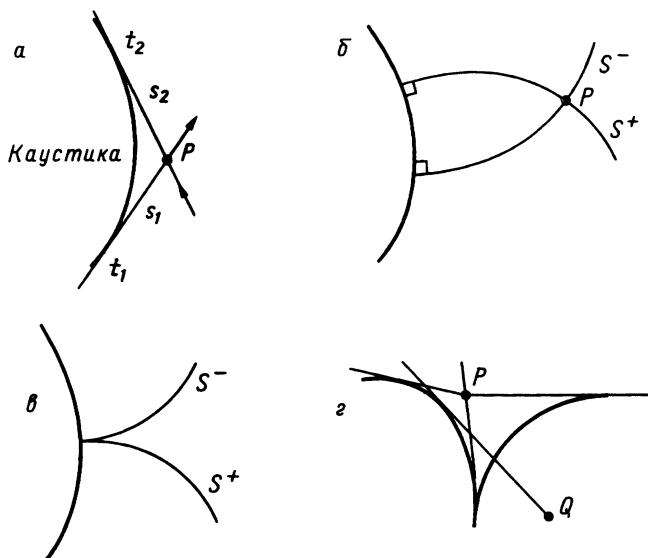


Рис. 2.16. *a* — пересечение лучей вблизи регулярной точки каустики; *б* — волновые фронты, соответствующие случаю на рис. *a*; *в* — точка возврата, образуемая на каустике волновыми фронтами; *г* — пересечение лучей вблизи точки возврата; в этом случае более двух лучей могут пересекаться в одной точке и приводить к образованию сложной интерференционной картины; отмечена также точка *Q*, лежащая в темной зоне одной ветви каустики и в светлой зоне другой ветви.

чек вблизи каустики проходят два луча, один из которых покидает каустику (в точке с координатой, соответствующей длине дуги  $t_1$  вдоль каустики, на расстоянии  $s_1$  по касательной от точки  $P$ ), а другой входит в каустику (соответственно в точке  $t_2$  на расстоянии  $s_2$  по касательной от точки  $P$ ). Таким образом, поле в точке  $P$  является суперпозицией полей двух лучей, эйконалы которых равны соответственно  $S^+$  и  $S^-$ . Это приводит к осцилляциям амплитуды поля вблизи каустики за счет интерференции волн.

Волновые фронты  $S^\pm = \text{const}$  можно построить как множество точек, в которых оказывается конец нити, разматывающейся с каустики. Действительно, мгновенный центр вращения прямого отрезка нити совпадает с точкой касания нити с каустикой, поэтому конец нити движется при разматывании перпендикулярно самому лучу, т. е. тангенциально волновому фронту. Иными словами, если рассмотреть некоторую опорную точку  $Q$  на каустике, то можно представить себе, что поле порождается источником, расположенным в точке  $Q$ . Лучи



первоначально движутся по криволинейной траектории вдоль каустики, а затем покидают ее по касательной к ней. Длина оптического пути, вычисленная вдоль этой траектории, оказывается постоянной, если сдвигать точку  $P$  по волновому фронту. Такая интерпретация позволяет легко обобщить метод построения каустики для трехмерной конгруэнции лучей. В этом случае можно показать [10], что волновые фронты образуются при разматывании пучка нитей, протянутых вдоль геодезических линий на поверхности каустики. Такая процедура является непосредственным обобщением разобранный выше построения для плоской геометрии и позволяет построить волновые фронты при известной каустике, т. е. решает задачу, обратную нахождению каустики при заданных волновых фронтах.

Волновые фронты, проходящие через две точки, расположенные на одном и том же луче по обе стороны относительно точки касания луча с каустикой, имеют противоположные значения кривизны, поскольку эти фронты отвечают приходящей и уходящей волне (рис. 2.17). Вообще говоря, фаза волны увеличивается на  $\pi/2$ , когда соответствующий луч касается каустики (см. заключительную часть разд. 2.9).

### 2.10.1. Аналитические свойства конгруэнций лучей, волновых фронтов и каустик

Рассмотрим теперь соотношения между конгруэнциями лучей, волновыми фронтами и каустиками с аналитической точки зрения. Конгруэнция прямых лучей, например распространяющихся в однородной среде, может быть определена следующей парой параметрических

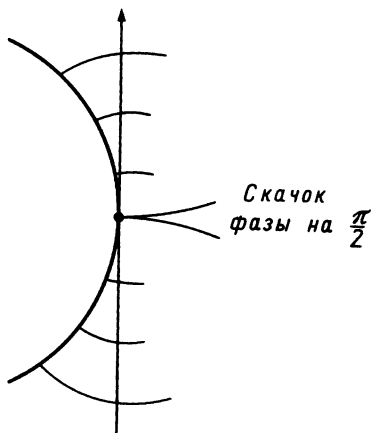


Рис. 2.17. Волновой фронт вблизи точки касания луча с каустикой.

уравнений:

$$x = \alpha z + f(\alpha, \beta), \quad y = \beta z + g(\alpha, \beta). \quad (2.10.1)$$

Соответствующий касательный единичный вектор  $\hat{\mathbf{s}}$  дается выражением

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \hat{x} + \frac{\beta}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \hat{y} + \frac{1}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \hat{z} \equiv \\ &\equiv p\hat{x} + q\hat{y} + (1 - p^2 - q^2)^{1/2} \hat{z}. \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

В соответствии с условием (2.4.9) конгруэнция является нормальной, т.е. определяет семейство волновых фронтов, если

$$\nabla \times \hat{\mathbf{s}} = 0. \quad (2.10.3)$$

Произведем теперь замену переменных  $(x, y, z) \rightarrow (\alpha, \beta, z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \left[ \left( z + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] / \left[ z^2 + z \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right], \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \left[ \left( z + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] / \left[ z^2 + z \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y} &= \frac{\left[ \beta \frac{\partial f}{\partial \beta} - \alpha \left( z + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left[ \alpha \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \beta \left( z + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\alpha, \beta}}{z^2 + z \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right] + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha}}. \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Используя равенство  $\nabla \times \hat{\mathbf{s}} = 0$ , получаем

$$(1 + \alpha^2) \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \alpha \beta \frac{\partial g}{\partial \beta} = \alpha \beta \frac{\partial f}{\partial \alpha} + (1 + \beta^2) \frac{\partial f}{\partial \beta}, \quad (2.10.5)$$

или, в эквивалентном виде,  $-\partial g / \partial p = \partial f / \partial q$ .

### 2.10.1.a. Волновые фронты

Для того чтобы получить волновые фронты, связанные с распространением нормальной лучевой конгруэнции, обозначим через  $z = z(\alpha, \beta, \tilde{c})$  координату  $z$  волнового фронта, определяемую параметром  $\tilde{c}$ . При этом две другие координаты точек волнового фронта определяются выражениями

$$x = \alpha z(\alpha, \beta, \tilde{c}) + f(\alpha, \beta), \quad y = \beta z(\alpha, \beta, \tilde{c}) + g(\alpha, \beta). \quad (2.10.6)$$

Если использовать теперь ортогональность вектора смещения точки на волновом фронте ( $\tilde{c} = \text{const}$ ) к направлению луча  $\hat{\mathbf{s}}$ , то с по-

мощью (2.10.2) получаем

$$\left(z + \alpha \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\alpha + \left(\beta \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)\beta + \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0, \quad (2.10.7)$$

$$\left(\alpha \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\right)\alpha + \left(z + \beta \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \beta}\right)\beta + \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

т. е.

$$\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)(\partial z / \partial \alpha) = -\alpha(\partial f / \partial \alpha) - \beta(\partial g / \partial \alpha), \quad (2.10.8)$$

$$\beta z + (\alpha^2 + \beta^2 + 1)(\partial z / \partial \beta) = -\alpha(\partial f / \partial \beta) - \beta(\partial g / \partial \beta).$$

Определив величину

$$\zeta = z(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad (2.10.9)$$

имеем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = -(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} = -(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial g}{\partial \beta} \right). \quad (2.10.10)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, так как за счет равенства  $\partial g / \partial \rho = \partial f / \partial q$  имеем

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta \partial \alpha}. \quad (2.10.11)$$

Таким образом можно найти функцию

$$z = z(\alpha, \beta, \tilde{c}), \quad (2.10.12)$$

с помощью которой вместе с соотношениями (2.10.6) можно исключить параметры  $\alpha$  и  $\beta$  и получить уравнение волновых фронтов  $F(x, y, z, \tilde{c}) = 0$ . Различные значения параметра  $\tilde{c}$  отвечают разным решениям уравнений (2.10.10); поэтому наиболее общее их решение связано с наиболее общим волновым фронтом.

### 2.10.1.6. Каустики

Найдем теперь каустики, связанные с рассматриваемой конгруэнцией. Удобно рассмотреть подмножество прямых, определяемых как

$$x - \alpha z - f[\alpha, \beta(\alpha)] = 0, \quad y - \beta(\alpha)z - g[\alpha, \beta(\alpha)] = 0, \quad (2.10.13)$$

где  $\beta(\alpha)$  — функция, связанная с огибающей кривой  $\Gamma$  подмножества. Точка  $(x_c, y_c, z_c)$ , в которой рассматриваемый луч (имеющий данное

значение параметра  $\alpha$ ) касается кривой  $\Gamma$ , определяется уравнениями

$$z_c + \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad z_c \frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \quad (2.10.14)$$

Эти уравнения подтверждают интуитивное представление о том, что каждая точка на огибающей является точкой скопления лучей, что означает равенство нулю производных  $dx_c/d\alpha$  и  $dy_c/d\alpha$  при фиксированном  $z_c$ . Как следствие уравнений (2.10.14), получаем

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{(\partial g/\partial \beta) - (\partial f/\partial \alpha) \pm \{[(\partial f/\partial \alpha) - (\partial g/\partial \beta)]^2 + 4(\partial f/\partial \beta)(\partial g/\partial \alpha)\}^{1/2}}{2\partial f/\partial \beta}. \quad (2.10.15)$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция  $\beta(\alpha)$ , для которой рассматриваемое подмножество прямых лучей определяет некоторую огибающую  $\Gamma$ . В общем случае функция  $\beta(\alpha)$  зависит еще и от некоторого параметра  $\gamma$ , так что  $\Gamma$  зависит от  $\gamma$  и это можно отметить символом  $\Gamma_\gamma$ . Если  $\gamma$  изменяется непрерывно, то  $\Gamma_\gamma$  будет описывать каустику. Поскольку уравнение (2.10.15) имеет два решения, в общем случае существует две несвязанные поверхности (двулистные каустики). Можно показать [10], что кривые  $\Gamma_\gamma$  являются геодезическими линиями каустики.

*Пример. Построение каустики конгруэнции лучей.* Рассмотрим случай, когда

$$f = p, \quad g = q \quad (2.10.16)$$

(в правых частях этих соотношений неявно подразумевается наличие общего множителя, имеющего размерность длины). В соотношениях (2.10.16) величины  $p$  и  $q$  определены с помощью (2.10.2). Здесь мы рассматриваем конгруэнцию лучей, которая обладает вращательной симметрией, поскольку любой луч описывает поверхность вращения вокруг оси  $z$ , когда  $\alpha$  и  $\beta$  принимают все возможные значения, причем  $\alpha^2 + \beta^2 = \text{const}$ .

Из уравнений (2.10.15) и (2.10.16) имеем

$$d\beta/d\alpha = -\alpha/\beta, \quad d\beta/d\alpha = \beta/\alpha, \quad (2.10.17)$$

или соответственно

$$\beta = (\gamma^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \beta = \gamma\alpha. \quad (2.10.18)$$

Если использовать теперь уравнения (2.10.13) и (2.10.14), то получим выражения

$$z_c = -(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}; \quad x_c = y_c = 0, \\ z_c = -(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-3/2}; \quad \frac{x_c}{\alpha} = \frac{y_c}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{3/2}}, \quad (2.10.19)$$

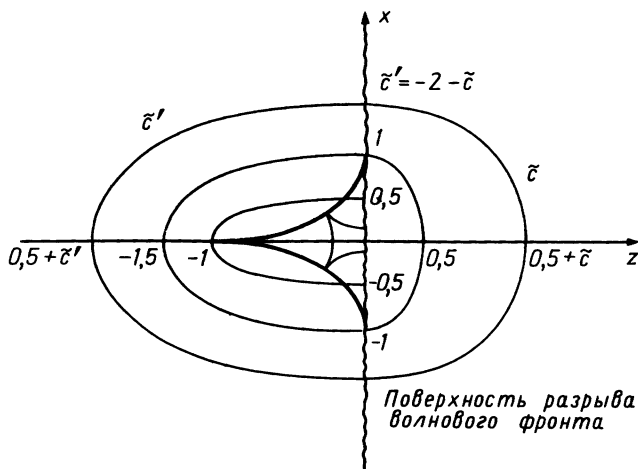


Рис. 2.18. Каустика и волновые фронты конгруэнции лучей (2.10.16). Эйконал имеет разрыв на оси  $x$  (волнистая линия), а волновые фронты пересекают оси  $z$  и  $x$  перпендикулярно им. Каустика, показанная жирной линией, соединяет точки  $(0, \pm 1)$  с точкой  $(-1, 0)$ .

которые описывают каустику [отрезок  $(-1, 0)$  на оси симметрии и поверхность вращения], соответствующую случаю вращательной симметрии (рис. 2.18). Поверхность вращения имеет вид рупора с вершиной в точке  $(0, 0, -1)$ , край которой касается плоскости  $z = 0$  по окружности  $z^2 + y^2 = 1$ . Заметим, что в этом случае каустика заключена в конечном объеме, хотя лучи занимают все пространство.

Для того чтобы найти волновые фронты, заметим, что уравнения (2.10.10) при выполнении условий (2.10.16) дают следующее уравнение:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = -\alpha(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-2}, \quad (2.10.20)$$

решение которого записывается в виде [см. (2.10.9)]

$$z(\alpha, \beta, \tilde{c}) = \frac{1}{2}(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-3/2} + \tilde{c}(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad (2.10.21)$$

где параметр  $\tilde{c}$ , определяющий конкретный волновой фронт, дается выражением

$$\tilde{c} = z(0, 0, \tilde{c}) - \frac{1}{2}. \quad (2.10.22)$$

Наконец, используя выражения (2.10.6), (2.10.16) и (2.10.21), получаем

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \left| \frac{1}{2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} + (\tilde{c} + 1) \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \right|. \quad (2.10.23)$$

Выражения (2.10.21) и (2.10.23) являются параметрическими (параметр  $\alpha^2 + \beta^2$ ) уравнениями волновых фронтов, связанных с конгруэнцией лучей (2.10.16). Следует также заметить, что благодаря (2.10.22) и взаимной ортогональности волновых фронтов и оси  $z$  параметр  $\tilde{c}$  с точностью до аддитивной постоянной совпадает с эйконалом.

## 2.11. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА НА НЕПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Одна из наиболее важных задач в оптике состоит в определении изменения волнового фронта при прохождении через последовательность линз. Это требует решения канонической задачи о преломлении конгруэнции лучей на неплоской поверхности раздела между двумя однородными средами, имеющими показатели преломления соответственно  $n$  и  $n'$ . Вопросы, на которые при этом нужно ответить, связаны с отклонением направления падающего луча и с изменением локального волнового фронта, где под «локальным» мы понимаем небольшой участок волнового фронта, через который проходит луч. Благодаря своей малой протяженности этот участок можно представить как поверхность второго порядка, характеризуемую своими главными радиусами кривизны. Поэтому задачу можно сформулировать иначе — необходимо установить связь между радиусами кривизны непосредственно до и после пересечения границы раздела. Нейсли [11] получил простые соотношения, которые мы проиллюстрируем в следующем разделе, где также кратко рассмотрим дифференциальные свойства поверхности.

### 2.11.1. Локальная шивка падающего и преломленного полей вдоль неплоской границы раздела

Рассмотрим поле, падающее на искривленную поверхность разрыва [ $f(\mathbf{r}) = 0$ ] показателя преломления. Для обеспечения непрерывности тангенциальных к поверхности электрических и магнитных компонент (что и следует из уравнений Максвелла) необходимо рассмотреть как отраженные, так и преломленные поля. Мы будем обозначать их соответственно двумя и одним штрихами (рис. 2.19). В приближении лучевого поля  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp[-ik_0 S(\mathbf{r})]$  на границе раздела  $f(\mathbf{r}) = 0$  можно написать следующие условия шивки:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{E}_0''(\mathbf{r}) e^{-ik_0[S'(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r})]} = \\ = (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{E}_0'(\mathbf{r}) e^{-ik_0[S'(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r})]}, \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

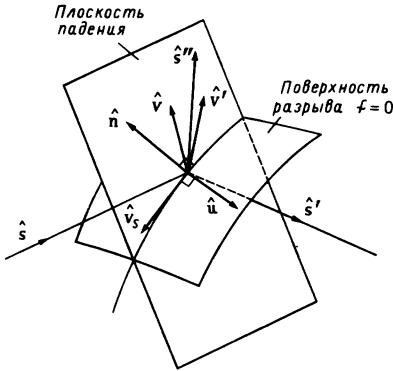


Рис. 2.19. Отражение и преломление на поверхности разрыва показателя преломления. Единичные векторы  $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $\hat{\mathbf{v}}'$  и  $\hat{\mathbf{v}}_s$  лежат в плоскости падения и перпендикулярны  $\hat{\mathbf{u}}$ .

$$\begin{aligned} & (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r})] + (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot [\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0''(\mathbf{r})] e^{-ik_0[S''(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r})]} \\ & = (\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot [\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'(\mathbf{r})] e^{-ik_0[S'(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r})]}, \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

которые обеспечивают соответственно непрерывность электрической и магнитной тангенциальных компонент (см. разд. 2.8.2). Действительно, символом  $\mathbf{1}$  мы обозначаем единичный тензор, а  $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор, ортогональный поверхности, так что  $(\mathbf{1} - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{V}$  представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{V}$  на поверхность.

В то время как амплитуды  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_0'$  и  $\mathbf{E}_0''$  — это медленно меняющиеся функции, фазовый множитель  $\exp(ik_0S)$  таковым не является. Поэтому приведенные векторные соотношения могут выполняться, только если приращения  $\Delta(S'' - S)$  и  $\Delta(S' - S)$  тождественно равны нулю на поверхности разрыва. Пусть  $n'$  — показатель преломления в области преломленного луча, а  $n$  — в области падающего и отраженного лучей. Используя (2.4.1) и (2.9.1), эти условия можно записать в виде

$$\Delta(S'' - S) = n \Delta \mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{s}}'' - \hat{\mathbf{s}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} : \nabla \nabla (S'' - S) + \dots = 0, \quad (2.11.3a)$$

$$\Delta(S' - S) = \Delta \mathbf{r} \cdot (n' \hat{\mathbf{s}}' - n \hat{\mathbf{s}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} : \nabla \nabla (S' - S) + \dots = 0. \quad (2.11.3b)$$

При этом должно быть выполнено дополнительное условие, заключающееся в том, что точка  $\mathbf{r}$  должна принадлежать поверхности  $f = 0$ , т. е.

$$\Delta \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} : \mathbf{s} + \dots = 0, \quad (2.11.4)$$

где

$$\mathbf{s} = \nabla f / |\nabla f|. \quad (2.11.5)$$

Если домножить уравнение (2.11.4) на произвольное число  $-n'\gamma$  и сложить его с (2.11.3b), то получим уравнение

$$\Delta \mathbf{r} \cdot (n' \hat{\mathbf{s}}' - n \hat{\mathbf{s}} - n' \gamma \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} : [\nabla \nabla (S' - S) - n' \gamma \mathbf{s}] + \dots = 0, \quad (2.11.6)$$

которое для бесконечно малых приращений  $\mathbf{r}$  сводится к уравнению

$$d\mathbf{r} \cdot (n'\hat{\mathbf{s}}' - n\hat{\mathbf{s}} - n'\gamma\hat{\mathbf{n}}) = 0. \quad (2.11.7)$$

Для того чтобы соотношение (2.11.7) выполнялось при любом  $d\mathbf{r}$ , тангенциальном поверхности, т. е. ортогональном вектору  $\hat{\mathbf{n}}$ , вектор  $n'\hat{\mathbf{s}}' - n\hat{\mathbf{s}}$  должен быть параллелен  $\hat{\mathbf{n}}$ . Это условие эквивалентно *закону Снеллиуса*

$$n' \sin \theta' = n \sin \theta, \quad (2.11.8)$$

связывающему углы падения и преломления  $\theta$  и  $\theta'$ , определяемые соответственно как угол между  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $-\hat{\mathbf{s}}$  и угол между  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $-\hat{\mathbf{s}}'$ . При этом направление вектора  $\hat{\mathbf{n}}$  таково, что  $\theta < \pi/2$  и  $\theta' < \pi/2$ . Кроме того, параллельность векторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $n'\hat{\mathbf{s}}' - n\hat{\mathbf{s}}$  означает, что существует такое число  $\bar{\gamma}$ , что

$$\hat{\mathbf{s}} = \mu\hat{\mathbf{s}} + \bar{\gamma}\hat{\mathbf{n}}, \quad (2.11.9)$$

причем

$$\mu = n/n'. \quad (2.11.10)$$

Отсюда следует, что *плоскость падения*  $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{s}}$  совпадает с плоскостью преломления  $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{s}}'$ . Это утверждение вместе с соотношением (2.11.8) составляет содержание хорошо известного *закона преломления* (закона Снеллиуса), установленного в 1621 г. голландским математиком из Лейденского университета Виллебрордом Снеллиусом и независимо французским философом и математиком Рене Декартом (см., например, работу [12]).

Умножая скалярно выражение (2.11.9) на  $\hat{\mathbf{n}}$ , получаем

$$\bar{\gamma} = \mu \cos \theta - \cos \theta'. \quad (2.11.11)$$

При  $\gamma = \bar{\gamma}$  первый член в уравнении (2.11.6) обращается в нуль, и мы имеем

$$d\mathbf{r} d\mathbf{r} : [\nabla\nabla(S' - S) - n'\bar{\gamma}\mathbf{s}] = 0, \quad (2.11.12)$$

Это означает, что если тензор в квадратных скобках не равен нулю, то элемент поверхности разрыва  $(x, y, z - x + dx, y + dy, z + dz)$  лежит на конусе с вершиной в точке  $\mathbf{r}$ . Поскольку мы рассматриваем регулярную точку  $\mathbf{r}$  поверхности, необходимо заключить, что

$$\nabla\nabla S' = \nabla\nabla S + n'\bar{\gamma}\mathbf{s}. \quad (2.11.13)$$

В частности, мы имеем следующие соотношения:

$$\bar{\kappa}' = \text{Sp}(\nabla\nabla S')/n' = \text{Sp}(\nabla\nabla S)/n' + \text{Sp}(\bar{\gamma}\mathbf{s}) \equiv \mu\bar{\kappa} + \text{Sp}(\bar{\gamma}\mathbf{s}), \quad (2.11.14)$$

$$\kappa' = \det(\nabla\nabla S')/n'^2 = \det(\nabla\nabla S + n'\bar{\gamma}\mathbf{s})/n'^2,$$



где  $\bar{\kappa}'$  (и  $\bar{\kappa}$ ) и  $\kappa'$  — соответственно *средняя* и *гауссова кривизна* соответствующего волнового фронта, символом  $\text{Sp}$  обозначается след, а  $\det$  — определитель двумерных матриц, образованных первыми двумя строками трехмерных матриц из (2.11.13), где третью координатную ось мы выбрали ортогональной главным осям  $\hat{t}'_1$  и  $\hat{t}'_2$  [относительно множителей при определении величин  $\bar{\kappa}'$ ,  $\bar{\kappa}$  и  $\kappa'$  см. обсуждение после формул (2.11.23)].

### 2.11.2. Главные направления и радиусы кривизны преломленного волнового фронта

Для вычисления радиусов кривизны преломленного волнового фронта введем единичный вектор  $\hat{u}$ , перпендикулярный плоскости падения  $\hat{n}\hat{s}$  (см. рис. 2.19, 2.20). Так как из (2.9.3) следует, что главные направления  $\nabla\nabla S$  ортогональны к  $\nabla S$ , т.е. и к  $\hat{s}$ , можно записать

$$\nabla\nabla S = \left( \frac{\hat{u}\hat{u}}{\rho_u} + \frac{\hat{v}\hat{v}}{\rho_v} + \frac{\hat{u}\hat{v} + \hat{v}\hat{u}}{\sigma} \right) n, \quad (2.11.15)$$

где

$$\hat{v} = \hat{u} \times \hat{s} \quad (2.11.16)$$

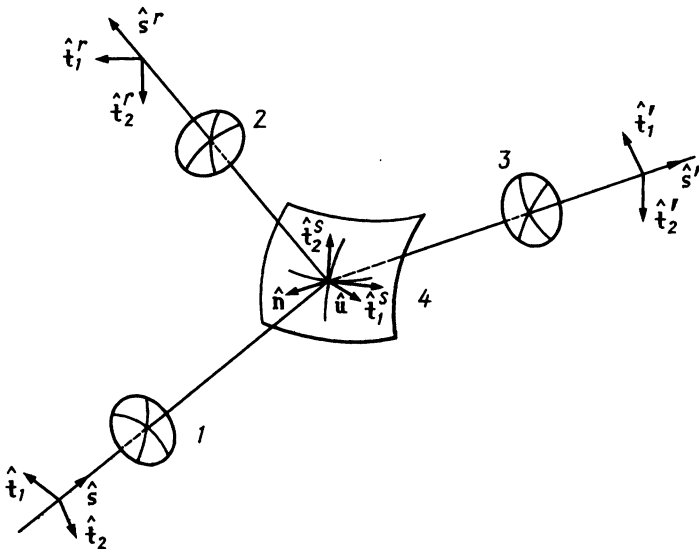


Рис. 2.20. Взаимная ориентация главных направлений падающего, отраженного и преломленного волновых фронтов. 1 — падающий волновой фронт; 2 — отраженный волновой фронт; 3 — преломленный волновой фронт; 4 — поверхность разрыва.

представляет собой единичный вектор, параллельный плоскости падения. Параметр  $\sigma$  стремится к бесконечности, если  $\hat{\mathbf{u}}$  и  $\hat{\mathbf{v}}$  совпадают с главными направлениями падающего луча.

Заметим теперь, что функцию  $f$ , равную нулю которой определяет границу разрыва, всегда можно выбрать таким образом, что  $\nabla f \cdot \nabla f = \text{const}$ . Отсюда следует «ортогональность» между  $\nabla f$  и  $\nabla \nabla f$  [см. уравнение (2.9.2)], что позволяет, используя определение (2.11.5), написать следующее выражение:

$$\mathbf{s} = \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}}{\rho_u^s} + \frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}_s}{\rho_v^s} + \frac{1}{\sigma_s}(\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}_s + \hat{\mathbf{v}}_s\hat{\mathbf{u}}), \quad (2.11.17)$$

где  $\mathbf{v}_s = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  в полной аналогии с (2.11.15). Окончательно получаем

$$\nabla \nabla S' = \left( \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}}{\rho'_u} + \frac{\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}'}{\rho'_v} + \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}' + \hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma'} \right) n', \quad (2.11.18)$$

причем

$$\hat{\mathbf{v}}' = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{s}}'. \quad (2.11.19)$$

Таким образом, соотношение (2.11.13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}}{\rho'_u} + \frac{\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}'}{\rho'_v} + \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}' + \hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma'} &= \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} \left( \frac{\mu}{\rho_u} + \frac{\bar{\gamma}}{\rho_u^s} \right) + \frac{\mu\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}{\rho_v} + \\ &+ \bar{\gamma} \frac{\hat{\mathbf{u}}_s\hat{\mathbf{v}}_s}{\rho_v^s} + \mu \left( \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{u}}}{\sigma} \right) + \bar{\gamma} \left( \frac{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}_s + \hat{\mathbf{v}}_s\hat{\mathbf{u}}}{\sigma_s} \right). \end{aligned} \quad (2.11.20)$$

Кроме того, векторное умножение (2.11.9) на  $\mathbf{u}$  дает выражение

$$\hat{\mathbf{v}}' = \mu\hat{\mathbf{v}} + \bar{\gamma}\hat{\mathbf{v}}_s, \quad (2.11.21)$$

с помощью которого нетрудно доказать [11, 13], что соотношение (2.11.13) удовлетворяется, только если

$$1/\rho'_u = \mu/\rho_u + \bar{\gamma}/\rho_u^s, \quad (2.11.22a)$$

$$(\cos \theta')/\sigma' = (\mu \cos \theta)/\sigma + \bar{\gamma}/\sigma_s, \quad (2.11.22b)$$

$$(\cos^2 \theta')/\rho'_v = (\mu \cos^2 \theta)/\rho_v + \bar{\gamma}/\rho_v^s. \quad (2.11.22b)$$

Отсюда можно определить величины  $\rho'_u$ ,  $\rho'_v$  и  $\sigma'$ . Для определения главных направлений  $\hat{\mathbf{t}}'_1$  и  $\hat{\mathbf{t}}'_2$  преломленного луча необходимо диагонализировать  $\nabla \nabla S'$ , т. е. начать вычисление с соотношения (2.11.18) и представить этот тензор в виде  $(\hat{\mathbf{t}}'_1\hat{\mathbf{t}}'_1/\rho'_1 + \hat{\mathbf{t}}'_2\hat{\mathbf{t}}'_2/\rho'_2)n'$ . Таким образом

[13], получаем следующие соотношения:

$$1/\rho'_u = (\cos^2 \phi')/\rho'_1 + (\sin^2 \phi')/\rho'_2, \quad (2.11.23a)$$

$$1/\rho'_v = (\sin^2 \phi')/\rho'_1 + (\cos^2 \phi')/\rho'_2, \quad (2.11.23б)$$

$$2/\sigma' = (1/\rho'_1 - 1/\rho'_2) \sin(2\phi'), \quad (2.11.23в)$$

где  $\phi'$  — угол, на который необходимо повернуть векторы  $\hat{u}$  и  $\hat{v}'$  в плоскости  $\hat{u}\hat{v}'$  таким образом, чтобы они совпадали с векторами соответственно  $\hat{t}'_1$  и  $\hat{t}'_2$ . Главными радиусами кривизны преломленного луча являются  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$ . Мы показали (см. разд. 2.9), что понятие радиуса кривизны связано с соотношением  $\nabla S \cdot \nabla S = 1$ , в то время как здесь мы имеем  $\nabla S \cdot \nabla S = n^2$  и  $\nabla S' \cdot \nabla S' = n'^2$ . Это расхождение учитывается множителями  $n$  и  $n'$  в соотношениях (2.11.15) и (2.11.18).

Подводя итог, можно заключить, что главные направления и радиусы кривизны волнового фронта сразу за границей, на которой происходит преломление, можно найти, применяя последовательно следующие три операции:

- 1) преобразование величин  $\rho_1, \rho_2$  к  $\rho_u, \rho_v, \sigma$  с помощью (2.11.15);
- 2) использование формул Нейсли (2.11.22);
- 3) преобразование величин  $\rho'_u, \rho'_v, \sigma'$  к  $\rho'_1, \rho'_2$  с помощью соотношений (2.11.23).

Все выкладки можно повторить и для *отраженного* волнового фронта. В частности, поскольку  $\mu = n/n'' = 1$ , имеем  $\bar{\theta}'' = \pi - \theta$  и  $\gamma = 2\cos\theta$ . Кроме того, плоскость падения совпадает с *плоскостью отражения*  $\hat{n}\hat{s}''$ . Первое и третье утверждения составляют *закон преломления*.

### 2.11.3. Сферические преломляющие поверхности

Рассмотрим в качестве примера сферическую поверхность разрыва (например, переднюю поверхность сферической линзы) радиусом  $R^s = \rho'_u = \rho'_v$ . В этом случае любая пара взаимно ортогональных осей (ортогональных также и вектору  $\hat{n}$ ) диагонализует матрицу (2.11.17), т. е.  $1/\sigma_s = 0$  и

$$\begin{aligned} 1/\rho'_u &= \mu/\rho_u + \bar{\gamma}/R^s, \\ 1/\sigma' &= (\mu \cos \theta)/(\sigma \cos \theta'), \\ 1/\rho'_v &= (\mu \cos^2 \theta)/(\rho_v \cos^2 \theta') + \bar{\gamma}/(R^s \cos^2 \theta'). \end{aligned} \quad (2.11.24)$$

Если падающий волновой фронт также сферический, то из второго уравнения (2.11.24) имеем  $1/\sigma = 0$ , так что  $\phi' = 0$  [см. (2.11.23в)] и, как следствие,  $\hat{u}$  и  $\hat{v}'$  являются главными направлениями отраженного

луча (рис. 2.21). Таким образом, имеем

$$\rho'_1 = \rho'_u, \quad \rho'_2 = \rho'_v, \quad (2.11.25)$$

или

$$1/\rho'_1 = \mu/R + \bar{\gamma}/R^2, \quad (2.11.26a)$$

$$1/\rho'_2 = (\mu \cos^2 \theta)/(R \cos^2 \theta') + \bar{\gamma}/(R^2 \cos^2 \theta'); \quad (2.11.26b)$$

здесь  $R$  — радиус кривизны падающего волнового фронта. Следовательно, радиусы кривизны  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$  преломленного волнового фронта в общем случае различны, а совпадают лишь при  $\theta = \theta' = 0$  (нормальное падение). С этим связан определенный астигматизм пучка преломленных лучей, который тем больше, чем сильнее угол падения отличается от нормального.

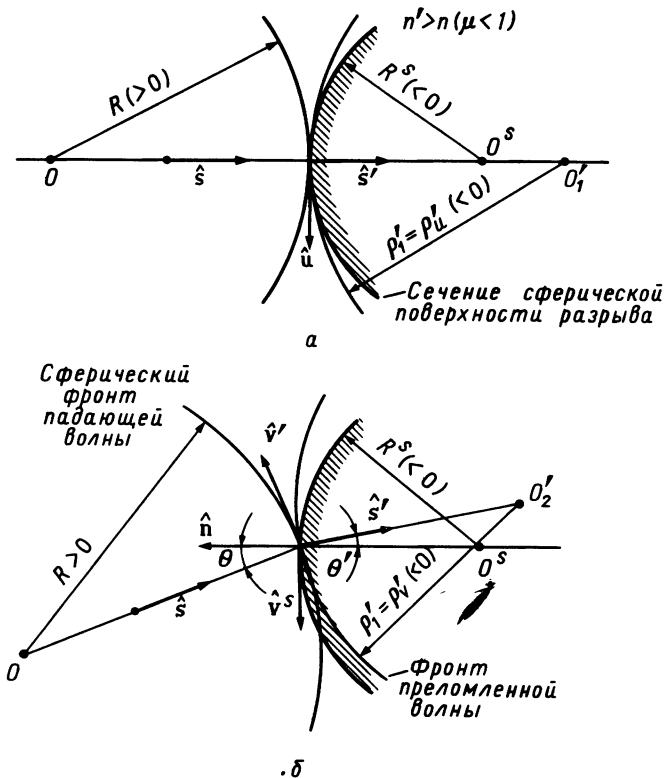


Рис. 2.21. Изменение главных радиусов кривизны начального сферического волнового фронта, проходящего через сферическую поверхность разрыва. *a* — сечение, перпендикулярное плоскости падения; *b* — сечение, параллельное плоскости падения.

## 2.11.4 Параксиальное приближение

При нормальном падении, как следует из соотношения (2.11.11), мы имеем  $\bar{\gamma} = \mu - 1$ . Таким образом, если положить  $\rho'_1 = \rho'_2 = -d'$ , то (2.11.26а) сводится к хорошо известному соотношению

$$n'/d' + n/d = (n' - n)/R^s = n/f = n'/f' \quad (2.11.27)$$

(рис. 2.22). Здесь  $d \equiv R$ , а  $f$  и  $f'$  — фокусные расстояния. Соотношение (2.11.27) позволяет связать расстояние  $d'$  между точкой изображе-

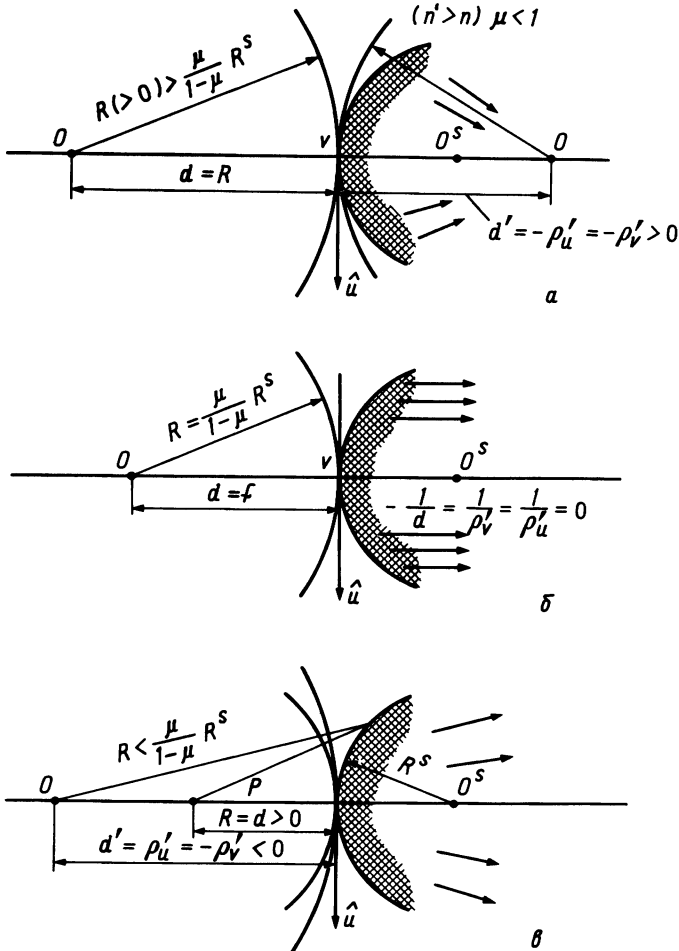


Рис. 2.22. Изменение преломленного волнового фронта в зависимости от положения источника. а —  $\rho'_1 = \rho'_2 < 0$ ; б —  $\rho'_1 = \rho'_2 = \infty$ ; в —  $\rho'_1 = \rho'_2 > 0$ .

ния  $O'$  и вершиной  $V$  сферической поверхности разрыва с расстоянием  $d$  между точкой предмета  $O$  и вершиной  $V$ . Следует заметить, что в примерах на рис. 2.22 величину  $R^s$  нужно выбрать положительной. Действительно, из уравнения (2.11.4) получаем, что вектор  $\nabla f$  направлен по нормали  $\hat{n}$ , которая в свою очередь ориентирована в противоположном направлении по отношению к центру кривизны поверхности. Отсюда следует, что величина  $R^s$  положительна. Точно так же ранее мы считали, что расходящийся сферический волновой фронт имеет положительный радиус кривизны (см. разд. 2.9).

На рис. 2.22 представлены следующие частные случаи: на рис. 2.22,а — случай, когда  $\rho_1 = \rho_1' < 0$ , на рис. 2.22,б мы имеем  $\rho_1' = \rho_2' = \infty$ , а на рис. 2.22,в — случай, когда  $\rho_1' = \rho_2' > 0$ . Действительно, на рис. 2.22,а изображена сходящаяся преломленная волна, на рис. 2.22,б — плоская преломленная волна, а на рис. 2.22,в — расходящаяся преломленная волна, так что знаки радиусов кривизны согласуются с результатами, полученными в разд. 2.9.

### 2.11.5. Сферические отражающие поверхности

Рассмотрим другой пример — сферическую волну, отраженную сферической поверхностью. В этом случае, делая в соотношении (2.11.11) замену  $\theta' \rightarrow \theta''$ , получаем

$$\bar{y} = 2 \cos \theta, \quad (2.11.28)$$

где мы учли, что  $\mu = n/n'' = 1$  и  $\theta'' = \pi - \theta$ . Таким образом, по аналогии с (2.11.26) имеем

$$1/\rho_2'' = 1/\rho_1'' + (2 \operatorname{tg} \theta \sin \theta)/R^s, \quad (2.11.29)$$

Отсюда можно оценить степень астигматизма пучка отраженных лучей по сравнению со случаем нормального падения ( $\rho_2'' = \rho_1''$ ).

В заключение заметим, что геометрическая оптика не позволяет определить коэффициенты пропускания (или отражения), т. е. связать амплитуды падающих и преломленных (или отраженных) электромагнитных полей. Этой цели можно достичь, используя формулы Френеля (см. разд. 3.8), применимость которых строго обоснована лишь для плоских границ раздела.

## 2.12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Наиболее мощный метод решения волнового уравнения Гельмгольца состоит в отыскании подходящей системы ортогональных координат

$x_1, x_2, x_3$ , для которых поле можно представить в виде произведения функций одной координаты  $x_i$ , т. е.  $u = u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)$ . Этот метод (*разделение переменных*) можно использовать и для решения уравнения эйконала, но в этом случае  $S$  нужно представить в виде *суммы* функций одного аргумента  $x_i$ . Существование таких координат связано с функциональной зависимостью  $n^2(\mathbf{r})$ . Ниже мы рассмотрим несколько практически важных случаев.

### 2.12.1. Декартовы координаты

Во многих практически важных случаях выбор соответствующей системы координат позволяет разложить квадрат показателя преломления на простые слагаемые [14]. В качестве предварительного примера рассмотрим случай, когда функция  $n^2$  разделяется в декартовых координатах, т. е.

$$n^2(\mathbf{r}) = f(x) + g(y) + h(z). \quad (2.12.1)$$

Если искать эйконал в виде

$$S(\mathbf{r}) = X(x) + Y(y) + Z(z), \quad (2.12.2)$$

то уравнение (2.3.1) разделится на три следующих уравнения:

$$\begin{aligned} (dX/dx)^2 &= a + f(x), \\ (dY/dy)^2 &= b + g(y), \\ (dZ/dz)^2 &= c + h(z), \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

где  $a, b$  и  $c$  — три постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$a + b + c = 0. \quad (2.12.4)$$

Таким образом, можно написать

$$S(\mathbf{r}) = \int^x [f(x') + a]^{1/2} dx' + \int^y [g(y') + b]^{1/2} dy' + \int^z [h(z') + c]^{1/2} dz', \quad (2.12.5)$$

что дает

$$\nabla^2 S = \frac{1}{2} [f(x) + a]^{-1/2} \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} [g(y) + b]^{-1/2} \frac{dg}{dy} + \frac{1}{2} [h(z) + c]^{-1/2} \frac{dh}{dz}, \quad (2.12.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla S &= [f(x) + a]^{1/2} \hat{x} + [g(y) + b]^{1/2} \hat{y} + [h(z) + c]^{1/2} \hat{z} = \\ &= (f + g + h)^{1/2} \hat{s}. \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

Последнее равенство является следствием выражений (2.4.1) и (2.12.1). Поскольку  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{x}} ds = dx$  и

$$n\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \partial S / \partial x = [f(x) + a]^{1/2}, \quad (2.12.8)$$

мы имеем

$$ds/n(s) = dx/[f(x) + a]^{1/2} = dy/[g(y) + b]^{1/2} = dz/[h(z) + c]^{1/2}, \quad (2.12.9)$$

откуда с помощью выражения (2.12.6) получаем

$$\int^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds' = \frac{1}{2} \ln[(f + a)(g + b)(h + c)] + \text{const}, \quad (2.12.10)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2} \int^s \frac{\nabla^2 S}{n(s')} ds'\right] \propto (f + a)^{-1/4} (g + b)^{-1/4} (h + c)^{-1/4}. \quad (2.12.11)$$

Из соотношения (2.5.5) следует, что лучевое поле можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \exp[-ik_0 S(\mathbf{r})] A_0(\mathbf{r}) \\ &= F(\mathbf{r}) [f(x) + a]^{-1/4} [g(y) + b]^{-1/4} [h(z) + c]^{-1/4} \times \\ &\quad \times \exp\left\{-ik_0 \left[ \int^x [f(x') + a]^{1/2} dx' + \int^y [g(y') + b]^{1/2} dy' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int^z [h(z') + c]^{1/2} dz' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.12.12)$$

где функция  $F(\mathbf{r})$  сохраняет постоянным свое значение вдоль каждого луча. Таким образом, поле полностью определяется геометрией конгруэнции лучей и своим распределением на волновом фронте или (в более общем случае) на поверхности, пересекающей все лучи.

Заметим, что выражение для поля (2.12.12) расходится, когда какой-либо из множителей  $f + a$ ,  $g + b$  или  $h + c$  обращается в нуль. Таким образом, соотношения

$$f(x_c) = -a, \quad g(y_c) = -b, \quad h(z_c) = -c = a + b \quad (2.12.13)$$

определяют все возможные плоские поверхности каустики  $x = x_c$ ,  $y = y_c$ ,  $z = z_c$ .

### 2.12.1.a. Аксиально-симметричное распределение показателя преломления

Важным частным случаем является *аксиально-симметричный* профиль квадрата показателя преломления  $n^2(\mathbf{r})$ :

$$n^2(\mathbf{r}) = -\alpha(x^2 + y^2) + n_0^2, \quad (2.12.14)$$



откуда следует, что

$$f(x) = -\alpha x^2, \quad g(y) = -\alpha y^2, \quad h(z) = n_0^2. \quad (2.12.15)$$

Соответствующий эйконал запишется в виде

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}x(-\alpha x^2 + a)^{1/2} - (ia/2\alpha^{1/2}) \ln[ix(\alpha/a)^{1/2} + (1 - x^2\alpha/a)^{1/2}] + \\ + \frac{1}{2}y(-\alpha y^2 + b)^{1/2} - (ib/2\alpha^{1/2}) \ln[iy(\alpha/b)^{1/2} + (1 - y^2\alpha/b)^{1/2}] + \\ + (n_0^2 + c)^{1/2}z + \text{const}. \quad (2.12.16)$$

В частности, в случае когда  $x^2 \gg |a|/\alpha$  и  $y^2 \gg |b|/\alpha$ , т. е. вдали от оптической оси, из (2.12.12) получаем

$$u(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})(-\alpha x^2 + a)^{-1/4}(-\alpha y^2 + b)^{-1/4}(n_0^2 + c)^{-1/4} \times \\ \times \exp[-k_0\alpha^{1/2}(x^2 + y^2)/2 - ik_0(n_0^2 + c)^{1/2}z] \times \\ \times x^{k_0a/(2\alpha^{1/2})}y^{k_0b/(2\alpha^{1/2})}. \quad (2.12.17)$$

Следовательно, при  $\alpha > 0$  поле затухает в радиальном направлении по закону Гаусса. Поле (2.12.17) описывает волноводную моду, распространяющуюся вдоль оси  $z$  с постоянной распространения

$$\beta = k_0(n_0^2 + c)^{1/2}. \quad (2.12.18)$$

### 2.12.1.6. Линзоподобные среды

В случае когда показатель преломления является убывающей функцией расстояния от оптической оси, такие среды называют *линзоподобными*. Для того чтобы исключить нефизические сингулярности на каустике, необходимо наложить следующие дополнительные условия (см. разд. 3.3.4, в котором рассматривается распространение излучения вдоль оси  $x$ ):

$$k_0[X(|x_c|) - X(-|x_c|)] = (p + \frac{1}{2})\pi, \quad (2.12.19)$$

$$k_0[Y(|y_c|) - Y(-|y_c|)] = (q + \frac{1}{2})\pi.$$

При этом с помощью (2.12.16) и соотношений  $x_c^2 = a/\alpha$  и  $y_c^2 = b/\alpha$  можно написать следующие выражения:

$$k_0a/2\alpha^{1/2} - 1/2 = p, \quad k_0b/2\alpha^{1/2} - 1/2 = q, \quad (2.12.20)$$

которые определяют дискретный набор значений  $a$ ,  $b$  и, следовательно,  $\beta$ . Точнее говоря, соотношения (2.12.8) и (2.12.4) дают

$$\beta = \beta_{pq} = k_0[n_0^2 - 2\alpha^{1/2}(p + \frac{1}{2})/k_0 - 2\alpha^{1/2}(q + \frac{1}{2})/k_0]^{1/2} \cong \\ \cong k_0n_0 - \alpha^{1/2}(p + q + 1)/n_0. \quad (2.12.21)$$

Если сравнить данное выражение с результатом волнового анализа параболического профиля в многомодовых оптических волокнах, то

мы обнаружим полное согласие, которое свидетельствует о больших потенциальных возможностях метода геометрической оптики [см. выражение (8.7.19)].

### 2.12.1.в. Физические свойства комплексных эйконалов

Необходимо сделать несколько замечаний, чтобы прояснить физический смысл комплексного эйконала. Простое исследование выражения (2.12.16) показывает, что  $S(\mathbf{r})$  имеет ненулевую мнимую часть, если хотя бы одна из величин  $a - \alpha x^2$  или  $b - \alpha y^2$  отрицательна. Это позволяет разделить все пространство на две области — *освещенную сторону* каустики, для которой

$$a - \alpha x^2 > 0, \quad b - \alpha y^2 > 0,$$

и *темную сторону*, для которой хотя бы одно из этих условий не выполняется.

Освещенная область характеризуется вещественным эйконалом, темная же область — комплексным эйконалом, приводящим к экспоненциальному затуханию электрического поля с увеличением расстояния от каустики [см. выражение (2.12.17) и пример в разд. 2.7]. В соответствии с этим луч, приходящий из светлой зоны, подходит к каустике по касательной и приводит к появлению отраженного назад действительного луча и *комплексного луча*, проникающего в темную зону.

В темной области единичный вектор  $\hat{\mathbf{S}}$  принимает комплексные значения. Точнее говоря, компонента вектора  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$ , перпендикулярная каустике, является чисто мнимой при  $\mathbf{r}$ , принадлежащих самой каустике. Это означает, что в соответствующем направлении нет потока энергии и прошедшему полю вообще не передается энергия падающего поля. Однако неравенство нулю поля означает, что в темной зоне аккумулируется *реактивная энергия*, которая связана со скачком фазы на  $\pi/2$  при пересечении каустики, как показано в разд. 2.10 для случая однородных сред (см. 2.17).

В освещенной области единичный вектор  $\hat{\mathbf{S}}$  является вещественным. Ниже при рассмотрении теории дифракции мы покажем, что поле вблизи каустики хорошо описывается функциями Эйри, асимптотика которых в освещенной области вдали от каустики имеет вид двух бегущих волн в соответствии с представлением геометрической оптики.

Полученные выше результаты справедливы для произвольного распределения показателя преломления  $n(\mathbf{r})$ . Однако в любом случае геометрическая оптика сама по себе не позволяет вычислить коэффициенты отражения и пропускания для волны, касающейся каустики.

Эту задачу можно решить лишь при введении определенных переходных функций, обеспечивающих сшивку поля по обе стороны от каустики (разд. 3.3).

### 2.12.2. Цилиндрические координаты

Рассмотрим теперь случай, когда переменные разделяются в цилиндрических координатах, т. е.

$$n^2(\mathbf{r}) = f(\rho) + g(\phi)/\rho^2 + h(z). \quad (2.12.23)$$

При этом эйконал имеет вид

$$S(\mathbf{r}) = R(\rho) + \Phi(\phi) + Z(z). \quad (2.12.24)$$

и является решением уравнения (2.3.1), если

$$(dR/d\rho)^2 + (1/\rho^2)(d\Phi/d\phi)^2 + (dZ/dz)^2 = f(\rho) + g(\phi)/\rho^2 + h(z). \quad (2.12.25)$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \int^{\rho} \left[ f(\rho') - \frac{b}{\rho'^2} - c \right]^{1/2} d\rho', \\ \Phi(\phi) &= \int^{\phi} [g(\phi') + b]^{1/2} d\phi', \\ Z(z) &= \int^z [h(z') + c]^{1/2} dz', \end{aligned} \quad (2.12.26)$$

где  $b$  и  $c$  — постоянные, а  $\Phi$  удовлетворяет условию периодичности

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) + 2m\pi/k_0 \quad (m — целое). \quad (2.12.27)$$

При этом функция  $\exp[-ik_0 S(\mathbf{r})]$  определена однозначно. Таким образом, если  $g = 0$ , то

$$\Phi(\phi) = m\phi/k_0 + \text{const}, \quad (2.12.28)$$

$$b = m^2/k_0^2. \quad (2.12.29)$$

Действуя далее так же, как и в случае декартовых координат, можно показать, что

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \frac{F(\mathbf{r})}{\rho^{1/2}} \left[ f(\rho) - c - \frac{b}{\rho^2} \right]^{-1/4} [g(\phi) + b]^{-1/4} [h(z) + c]^{-1/4} \times \\ &\times \exp \left\{ -ik_0 \left[ \int^{\rho} \left( f(\rho') - c - \frac{b}{\rho'^2} \right)^{1/2} d\rho' + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int^{\phi} (g(\phi') + b)^{1/2} d\phi' + \int^z (h(z') + c)^{1/2} dz' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.12.30)$$

причем функция  $F(\mathbf{r})$  постоянна вдоль луча.

2.12.2.а. *Аксиально-симметричный профиль показателя преломления*

При  $g = 0$  и  $h = \text{const}$  профиль показателя преломления является аксиально-симметричным и выражение (2.12.30) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{F(\mathbf{r})}{\rho^{1/2}} \left[ n^2(\rho) - \frac{\beta^2}{k_0^2} - \frac{m^2}{(k_0^2 \rho^2)} \right]^{-1/4} \times \\ \times \exp \left\{ -ik_0 \int^\rho \left[ n^2(\rho') - \frac{\beta^2}{k_0^2} - \frac{m^2}{(k_0^2 \rho'^2)} \right]^{1/2} d\rho' - i\beta z - im\phi \right\}, \quad (2.12.31)$$

где мы использовали соотношения (2.12.23) и (2.12.29), а также определение

$$\beta = k_0(h + c)^{1/2}. \quad (2.12.32)$$

Каустикой является двулиственный круговой цилиндр с радиусами  $\rho_{\max}$  и  $\rho_{\min}$ , определяемыми двумя последовательными нулями множителя  $[n^2(\rho) - \beta^2/k_0^2 - m^2/(k_0^2 \rho^2)]$  в выражении (2.12.31). В полной аналогии со случаем декартовых координат можно наложить следующее условие:

$$k_0[R(\rho_{\max}) - R(\rho_{\min})] = (v + \frac{1}{2})\pi \quad (v — \text{целое}), \quad (2.12.33)$$

которое позволяет определить дискретный набор возможных постоянных распространения  $\beta_{\text{vm}}$ . При этом выражение (2.12.31) описывает волноводные моды оптического волокна с профилем показателя преломления  $n(\rho)$ . Параболический профиль  $n(\rho)$ , определяемый выражением (2.12.14), получается в случае, когда

$$n^2(\rho) = -\alpha\rho^2 + n_0^2. \quad (2.12.34)$$

2.12.3. *Сферические координаты*

Если переменные для  $n^2$  разделяются в *сферических координатах* и распределение  $n^2$  симметрично относительно оси  $z$ , т. е.

$$n^2(\mathbf{r}) = h(r) + g(\theta)/r^2, \quad (2.12.35)$$

то эйконал имеет вид  $S(\mathbf{r}) = R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\phi)$ , и нетрудно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$R(r) = \int^r \left[ h(r') + \frac{c}{r'^2} \right]^{1/2} dr', \\ \Theta(\theta) = \int^\theta \left[ g(\theta') - c - \frac{m^2}{(k_0^2 \sin^2 \theta')} \right]^{1/2} d\theta', \quad (2.12.36) \\ \Phi(\phi) = \frac{m\phi}{k_0},$$

если записать уравнение (2.3.1) в сферических координатах. Затем обычным образом можно получить

$$u(\mathbf{r}) = \frac{F(\mathbf{r})}{r} \left[ h(r) + \frac{c}{r^2} \right]^{-1/4} [(g(\theta) - c)k_0^2 \sin^2 \theta - m^2]^{-1/4} \times \\ \times \exp \left\{ -ik_0 \left[ \int^r \left( h(r') + \frac{c}{r'^2} \right)^{1/2} dr' + \right. \right. \\ \left. \left. + \int^\theta \left( g(\theta') - c - \frac{m^2}{(k_0^2 \sin^2 \theta')} \right)^{1/2} d\theta' \right] - im\phi \right\}, \quad (2.12.37)$$

где функция  $F(\mathbf{r})$  постоянна вдоль луча.

*Пример. Рассеяние на теле конечных размеров.* Если выбрать параметры  $c = m = 0$ , то выражение (2.12.37) для случая однородной среды вне сферы радиусом  $R$  сводится к сферической волне (сферические волновые фронты)

$$u(\mathbf{r}) = f(\theta, \phi) e^{-ik_0 r} / r, \quad (2.12.38)$$

где без потери общности мы выбрали  $h = 1$ . Исходя из этого выражения, можно построить ряд Луненберга — Клейна. Для этого заметим, что, выражая оператор  $\nabla^2$  в сферических координатах и используя зависимость  $A_0(s) = A_0(r) \propto 1/r$ , оператор  $L$  в (2.6.6) можно записать в виде

$$\hat{L}^2 = \frac{-1}{2r} \int_\infty^r \frac{(\partial/\partial r') r'^2 (\partial/\partial r') + \hat{D}^2}{r'} dr' = \\ = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{D}^2}{r} \int_\infty^r \frac{dr'}{r'} \right), \quad (2.12.39)$$

где

$$\hat{D}^2(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.12.40)$$

Нижний предел интеграла в (2.12.39) равен  $\infty$ , поскольку мы предположили, что  $A_m(\infty) = 0$  при  $m \neq 0$  [см. вывод выражения (2.6.6)]. Отсюда следует, что (2.12.38) является *точным выражением* для поля при  $r \rightarrow \infty$ . Если теперь положить

$$(i/k_0)^n \hat{L}^n f(\theta, \phi) / r = f_n(\theta, \phi) / r^{n+1}, \quad (2.12.41)$$

то выражение

$$A_0(r) = f(\theta, \phi) / r \quad (2.12.42)$$

вместе с рекуррентными соотношениями (2.6.7) и разложением (2.2.5) приводит к тому, что поле можно записать в виде

$$u(\mathbf{r}) \sim \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m(\theta, \phi)}{r^m}. \quad (2.12.43)$$

Коэффициенты  $f_n$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$-2ik_0(n+1)f_{n+1} = [n(n+1) + \hat{D}^2]f_n, \quad (2.12.44)$$

где  $f_0 \equiv f$ . Это легко доказать, раскладывая  $f_n$  в ряд по сферическим гармоникам  $Y_l^m(\theta, \phi)$ , которые являются собственными функциями оператора  $D^2$ . Таким образом, ряд (2.12.43) оказывается суммой членов, каждый из которых является произведением  $Y_l^m$  и сферических функций Ханкеля  $h_n(k_0 r)$  (см. разд. 6.12).

С интуитивной точки зрения из выполненных выше расчетов следует, что поле можно вычислить в любой точке (по крайней мере в смысле Лунберга — Клейна), если известно его *распределение*  $f(\theta, \phi)$  в *дальней зоне*. Это свойство тесно связано с возможностью интегрального представления поля с учетом его значений на поверхности (см. разд. 4.2.2).

Рассмотрим поток вектора  $|u|^2 \mathbf{r}$  через сферу:

$$\int_{4\pi} |u|^2 r^2 d\Omega \underset{r \rightarrow \infty}{=} \int_{4\pi} |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega. \quad (2.12.45)$$

Отсюда следует, что величина  $|f|^2 d\Omega$  пропорциональна мощности, излучаемой в телесный угол  $d\Omega$ , а весь интеграл пропорционален полной мощности, излучаемой в бесконечность.

Можно рассмотреть также случай среды, неоднородной при  $r < R$  и освещаемой плоской волной *единичной амплитуды*. В этом случае величина  $\exp(-ik_0 r) f(\theta, \phi)/r$  представляет собой поле рассеяния на бесконечности. *Амплитуда рассеяния* [3] равна  $f$  (см. разд. 6.11), а величина

$$|f|^2 \equiv \sigma(\theta, \phi) \quad (2.12.46)$$

является *дифференциальным сечением*, которое зависит от структуры рассеивающей среды. Как будет видно в следующем разделе, величину  $\sigma$  можно вычислить, проследивая изменение поля  $u$  вдоль каждого луча коллимированной конгруэнции, описывающей изначально плоскую волну. Эти вычисления существенно упрощаются, если неоднородная среда имеет центр симметрии.

### 2.13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЛУЧЕЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Во многих случаях метод разделения переменных позволяет получить параметрическое представление траекторий лучей. Пусть  $\mu, \nu, \sigma$  — ортогональные криволинейные координаты, а  $h_\mu, h_\nu, h_\sigma$  — соответствующие масштабные множители. Тогда

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = h_\mu^2(d\mu)^2 + h_\nu^2(d\nu)^2 + h_\sigma^2(d\sigma)^2. \quad (2.13.1)$$

Если обозначить через  $\mu, \nu, \sigma$  координаты точек на данном луче, то, проецируя векторное соотношение (2.4.1) на координатную ось  $\mu$ , получаем

$$1 + \frac{h_\nu^2}{h_\mu^2} \left( \frac{d\nu}{d\mu} \right)^2 + \frac{h_\sigma^2}{h_\mu^2} \left( \frac{d\sigma}{d\mu} \right)^2 = \frac{n^2 h_\mu^2}{(\partial S / \partial \mu)^2}, \quad (2.13.2)$$

где  $\nu$  и  $\sigma$  можно рассматривать на луче как функции координаты  $\mu$ . Аналогичные соотношения справедливы при замене  $\mu$  на  $\nu$  или  $\sigma$ .

#### 2.13.1. Аксиально-симметричные среды

Если

$$n^2(\mathbf{r}) = f(\rho) + h(z), \quad (2.13.3)$$

то соотношение (2.13.2) можно переписать в виде [см. выражение для  $S$  в формуле (2.12.31)]

$$1 + \rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 = \frac{n^2 k_0^2 \rho^2}{n^2 k_0^2 \rho^2 - \beta^2(z) \rho^2 - m^2}, \quad (2.13.4)$$

где выбраны цилиндрические координаты  $(\rho, \phi, z) = (\mu, \nu, \sigma)$ . Если  $h$  зависит от  $z$ , то  $\beta$  представляет собой также функцию от  $z$  и эту функцию можно определить, используя (2.12.33) в каждом сечении  $z = \text{const}$ . Используя теперь (2.13.2) для  $\rho$  вместо  $z$ , получаем

$$1 + \rho^2 (d\phi/dz)^2 + (d\rho/dz)^2 = n^2 k_0^2 / \beta^2(z). \quad (2.13.5)$$

Из системы уравнений (2.13.4) и (2.13.5) следует, что

$$\rho d\phi/d\rho = m / [n^2 k_0^2 \rho^2 - \beta^2(z) \rho^2 - m^2]^{1/2}, \quad (2.13.6)$$

$$dz/d\rho = \beta \rho / [n^2 k_0^2 \rho^2 - \beta^2(z) \rho^2 - m^2]^{1/2}. \quad (2.13.7)$$

Разделив первое из этих уравнений на второе, имеем

$$d\phi/dz = m / \beta(z) \rho^2. \quad (2.13.8)$$

Заметим, что эти уравнения можно получить непосредственно из уравнения для лучей. При этом величина  $m$  не обязательно является

целой. Здесь мы рассматриваем конгруэнцию лучей, волновые фронты которых распространяются по всему пространству. Этот частный случай соответствует эйконалу типа (2.12.24), для которого величина  $m$  должна быть целой. С другой стороны, пытаясь покрыть все пространство множеством лучей с нецелым  $m$ , мы не можем определить однозначный эйконал. Поэтому мы будем рассматривать нецелые  $m$  только для лучей, образующих трубку с малым поперечным сечением.

Величину  $m$  называют, как правило, *инвариантом наклона*, так как она связана с поперечными направляющими косинусами  $p'$  и  $q'$  соотношением

$$m = k_0 \frac{\partial S}{\partial \phi} = k_0 \left( x \frac{\partial S}{\partial y} - y \frac{\partial S}{\partial x} \right) = k_0 n(xq' - yp'). \quad (2.13.9)$$

Если  $n$  не зависит от  $z$ , то  $\beta$  является интегралом движения и

$$\beta = k_0 \partial S / \partial z = k_0 n(\rho) \cos \gamma, \quad (2.13.10)$$

где  $\cos \gamma$  — направляющий косинус относительно оси  $z$ .

*Меридиональные лучи* ( $m = 0$ ) лежат в плоскостях, содержащих ось  $z$  [см. (2.13.8)]. Для них из уравнения (2.13.7) следует, что

$$d^2 \rho / dz^2 = \frac{1}{2} (k_0 / \beta)^2 d(n^2) / d\rho. \quad (2.13.11)$$

Общее решение этого уравнения определяет все возможные меридиональные траектории.

*Пример 1: меридиональные лучи в градиентных волокнах.* Рассмотрим в качестве примера среду с показателем преломления, распределенным следующим образом:

$$n^2(\rho) = n_0^2 [1 - \delta(\rho/\rho_0)^2 + \alpha_2 \delta^2(\rho/\rho_0)^4 + \alpha_3 \delta^3(\rho/\rho_0)^6 + \dots], \quad (2.13.12)$$

где  $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ ,  $\delta$ ,  $\rho_0$  — произвольные постоянные. Используя нормализованные координаты

$$R = \rho / \rho_0, \quad (2.13.13)$$

$$Z = z \delta^{1/2} n_0 k_0 / (\beta \rho_0), \quad (2.13.14)$$

уравнение (2.13.11) можно переписать в виде

$$\ddot{R} + R = R \sum_{j=2}^{\infty} j \alpha_j \delta^{j-1} R^{2(j-1)}, \quad (2.13.15)$$

где две точки над  $R$  обозначают вторую производную по  $Z$ . Это нелинейное дифференциальное уравнение, сводящееся при  $\alpha_j = 0$  к уравнению гармонического осциллятора. При этом лучи описывают синусоидальные траектории с пространственным периодом

$$\Lambda = 2\pi \rho_0 \beta / (\delta^{1/2} n_0 k_0), \quad (2.13.16)$$



который через величину  $\beta$  зависит как от начального ( $Z = 0$ ) радиального положения  $\rho_{in}$ , так и от угла  $\gamma_{in}$  относительно оси  $z$ . В общем случае решением уравнения (2.13.15) является периодическая функция  $R(Z + 2\pi/\Omega) = R(Z)$ , где  $\Omega$  — угловая частота, которая зависит от параметра нелинейности  $\delta$ , набора коэффициентов  $\alpha_j$  и начальных условий  $R_0$  и  $R_0$ . Следовательно, функцию  $R(Z)$  можно представить в виде ряда Фурье (метод Линштедта [15], см. также метод Крылова, Боголюбова, Митропольского [16]):

$$R(Z) = a \cos(\Omega Z + \psi_{in}) + \sum_{\substack{k=1 \\ j \geq k}}^{\infty} \frac{a^{2j+1} \delta^j}{2^{4j}} A_{j, 2k+1} \times \\ \times \cos[(2k+1)(\Omega Z + \psi_{in})]. \quad (2.13.17)$$

Постоянные  $a$ ,  $\Omega$  и  $\psi_{in}$  удобно записать в виде степенных рядов по  $\delta$ :

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta^j, \quad (2.13.18)$$

$$\Omega = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j a^{2j}}{2^{4j-2}} B_j, \quad (2.13.19)$$

$$\psi_{in} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \delta^j. \quad (2.13.20)$$

Если подставить эти разложения в ряд Фурье (2.13.17), то из уравнения (2.13.15) следует, что

$$A_{1,3} = -\alpha_2, \quad B_1 = 3\alpha_2, \quad (2.13.21)$$

$$a_j = \frac{a_0^{2j+1}}{2^{4j}} \sum_{k=0}^{2j} C_{j,2k} \cos(2k\psi_0), \quad (2.13.22)$$

$$\psi_j = \frac{a_0^{2j}}{2^{4j}} \sum_{k=1}^{2j} S_{j,2k} \sin(2k\psi_0), \quad (2.13.23)$$

где  $a_0$  и  $\psi_0$  определяется через начальные условия

$$R_{in} = a_0 \cos \psi_0, \quad \dot{R}_{in} = -a_0 \sin \psi_0. \quad (2.13.24)$$

Кроме того, коэффициенты  $C_{j,2k}$ ,  $S_{j,2k}$  зависят от  $\alpha_j$ . В частности,

$$C_{1,0} = 6\alpha_2, \quad C_{1,2} = -4\alpha_2, \quad C_{1,4} = -\alpha_2, \\ S_{1,2} = 8\alpha_2, \quad S_{1,4} = \alpha_2. \quad (2.13.25)$$

Если оборвать ряд (2.13.17) на члене  $j = 1$ , то рассмотренный выше метод позволяет написать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 R(Z) &\cong a \cos \psi(Z) + \delta A_{1,3} \frac{a^3}{16} \cos[3\psi(Z)] = \\
 &= a \cos \psi(Z) - \delta \alpha_2 \frac{a^3}{16} \cos[3\psi(Z)], \quad (2.13.26)
 \end{aligned}$$

где

$$a = a_0 + \frac{\delta a_0^3}{16} \alpha_2 [6 - 4 \cos(2\psi_0) - \cos(4\psi_0)], \quad (2.13.27)$$

$$\psi(Z) = \left(1 - \frac{3\delta a_0^2 \alpha_2}{4}\right) Z + \psi_0 + \frac{\delta a_0^2 \alpha_2 [8 \sin(2\psi_0) + \sin(4\psi_0)]}{16}. \quad (2.13.28)$$

Сравнивая (2.13.28) и (2.13.19), с помощью выражения (2.13.14), в котором величина  $\beta$  представлена в виде (2.13.10) для конкретных начальных условий, можно записать следующее соотношение:

$$\Omega Z \cong \left(1 - \frac{3\delta a_0^2 \alpha_2}{4}\right) (1 - \delta R_{\text{in}}^2)^{-1/2} \left(1 + \delta \dot{R}_{\text{in}}^2 \frac{n_0^2 k_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \frac{\delta^{1/2} z}{\rho_0}, \quad (2.13.29)$$

где были использованы также выражения (2.13.17) и (2.13.10) с учетом начальных значений. В свою очередь из (2.13.24) следует

$$\Omega Z = \left[1 + \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{3\alpha_2}{2}\right) (R_{\text{in}}^2 + \dot{R}_{\text{in}}^2)\right] \frac{\delta^{1/2} z}{\rho_0} + \text{члены высшего порядка по } \delta. \quad (2.13.30)$$

Отсюда видно, что фаза  $\Omega Z$  не зависит от начальных условий при  $\alpha_2 = 2/3$ .

*Пример 2: самофокусирующие волокна.* Рассмотрим среду, показатель преломления которой распределен в виде функции гиперболического секанса (*sch-профиль*):

$$n^2(\rho)/n_0^2 = \text{sch}^2(\delta^{1/2} \rho/\rho_0) = 1 - \delta(\rho/\rho_0)^2 + (2\delta^2/3)(\rho/\rho_0)^4 + \dots \quad (2.13.31)$$

Можно получить следующее точное решение уравнения (2.13.11):

$$\begin{aligned}
 \text{sh}(\delta^{1/2} \rho/\rho_0) &= \text{sh}(\delta^{1/2} \rho_{\text{in}}/\rho_0) \cos(\delta^{1/2} z/\rho_0) + \\
 &+ \text{tg } \gamma_{\text{in}} \text{ch}(\delta^{1/2} \rho_{\text{in}}/\rho_0) \sin(\delta^{1/2} z/\rho_0), \quad (2.13.32)
 \end{aligned}$$

откуда приближенно (для малых аргументов  $\delta^{1/2} \rho/\rho_0$ ) получаем

$$\rho = \rho_{\text{in}} \cos(\delta^{1/2} z/\rho_0) + \text{tg } \gamma_{\text{in}} \sin(\delta^{1/2} z/\rho_0) \rho_0 / \delta^{1/2}. \quad (2.13.33)$$

Таким образом, период не зависит от начального положения и наклона луча.

### 2.13.2. Сферически-симметричные среды

Если показатель преломления  $n(r)$  имеет сферически-симметричное распределение, то удобно использовать сферические координаты  $(r, \theta, \phi) = (\mu, \nu, \sigma)$ . При этом простые соображения симметрии показывают, что каждый луч описывает плоскую траекторию, которая лежит в плоскости, определяемой начальным направлением луча  $\hat{\mathbf{s}}_{\text{in}}$  и начальной координатой  $\mathbf{r}_{\text{in}}$ .

Используя уравнение (2.13.2) для переменных  $r$  и  $\theta$ , с помощью первых двух выражений (2.12.36) получаем

$$1 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 = \frac{n^2}{n^2 + c/r^2}, \quad (2.13.34)$$

$$1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 = \frac{-n^2 r^2}{c + m^2 / (k_0^2 \sin^2 \theta)}. \quad (2.13.35)$$

Отсюда можно написать следующие выражения для  $(d\theta/dr)^2$  и  $(d\phi/dr)^2$ :

$$\left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 = \frac{-ck_0^2 \sin^2 \theta - m^2}{(c + n^2 r^2) k_0^2 r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.13.36)$$

$$\left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 = \frac{m^2}{(c + n^2 r^2) k_0^2 r^2 \sin^4 \theta}. \quad (2.13.37)$$

Следовательно, если  $\psi$  — это угол между касательной к лучу и радиус-вектором из начала координат (рис. 2.23), то

$$\cos^2 \psi = \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{n^2 r^2 + c}{n^2 r^2}. \quad (2.13.38)$$

Заметим теперь, что для любого отдельного луча всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы плоскость траектории содержала ось  $z$ . Это соответствует случаю  $m = 0$

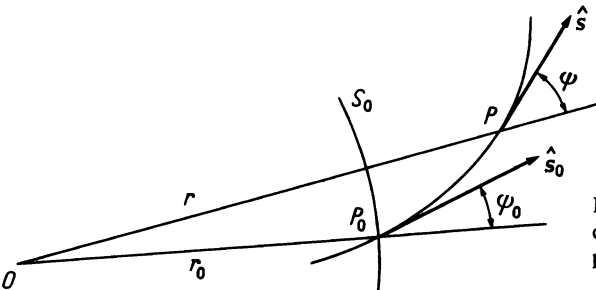


Рис. 2.23. Траектории лучей в среде со сферически-симметричным распределением показателя преломления.

[см. (2.13.37)]. При этом выражения (2.13.36) и (2.13.38) дают

$$n^2 r^4 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = n^2 r^4 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \cos^2 \psi = -c \quad (c \leq 0). \quad (2.13.39)$$

В частности, прямолинейному лучу, проходящему через начало координат, соответствует параметр  $c = 0$ . Поскольку  $\sin \psi ds = r d\theta$ , соотношение (2.13.39) эквивалентно следующему:

$$nr \sin \psi = (-c)^{1/2} = \text{const} \quad (\text{вдоль любой траектории}). \quad (2.13.40)$$

Это выражение представляет собой обобщение закона Снеллиуса для сред со сферически-симметричным профилем показателя преломления. Оно известно также как *теорема Бугера*, которую можно интерпретировать как закон сохранения углового момента фотонов, движущихся через среду.

Следует заметить, что конгруэнция лучей относится к эйконалу вида  $S(\mathbf{r}) = R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\phi)$ , только если все лучи имеют одинаковые параметры  $c$  и  $m$ . Если это условие не выполнено, то эйконал нельзя представить в виде суммы функций отдельных переменных.

При  $m = 0$  уравнение (2.13.36) принимает более простой вид:

$$(d\theta/dr)^2 = -c/(c + n^2 r^2) r^2. \quad (2.13.41)$$

Мы видим, что оно является сингулярным, когда

$$c + n^2 r^2 = 0. \quad (2.13.42)$$

Условие (2.13.42) определяет каустику лучевого поля, составленную из лучей с  $m = 0$  и общим параметром  $c$ . Таким образом, каустика состоит из набора сферических поверхностей с центром в начале координат. Освещенная зона, т. е. часть пространства, в которой траектории являются вещественными, определяется условием [получаемым сразу из (2.13.41)]

$$c + n^2 r^2 \geq 0.$$

Круговые траектории с центром в начале координат могут существовать лишь для некоторых  $r = \bar{r}$ . При этом радиус кривизны луча совпадает с  $\bar{r}$ , т. е. [см. (2.4.14)]:

$$\frac{1}{\bar{r}} = - \left. \frac{d \ln n}{dr} \right|_{r=\bar{r}}. \quad (2.13.44)$$

Кроме того, поскольку в этом случае  $d\theta/dr = \infty$ , из уравнения (2.13.41) имеем

$$c = -n^2 \bar{r}^2. \quad (2.13.45)$$

Другой важный класс траекторий существует для распределений  $n(r)$ , таких, что функция  $n(r)r$  имеет относительный максимум. В этом случае для некоторых параметров  $l$  с уравнение (2.13.42) имеет два корня:  $r_1$  и  $r_2$ , а луч движется по траектории, ограниченной двумя окружностями, компланарными с лучом и имеющими радиусы  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 2.24). В частности, конгруэнции, состоящие из замкнутых траекторий, описывают *колебательные моды* (типы колебаний) среды.

Рассмотрим пучок лучей, распространяющихся из  $z = +\infty$  под углом  $\theta = 0$ , т. е. первоначально параллельно оси  $z$ . Для данного луча из уравнения (2.13.40) мы имеем

$$c = -n_\infty^2 l^2, \quad (2.13.46)$$

где  $l$  — первоначальное расстояние от оси  $z$  (*прицельный параметр* в теории рассеяния или *высота* в теории линз). Достигнув расстояния максимального сближения  $r^*$ , которое, как можно вычислить с помощью (2.13.40) и (2.13.46), определяется уравнением

$$n^2 l^2 = n^2(r^*)r^{*2}, \quad (2.13.47)$$

луч возвращается на бесконечность, описывая траекторию, симметричную относительно начальной и асимптотически образующую угол  $\theta_s$  с отрицательным направлением оси  $z$ . Угол  $\theta_s$  можно вычислить, интегрируя уравнение (2.13.41):

$$\theta_s = \pi - 2 \int_{r^*}^{\infty} \frac{n_\infty l}{(n^2 r^2 - n_\infty^2 l^2)^{1/2} r} dr. \quad (2.13.48)$$

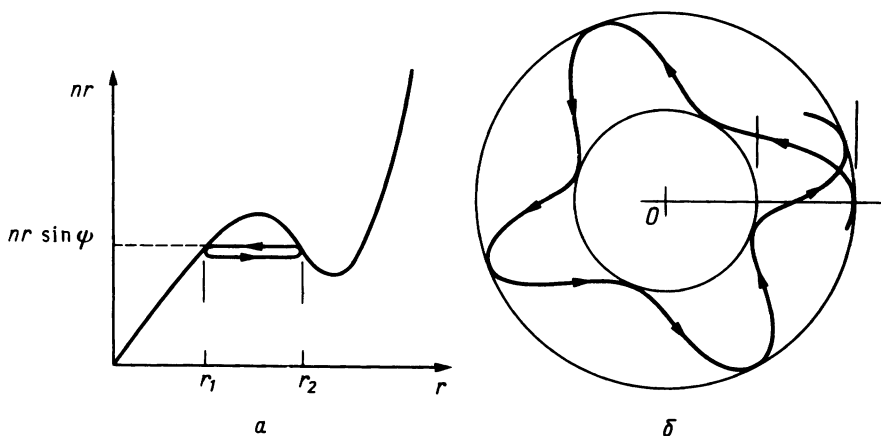


Рис. 2.24. Траектории лучей в среде с радиальной симметрией. *а* — зависимость  $nr$  от  $r$ ; *б* — луч, отражающийся между двумя сферическими каустиками.

Вообще говоря, *угол рассеяния*  $\theta_s(l)$  — это сложная функция прицельного параметра  $l$ . Если функция  $n(r)$  непрерывна вместе со своими производными, то  $\theta_s \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow \infty$ . В других случаях, например когда  $n$  сингулярна в начале координат,  $\theta_s \rightarrow \pi$  при  $l \rightarrow 0$ . Это означает, что лучи с малым прицельным параметром отражаются в обратном направлении.

В случае когда функция  $n(r)$  непрерывна при  $r = R$  и среда однородна ( $n$  не зависит от  $r$  при  $r > R$ ), прямой луч с прицельным параметром  $l = R$  может быть захвачен в градиентную область показателя преломления. Точнее говоря, если

$$1/R > -d \ln n/dr, \quad (2.13.49)$$

то прямая траектория не возмущается, а если

$$1/R < -d \ln n/dr, \quad (2.13.50)$$

то радиус кривизны луча меньше чем  $R$ , так что луч попадает в область  $r < R$ , достигает минимального расстояния до центра и вновь уходит на бесконечность.

Для падающей плоской волны пучок лучей с прицельным параметром  $l$  и кольцевым сечением  $2\pi l dl$  уходит из неоднородной области  $r < R$  в пределах телесного угла

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta_s |d\theta_s/dl| dl. \quad (2.13.51)$$

При этом нетрудно показать (см. разд. 2.12.3), что

$$\sigma(\theta_s) = (l/\sin \theta_s) |dl/d\theta_s|. \quad (2.13.52)$$

Данное соотношение верно, если существует однозначное соответствие между  $\theta_s$  и  $l$ .

### 2.13.3. Градиентные оптические элементы

Еще одно приложение рассматриваемого в этом разделе формализма связано с возможностью изготовления линзовых элементов, в которых показатель преломления изменяется непрерывно в составляющем линзу материале. Такие *градиентные элементы* [17, 18] эффективно используются для уменьшения аберраций и для решения некоторых других специальных задач. Примером градиентной линзы является *хрусталик* человеческого глаза. Измерения, выполненные Войноу, показывают, что у взрослого мужчины показатель преломления хрусталика изменяется от 1,4387 на внутренней поверхности до 1,4005 на менее плотной внешней поверхности. Интерес к линзам со сферически-симметричным градиентом показателя преломления первоначально

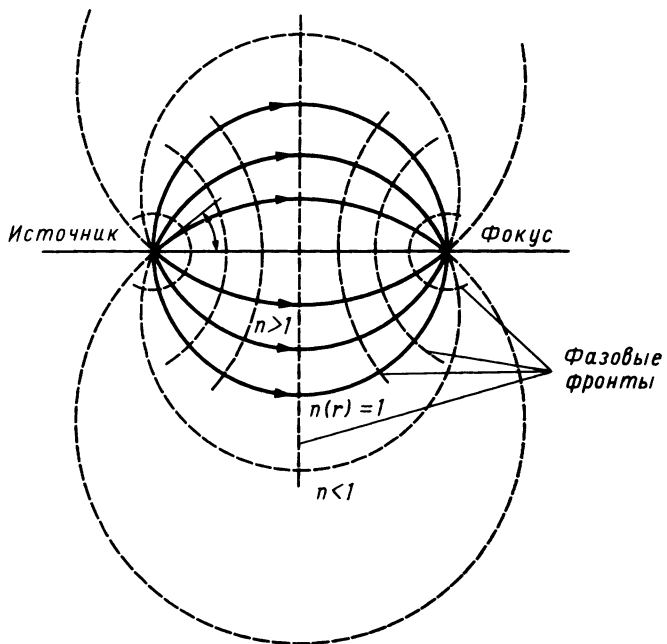


Рис. 2.25. Траектории лучей в линзе Максвелла (рыбий глаз).

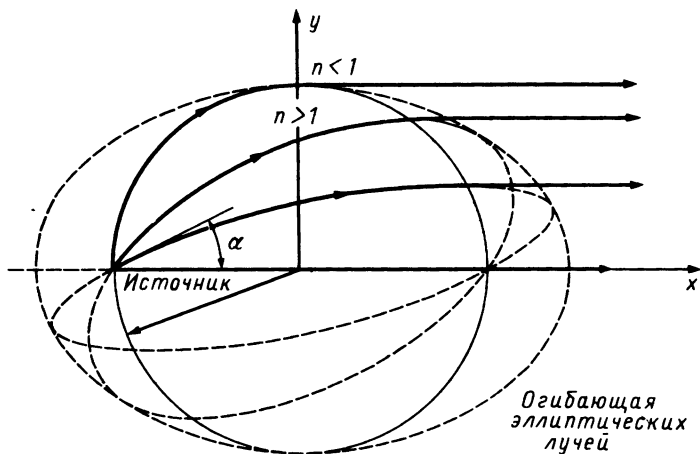


Рис. 2.26. Траектории лучей в линзе Лунберга [18].

возник в технике СВЧ. В частности, в случае когда

$$n = a/(b + r^2), \quad a > b > 0, \quad (2.13.53)$$

среда, называемая *максвелловским рыбьим глазом*, имеет одно важное свойство, а именно то, что она обладает способностью фокусировать в единственную точку все лучи, выходящие из произвольной точки пространства. Действительно, можно показать, что все лучи, выходящие из некоторого источника, пересекаются во втором фокусе, лежащем на прямой, соединяющей источник с началом координат ( $r = 0$ ) [13]. Лучи образуют систему окружностей с центрами на плоскости, перпендикулярной прямой, соединяющей источник с фокусом. Плоскость расположена точно посередине между источником и фокусом (рис. 2.25). Расстояния от начала координат до источника и фокуса связаны соотношением

$$r_s r_f = b. \quad (2.13.54)$$

Очевидно, что источник и фокус здесь можно поменять местами. При этом их называют *сопряженными точками*.

Другой интересной оптической системой является *линза Лунеберга*, показатель преломления которой внутри сферы радиусом  $R$  изменяется по закону

$$n^2 = 2 - r^2/R^2, \quad (2.13.55)$$

Если источник расположен на поверхности сферы, то лучи описывают эллипсы [18], определяемые уравнением

$$x^2 + y^2(1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2xy \operatorname{ctg} \alpha = R^2. \quad (2.13.56)$$

Здесь  $\alpha$  — угол между лучом, покидающим источник, и диаметром, проходящим через этот же источник (рис. 2.26). Можно показать, что все касательные к эллипсам на поверхности сферы параллельны оси  $x$ . Это означает, что в случае постоянства показателя преломления окру-

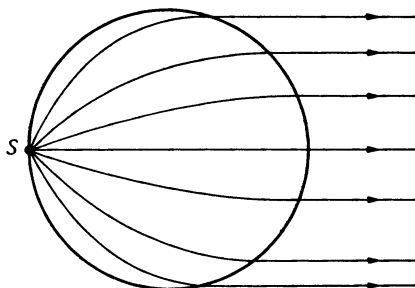


Рис. 2.27. Использование линзы Лунеберга для получения коллимированного пучка от точечного источника, расположенного на поверхности линзы.



жающей сферу среды ( $r > R$ ) система выходящих наружу лучей параллельна оси  $x$ , т. е. диаметру, проходящему через точечный источник (рис. 2.27).

Доказательства этих свойств максвелловского рыбьего глаза и линзы Лунеберга мы оставляем в качестве задач.

## 2.14. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛУЧЕЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ; ПРИНЦИП ФЕРМА

Метод разделения переменных можно с успехом использовать для определения траекторий лучей, если распределение показателя преломления  $n(\mathbf{r})$  обладает некоторой симметрией по отношению к криволинейной системе координат. Здесь мы хотим доказать важное следствие уравнения (2.4.6), позволяющее определить траектории для произвольного распределения  $n(\mathbf{r})$ .

Для этого напомним, что *геодезической линией метрического пространства* называется траектория, длина которой стационарна при бесконечно малых изменениях траектории с фиксированными конечными точками. Рассмотрим метрическое пространство, точки которого совпадают с точками обычного пространства, но метрика изменяется в соответствии с функцией  $n(\mathbf{r})$ , так что *длина* произвольной кривой между точками  $A$  и  $B$  определяется как

$$[AB] = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds. \quad (2.14.1)$$

Величину  $[AB]$  обычно называют *оптической длиной*. Докажем теперь, что кривые, для которых величина  $[AB]$  стационарна при фиксированных точках  $A$  и  $B$ , или (что эквивалентно) геодезические линии рассматриваемого пространства совпадают со всеми возможными решениями уравнения (2.4.6), т. е. со всеми возможными лучами. Если через  $A$  и  $B$  (сопряженные точки) проходит большее число лучей, то в большинстве случаев эти лучи имеют одинаковую оптическую длину  $[AB]$ , так что мы можем определить функцию  $V(A, B)$ , совпадающую с оптической длиной лучей. Эту функцию называют *точечной характеристикой* среды, и ее свойства мы рассмотрим более подробно в разд. 2.15.

На языке *вариационного исчисления* сформулированное выше свойство означает, что оптический путь является *экстремальным* по отношению ко всем другим кривым, которые не удовлетворяют законам

оптики. Для доказательства этого вычислим вариацию  $\delta$  величины  $[AB]$ , используя для простоты математических выкладок в качестве переменной интегрирования декартову координату (например,  $z$ ):

$$\delta \int_A^B n(x, y, z)(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dz \equiv \delta \int_A^B F(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z) dz, \quad (2.14.2)$$

Здесь точки над буквами означают дифференцирование по  $z$ . Любая кривая, соединяющая две фиксированные точки  $A$  и  $B$ , соответствует одной из возможных выборок пар непрерывных функций  $x(z)$  и  $y(z)$ , принимающих определенные значения на концах интервала ( $z_A, z_B$ ). Вариация длин соответствует следующему изменению этих функций:  $x(z) \rightarrow x(z) + \delta x(z)$ ,  $y(z) \rightarrow y(z) + \delta y(z)$ , так что

$$\delta[AB] = \int_A^B \left( \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dz. \quad (2.14.3)$$

Интегрируя по частям второй и четвертый члены в правой части этого выражения и учитывая возможную разрывность показателя преломления  $n(\mathbf{r})$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta[AB] = & \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_A^B - \sum_S \left( \Delta \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \right) \delta x_j - \\ & - \sum_S \int_{A_{S-1}}^{A_S} \left( \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \delta x_j dz. \end{aligned} \quad (2.14.4)$$

В правой части уравнения (2.14.4) второй член является суммой по поверхности  $S$  разрывов функции  $n(\mathbf{r})$ ,  $\Delta$  связано с резкими изменениями  $n$  при увеличении  $s$ , а третий член является суммой вкладов от областей, в которых  $n(\mathbf{r})$  непрерывна. Одинаковыми индексами в каждом из членов обозначено суммирование по  $x$  и  $y$ . Так как  $A$  и  $B$  фиксированы,  $\delta x(A) = \delta x(B) = \delta y(A) = \delta y(B) = 0$ . Поэтому первый член в правой части (2.14.4) равен нулю. Однако мы ищем геодезические линии, удовлетворяющие условию

$$\delta[AB] = \delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (A, B \text{ фиксированы}) \quad (2.14.5)$$

при любых  $\delta x$  и  $\delta y$ . Из уравнения (2.14.4) следует, что это возможно, только если удовлетворяются следующие уравнения:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2.14.6)$$

(уравнения Эйлера), дополненные условиями скачка на каждой поверхности разрыва:

$$\Delta(\partial F/\partial \dot{x}) = \Delta(\partial F/\partial \dot{y}) = 0. \quad (2.14.7)$$

Если использовать соотношения  $ds = dz(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ ,  $s_x = \dot{x}/(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ ,  $s_y = \dot{y}/(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ , то сразу выяснится, что уравнения (2.14.6) совпадают со скалярными компонентами уравнения лучей (2.4.5) вдоль осей  $x$  и  $y$ . Очевидно, что то же самое верно и для оси  $z$ . Доказательство совпадения лучей с геодезическими линиями можно считать завершенным, если заметить, что уравнение (2.14.7) эквивалентно закону Снеллиуса. Это легко показать, выбирая, например, ось  $z$  перпендикулярно поверхности разрыва, а плоскость  $xz$  в качестве плоскости падения. Более строгий вывод закона Снеллиуса из вариационных принципов содержится в работе Зацкиса [19].

Обычно соотношения (2.14.5) называют *принципом Ферма*. Согласно этому принципу, оптическая длина луча, соединяющего точки  $A$  и  $B$ , меньше оптической длины любой другой кривой, соединяющей эти точки и расположенной вблизи луча. Строго говоря, принцип Ферма справедлив лишь в том случае, когда точки  $A$  и  $B$  расположены достаточно близко друг от друга. Покажем это на примере вогнутого сферического зеркала [1] (рис. 2.28). Пусть луч  $AQB$  соединяет точки  $A$  и  $B$ , расположенные симметрично на прямой, проходящей через центр  $O$  сферического зеркала  $\gamma$ . Эллипс  $\varepsilon$  с фокусами в точках  $A$  и  $B$  лежит правее  $\gamma$ , поэтому  $[AQB] = [AQ'B] > [AQ''B]$ . Следовательно, длина  $[AQB]$  является относительным *максимумом* при смещении точки  $Q$  по поверхности зеркала. Обратная ситуация возникает, если рассматриваемые две точки  $A'$  и  $B'$  располагаются достаточно близко к точке  $Q$ . Из-за своей ограниченной применимости прин-

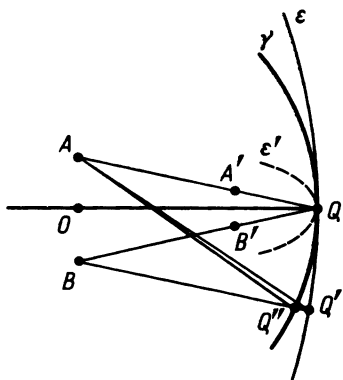


Рис. 2.28. Иллюстрация к формулировке Каратеодори принципа Ферма [1].

цип Ферма нуждается в уточнении. Каратеодори сформулировал его следующим образом: для каждой точки светового луча существует конечная окрестность, в которой принцип Ферма справедлив. (Обобщение принципа Ферма для дифрагированных лучей см. в разд. 6.7.)

### 2.14.1. Анизотропные среды

Проведенное рассмотрение можно обобщить и на тот случай, когда  $n$  зависит как от  $\mathbf{r}$ , так и от  $\hat{\mathbf{s}}$ , т. е. когда диэлектрическая проницаемость является тензором [20, 21] (см. разд. 1.4). Если определить функцию

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = n(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}, \quad (2.14.8)$$

то с ее помощью можно найти подходящее обобщение уравнения (2.4.6). Действительно, из (2.14.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial n}{\partial \dot{x}} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} + \right. \\ \left. + n \frac{\dot{x}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \right] - \frac{\partial n}{\partial x} (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = 0, \end{aligned} \quad (2.14.9)$$

или

$$\frac{d}{ds} \left[ (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \frac{\partial n}{\partial \dot{x}} + ns_x \right] = \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (2.14.10)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial s_x}{\partial \dot{x}} \frac{\partial}{\partial s_x} + \frac{\partial s_y}{\partial \dot{x}} \frac{\partial}{\partial s_y} = \\ &= \frac{1 + \dot{y}^2}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial s_x} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial s_y}, \end{aligned} \quad (2.14.11)$$

уравнение (2.14.10) можно привести к виду

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial n}{\partial s_x} + ns_x - s_x \left( s_x \frac{\partial n}{\partial s_x} + s_y \frac{\partial n}{\partial s_y} \right) \right] = \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (2.14.12)$$

Это уравнение выведено в предположении, что  $n$  является функцией величин  $\mathbf{r}$ ,  $s_x$  и  $s_y$ , причем  $s_z = (1 - s_x^2 - s_y^2)^{1/2}$ . Можно также представить  $n$  в виде явной функции величин  $s_x$ ,  $s_y$  и  $s_z$ , если учесть следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s_x} \right|_{s_y = \text{const}} &= \left. \frac{\partial}{\partial s_x} \right|_{s_y = \text{const}, s_z = \text{const}} - \frac{s_x}{s_z} \left. \frac{\partial}{\partial s_z} \right|_{s_x = \text{const}, s_y = \text{const}}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial s_y} \right|_{s_x = \text{const}} &= \left. \frac{\partial}{\partial s_y} \right|_{s_x = \text{const}, s_z = \text{const}} - \frac{s_y}{s_z} \left. \frac{\partial}{\partial s_z} \right|_{s_x = \text{const}, s_y = \text{const}} \end{aligned} \quad (2.14.13)$$

При этом уравнение (2.14.12), а также аналогичные уравнения для осей  $y$  и  $z$  относительно поверхности с нормалью  $\hat{n}_0$  можно переписать в виде

$$\frac{d}{ds} \left[ ns_i + \frac{\partial n}{\partial s_i} - s_j \left( s_j \frac{\partial n}{\partial s_j} \right) \right] = \frac{\partial n}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.14.14a)$$

$$\Delta \{ (n - \hat{s} \cdot \nabla_s n) \hat{s} + \nabla_s n \} \cdot (1 - \hat{n}_0 \hat{n}_0) = 0. \quad (2.14.14b)$$

Уравнения (2.14.14) являются искомыми обобщениями уравнения (2.4.6) для *анизотропной среды*, в которой показатель преломления зависит от направления распространения.

Заметим, что полученные выше соотношения описывают траектории в виде узкого пучка лучей. В анизотропной среде такой узкий пучок распространяется параллельно вектору Пойнтинга (см. разд. 1.6), который оказывается направленным под некоторым углом к нормали к волновому фронту. Это указывает на различие между рассматриваемым случаем и изотропной средой, в которой лучи совпадают с траекториями, перпендикулярными волновым фронтам.

Заметим также для большей ясности, что в однородной анизотропной среде, согласно уравнениям (2.14.14), лучи представляют собой прямые линии. Напротив, волновые фронты, создаваемые точечным источником в той же среде, являются сфероидами, а линии, нормальные к волновым фронтам, в общем случае криволинейны.

*Пример 1. Приложение к электронной оптике.* Интересна аналогия геометрической оптики с движением электрона в области постоянных электрических и магнитных полей. Траекторию электрона можно определить с помощью эквивалентного показателя преломления  $n_{\text{эКВ}}$ , определяемого выражением

$$n_{\text{эКВ}} = \frac{mv}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - \mu_0 e \mathbf{A} \cdot \hat{s} \quad (\text{с точностью до произвольного постоянного множителя}), \quad (2.14.15)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса покоя,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал и  $\beta = v/c$ . Скорость электрона  $v$  связана со скалярным потенциалом релятивистским законом сохранения энергии:

$$\frac{mc^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - e\Phi = \text{const}. \quad (2.14.16)$$

Выражение (2.14.15) называют *основным уравнением электронной оптики*.

Если подставить выражение (2.14.15) для  $n_{\text{эКВ}}$  в уравнение (2.14.14a), то получим

$$\frac{d}{ds} \left[ -\mu_0 e A_i + \frac{mvs_i}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right] = \frac{\partial n_{\text{эКВ}}}{\partial x_i}, \quad (2.14.17)$$

*Пример 2. Преломление необыкновенного луча в одноосном кристалле.* К выводу правильного соотношения между  $n$  и  $\hat{\mathbf{s}}$  нужно отнестись с определенным вниманием. Поскольку единичный вектор  $\hat{\mathbf{s}}$  касателен к траектории луча, необходимо использовать уравнение лучевой поверхности (см. разд. 1.4.1). В частности, для одноосного кристалла

$$n^2(\hat{\mathbf{s}}) = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{c}})^2(n_o^2 - n_e^2) + n_e^2,$$

где  $\hat{\mathbf{c}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}$  — направления оптической оси (образующей угол  $\alpha$  с нормалью  $\hat{\mathbf{n}}_0$  к поверхности) и луча (параллельного вектору Пойнтинга) соответственно. Следовательно,

$$\nabla_{\hat{\mathbf{s}}} n = n^{-1}(n_o^2 - n_e^2)(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{c}})\hat{\mathbf{c}}, \quad (2.14.18)$$

и для нормального падения луча из уравнения (2.14.146) мы имеем

$$\operatorname{tg} \theta' = - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (n_o^2 - n_e^2)}{n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.14.19)$$

### 2.14.2. Геодезические линзы

Интересным приложением принципа Ферма является *геодезическая линза*, которая состоит из тонкого диэлектрического слоя с постоянным показателем преломления  $n$ , нанесенного на подложку с небольшим углублением (рис. 2.29). Такие двумерные структуры обладают волноводными свойствами, т. е. луч, первоначально касательный к

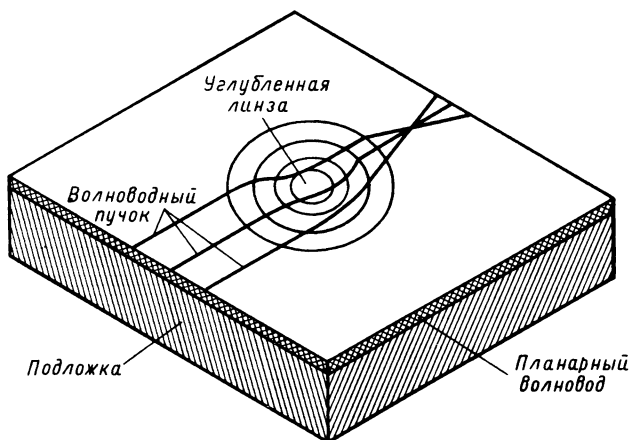


Рис. 2.29. Геодезическая линза, образованная углублением в планарном волноводе. (Из работы [23].)

поверхности углубления, меняет свое направление и следует по касательной к поверхности [22]. Для некоторых типов поверхностей такая система может действовать как линза, собирающая световой пучок, поступающий в этот оптический волновод.

Вообще говоря, геодезическая линза представляет собой поверхность вращения (рис. 2.30). В цилиндрических координатах профиль линзы описывается функцией  $z(\rho)$ , а оптический путь дается выражением

$$L = \int \left[ 1 + \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 \right]^{1/2} d\rho, \quad (2.14.20)$$

где мы положили  $n = 1$ , что вполне оправдывается, поскольку показатель преломления считается постоянным.

Применяя вариационный критерий (2.14.5), соответствующее уравнение Эйлера можно записать в виде

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\partial F}{\partial (d\phi/d\rho)} - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0, \quad (2.14.21)$$

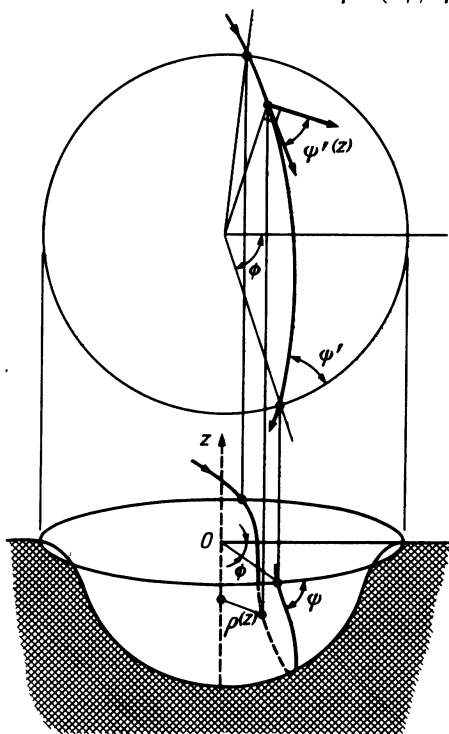


Рис. 2.30. Траектории лучей в геодезической линзе. Здесь  $\psi'$  — «проекция» угла  $\psi$  на плоскость  $z = \text{const.}$  (Из работы [23].)

где  $F$  — подинтегральное выражение в формуле (2.14.20). Учитывая затем соотношение  $\partial F/\partial \phi = 0$ , получаем

$$\frac{\rho^2}{[1 + (dz/d\rho)^2 + \rho^2(d\phi/d\rho)^2]^{1/2}} \frac{d\phi}{d\rho} = C; \quad (2.14.22)$$

здесь  $C$  — величина, постоянная вдоль луча. Полученное отсюда выражение для  $\phi$  дает дифференциальное уравнение геодезической линии:

$$\dot{\phi} = C(1 + \dot{z}^2)^{1/2}/\rho(\rho^2 - C^2)^{1/2}, \quad (2.14.23)$$

где точка над буквой обозначает производную по  $\rho$ .

Если обозначить через  $\pi/2 - \psi$  угол между лучом и меридиональной линией ( $\phi = \text{const}$ ) на поверхности, а через  $dL$  — длину дуги, то (2.14.20) и (2.14.22) сводятся к уравнению

$$\rho \cos \psi = \rho^2 |d\phi/dL| = |C|. \quad (2.14.24)$$

Это уравнение называется *теоремой Кэро*, которую можно рассматривать как обобщение закона Снеллиуса [см. также теорему Боугера (2.13.40)] применительно к однородной среде.

### 2.14.3. Метод ковариантного дифференцирования

Эквивалентность лучей и геодезических линий позволяет использовать стандартный формализм *ковариантного дифференцирования*, обычно используемый в общей теории относительности. При этом мы можем получать дифференциальные уравнения, описывающие оптические траектории в произвольной системе координат.

Как мы уже отмечали, метрику трехмерного пространства можно определить с помощью соотношения

$$d\psi^2 \equiv n^2 ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.14.25)$$

[символ  $d\psi$ , используемый здесь и в дальнейшем, не имеет ничего общего с углом  $\psi$  в (2.14.24)], где предполагается суммирование по повторяющимся индексам (*правило Эйнштейна*). Тензор  $g_{ij}$  зависит от выбранной системы координат. Например, в ортогональных координатах имеем

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} n^2 h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 h_3^2 \end{bmatrix}, \quad (2.14.26)$$

где  $h_i$  — соответствующие масштабные множители.

Геодезические линии, соответствующие метрике (2.14.25), описыва-



ются уравнениями [24]

$$\frac{d^2 x_i}{d\psi^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\psi} \frac{dx^k}{d\psi} = 0, \quad (2.14.27)$$

где  $\Gamma_{jk}^i$  (символы Кристоффеля второго рода) определяются следующим образом:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mj,k} + g_{mk,j} - g_{jk,m}). \quad (2.14.28)$$

Правый нижний индекс “,  $i$ ” обозначает частную производную по  $x^i$ . Тензор  $g^{im}$  является дуальным к  $g_{im}$  и его компоненты удовлетворяют соотношению

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i, \quad (2.14.29)$$

где

$$\delta_j^i = 1 \quad (i = j), \quad \delta_j^i = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.14.30)$$

есть тензор Кронекера. Для ортогональных координат, соответствующих тензору (2.14.26), сразу получаем

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/(n^2 h_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(n^2 h_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(n^2 h_3^2) \end{bmatrix}. \quad (2.14.31)$$

Несмотря на формальную элегантность скалярных уравнений лучей в криволинейных координатах [уравнения (2.14.27)], их не столь просто использовать из-за зависимости коэффициентов  $\Gamma_{jk}^i$  от распределения показателя преломления. Чтобы придать этим уравнениям более простую форму, введем величины  $\hat{g}_{ij}$ , определяемые следующим образом:

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij}/n^2, \quad (2.14.32)$$

которые зависят только от выбора системы координат. Используя в (2.14.28) обозначения (2.14.32), мы имеем

$$\Gamma_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i + (1/n) \hat{g}^{im} (n_{,k} \hat{g}_{mj} + n_{,j} \hat{g}_{mk} - n_{,m} \hat{g}_{jk}), \quad (2.14.33)$$

так что с помощью соотношений дуальности, определяющих  $g^{ij}$ , можно записать следующее выражение:

$$\Gamma_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i + (1/n) (\delta_j^i n_{,k} + \delta_k^i n_{,j} - n_{,m} \hat{g}^{im} \hat{g}_{jk}). \quad (2.14.34)$$

Символ  $\hat{\Gamma}_{jk}^i$  обозначает ту же величину, что и  $\Gamma_{jk}^i$ , но выраженную через  $\hat{g}$ , а не через  $g$ . Таким образом, мы имеем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 x^i}{d\psi^2} = \frac{1}{n} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{n} \frac{dx^i}{ds} \right) = \frac{1}{n^2} \frac{d^2 x^i}{ds^2} - \frac{1}{n^3} \frac{dn}{ds} \frac{dx^i}{ds} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{d^2 x^i}{ds^2} - \frac{1}{n^3} \frac{\partial n}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds}. \quad (2.14.35)$$

Заметим также, что из (2.14.25) и (2.14.32) следует равенство

$$\hat{g}_{ij} dx^i dx^j / ds^2 = 1. \quad (2.14.36)$$

Эти соотношения позволяют переписать уравнения (2.14.27) в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \hat{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{d \ln n}{ds} \frac{dx^i}{ds} - \frac{1}{n} \hat{g}^{ij} \frac{\partial n}{\partial x^j} = 0. \quad (2.14.37)$$

Здесь второй член связан непосредственно с выбранной системой координат, а третий и четвертый — с неоднородностью среды.

*Пример. Цилиндрические координаты.* Запишем уравнения (2.14.37) в цилиндрических координатах  $x^1 = \rho$ ,  $x^2 = \phi$ ,  $x^3 = z$ . Нетрудно доказать (мы оставляем это доказательство в качестве задачи), что

$$\hat{\Gamma}_{12}^1 = -\rho, \quad \hat{\Gamma}_{12}^2 = \hat{\Gamma}_{21}^2 = 1/\rho, \quad (2.14.38)$$

а все остальные  $\hat{\Gamma}$  обращаются в нуль. Отсюда следует, что уравнения (2.14.37) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{ds^2} - \rho \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{d \ln n}{ds} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \rho}, \\ \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \frac{d \ln n}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{1}{n\rho^2} \frac{\partial n}{\partial \phi}, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{d \ln n}{ds} \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.14.39)$$

## 2.15. ЭЛЕМЕНТЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ОПТИКИ

Любой оптический прибор К можно рассматривать как среду, показатель преломления которой описывается определенной функцией координат. Вообще говоря, прибор предназначается для создания по возможности наилучшего изображения предмета с заданными характеристиками. Ту область, в которой находится предмет, принято называть *пространством предмета*. В свою очередь термин *пространство изображения* используют для обозначения области, в которую попадают лучи от предмета после прохождения через прибор К. Существенное упрощение построения изображения возможно в том слу-

чае, когда среда однородна как в пространстве предмета, так и в пространстве изображения. При этом начальные и конечные участки луча являются прямыми линиями.

Чаще всего от оптического прибора требуется, чтобы он давал резкое изображение плоского предмета, которое геометрически подобно самому предмету. В некоторых случаях от прибора  $K$  требуют, чтобы он давал квадратное изображение прямоугольного предмета. Это бывает необходимо, например, для съемок широкоформатных фильмов, когда очень большое горизонтальное поле зрения требуется спроецировать на киноплёнку обычного формата. В других случаях может потребоваться создание резкого изображения плоского предмета на неплоской поверхности.

Идеальным было бы такое изображение, когда все лучи, исходящие из некоторой точки  $O$  предмета, проходили бы через соответствующую точку изображения  $O'$ . В реальных же системах лучи из точки  $O$ , вообще говоря, не пересекаются в одной точке  $O'$  пространства изображения. Если система отображает плоский предмет, расположенный в плоскости  $\Pi_0$ , в плоское изображение на  $\Pi_1$  и если некоторый луч из  $O$  пересекает  $\Pi_1$  в точке  $O'_1$ , то вектор  $O'O'_1$ , соединяющий искомое изображение  $O'$  с  $O'_1$ , является мерой *лучевой аберрации*.

Если пространства предмета и изображения однородны, то узкий гомоцентрический пучок лучей с фокусом в точке  $O$ , собранный вокруг центрального луча  $R$ , преобразуется оптическим прибором  $K$  в *астигматический* пучок, характеризующийся двумя фокальными линиями, расстояние между которыми называют *астигматической разностью пучка*. Из простых геометрических построений следует, что если фокальные отрезки имеют одинаковую длину  $a$ , то лучи пучка пересекают круговой контур диаметром  $a/2$ . При этом точка наилучшего изображения  $O'$  располагается точно посередине между фокальными линиями, в центре *диска наименьшего искажения*.

Вообще говоря, различная ориентация центрального луча пучка не позволяет свести до нуля астигматическую разность пучка. Исключения возможны лишь для некоторых частных поверхностей, создаваемых полем предмета. При этом резкое изображение определенных точек можно получить путем ограничения апертуры пучка лучей. Однако в некоторых специальных системах существуют поверхности, идеальное изображение которых можно получить и с помощью широкоугольных лучей. Например, для однородной сферы радиусом  $r$  с показателем преломления  $n$ , помещенной в среду с показателем пре-

ломления  $n'$ , идеально отображаются друг в друга сферические поверхности радиусами  $rn/n'$  и  $rn'/n$  (предлагаем доказать это читателю самостоятельно). Учитывая это свойство, Амичи в 1840—1850 годах использовал сферические линзы для объективов микроскопа (см. задачу 13 в данной главе).

Для большей конкретности рассмотрим *осесимметрическую систему*  $K$ , состоящую из поверхностей вращения с общей *оптической осью*. Точка предмета  $O$  и оптическая ось определяют *меридиональную плоскость*. Луч, касательный к этой плоскости, должен лежать в ней полностью. Немеридиональный луч называется *косым* и нигде не пересекает оптическую ось. Как следует из соотношений (2.11.22), в пространстве изображения фокальные линии меридионального луча соответственно параллельны и перпендикулярны меридиональной плоскости. Поэтому их называют *сагиттальной* и *тангенциальной* фокальными линиями. Для косых лучей это свойство несправедливо. В частности, если точка  $O$  лежит на оптической оси, то каждый проходящий через нее луч является меридиональным. При этом каустика широкоугольного пучка лучей состоит из сагиттальной поверхности вращения вокруг оптической оси и тангенциальной фокальной поверхности, представляющей собой отрезок оптической оси (см. пример в разд. 2.10.1.6). Для небольших апертур эта поверхность стягивается в точку, если  $O$  совпадает с *апланатической точкой* линзы. На языке теории аберраций конечные размеры каустики аксиального точечного источника обусловлены главным образом сферической аберрацией, которая минимальна для некоторого определенного положения предмета.

### 2.15.1. Точечные, угловые и смешанные характеристики

Для анализа качества изображения, создаваемого в системе последовательных искривленных преломляющих поверхностей, необходимо проследить за достаточно большим числом лучей, интегрируя уравнения лучей в наиболее удобной системе координат. Кроме того, может потребоваться последовательное вычисление с помощью (2.11.22) центров кривизны пучков лучей в отдельных однородных областях пространства. Эти расчеты можно выполнить очень быстро с помощью специальных компьютерных программ. Однако для предварительного выбора параметров линзы необходимо провести приближенный аналитический расчет аберраций. Этому существенно поможет применение изящной теории аберраций, предложенной Гамильтоном. Преимущества этого метода основаны на возможности получения точных результатов исходя лишь из симметрии системы.

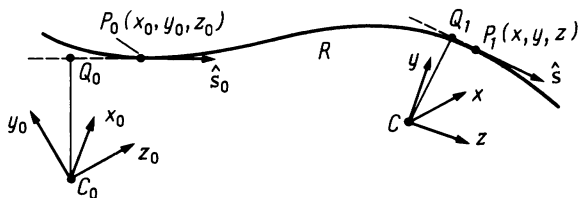


Рис. 2.31. Оптический путь между двумя точками ( $P_0$  и  $P_1$ ), расположенными соответственно в пространстве предмета и изображения.

Главным параметром в методе Гамильтона, называемом *гамильтоновой оптикой*, является длина оптического пути  $[P_0, P_1]$  между двумя произвольными точками  $P_0$  и  $P_1$  системы К (рис. 2.31). Это расстояние называют *точечной характеристикой* и обозначают как  $V(P_0, P_1)$ . Она совпадает с эйконалом в точке  $P_1$  лучевого поля от источника, расположенного в  $P_0$  (или наоборот). Непосредственно из уравнения эйконала (2.3.1) следует, что градиентом величины  $V$  по координате  $P_0(P_1)$  является вектор, направленный по лучу  $R$  через точку  $P_0(P_1)$  и имеющий модуль  $n(P_0)[n(P_1)]$ . Градиент направлен вдоль луча  $R$  для точек, лежащих в пространстве изображения, и противоположно ему для точек в пространстве предмета. В дальнейшем мы будем считать, что  $P_0$  располагается в пространстве предмета, а  $P_1$  — в пространстве изображения, так что

$$\nabla_0 V(P_0, P_1) = -n_0 \hat{s}(P_0), \quad \nabla_1 V(P_0, P_1) = n_1 \hat{s}(P_1). \quad (2.15.1)$$

Теперь удобно определить *оптические направляющие косинусы*<sup>1)</sup>  $p = ns_x$ ,  $q = ns_y$  и  $r = ns_z$ , с помощью которых уравнения (2.15.1) можно переписать в скалярной форме:

$$\begin{aligned} p_0 &= -\partial V / \partial x_0, & q_0 &= -\partial V / \partial y_0, & r_0 &= -\partial V / \partial z_0, \\ p_1 &= \partial V / \partial x_1, & q_1 &= \partial V / \partial y_1, & r_1 &= \partial V / \partial z_1. \end{aligned} \quad (2.15.2)$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  — декартовы координаты точки  $P_0$  в системе координат  $C_0$ , а  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точки  $P_1$ , относящиеся, вообще говоря, к другой системе. Обозначая буквами с точкой производные по  $z_0$ , из уравнения лучей (2.4.6) имеем

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= \partial r_0 / \partial x_0, & \dot{q}_0 &= \partial r_0 / \partial y_0, \\ \dot{x}_0 &= -\partial r_0 / \partial p_0, & \dot{y}_0 &= -\partial r_0 / \partial q_0. \end{aligned} \quad (2.15.3)$$

<sup>1)</sup> Эти же величины называют *лучевыми компонентами*. См. книгу [11] в гл. 1, с. 139 русского издания. — Прим. перев.

Величины  $p_0$ ,  $q_0$  и  $x_0$ ,  $y_0$  являются сопряженными переменными в функции Гамильтона  $H(z_0, x_0, y_0, p_0, q_0) = r_0 = [n^2(x_0, y_0, z_0) - p_0^2 - q_0^2]^{1/2}$ , которая в общем случае представляет собой явную функцию координаты  $z_0$ . В соответствии с этим луч ведет себя так же, как зависящая от времени система с двумя степенями свободы. Следовательно, мы можем ввести *фазовое пространство*, образуемое точками с координатами  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $x_0$  и  $y_0$ . Для систем, описываемых гамильтонианом, справедлива *теорема Лиувилля* [25, 26], которая гласит, что *объем элемента фазового пространства сохраняется постоянным за время его эволюции*. В нашем случае объем  $dx_0 dy_0 dp_0 dq_0$  постоянен вдоль луча. В соответствии с этим определитель лучевой матрицы, которую мы рассмотрим в разд. 2.15.3, должен быть равен единице. Таким образом, форма области, занимаемой пучком лучей в фазовом пространстве, при прохождении через оптический прибор изменяется, но объем ее сохраняется постоянным. Следует заметить, что в параксиальном приближении это свойство позволяет определить *инвариант Лагранжа* [см. (2.15.27)].

Анализ распространения в фазовом пространстве является весьма общим методом при проектировании систем, связанных с транспортировкой пучков частиц. Каждый элемент (например, квадруполь) таких систем характеризуется областью захвата. Только те пучки, объем фазового пространства которых попадает в области захвата отдельных элементов, могут пропускаться системой [27].

Если не рассматривать *афокальных систем*, используемых, например, в качестве расширителей пучков, то для определения луча  $R$  достаточно шести координат:  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$  или же величин направляющих косинусов  $p_0, q_0, p_1, q_1$ , заданных вместе с  $z_0$  и  $z_1$ . Вообще говоря, можно установить взаимно-однозначное соответствие между двумя наборами переменных:  $(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) \leftrightarrow (z_0, z_1, p_0, q_0, p_1, q_1)$ . Чтобы можно было использовать второй комплект переменных, необходимо ввести другую характеристическую функцию, а именно функцию  $T$ , называемую *угловой характеристикой*, которая связана с  $V$  соотношением

$$T(P_0, P_1) = V(P_0, P_1) + x_0 p_0 + y_0 q_0 + z_0 r_0 - x_1 p_1 - y_1 q_1 - z_1 r_1. \quad (2.15.4)$$

При малых сдвигах точек  $P_0$  и  $P_1$  с помощью выражений (2.15.2) можно записать дифференциал функции  $T$  в виде

$$dT = x_0 dp_0 + y_0 dq_0 + z_0 dr_0 - x_1 dp_1 - y_1 dq_1 - z_1 dr_1. \quad (2.15.5)$$

Учитывая затем соотношение между  $r_0$ ,  $r_1$  и  $p_0, q_0, p_1, q_1$ , мы

имеем

$$\begin{aligned}x_0 &= \partial T / \partial p_0 + z_0(p_0/r_0), & y_0 &= \partial T / \partial q_0 + z_0(q_0/r_0), \\x_1 &= -\partial T / \partial p_1 - z_1(p_1/r_1), & y_1 &= -\partial T / \partial q_1 - z_1(q_1/r_1).\end{aligned}\quad (2.15.6)$$

Из простого геометрического рассмотрения следует, что  $T$  является оптической длиной луча между основаниями  $Q_0$  и  $Q_1$  перпендикуляров, опущенных на луч из начал систем координат, заданных соответственно в пространстве предмета и изображения. В частности, для осесимметричных систем и систем координат  $C_0$  и  $C_1$  (см. рис. 2.31), у которых оси  $z$  совпадают с оптической осью,  $T$  зависит только от следующих комбинаций направляющих косинусов:

$$u = p_0^2 + q_0^2, \quad v = p_1^2 + q_1^2, \quad w = 2(p_0p_1 + q_0q_1). \quad (2.15.7)$$

В некоторых задачах, встречающихся, например, в связи с дифракционным анализом оптических приборов (разд. 4.13), удобно использовать *смешанную характеристику  $W$* , определяемую следующим образом:

$$W(x_0, y_0, z_0; z_1, p_1, q_1) = V(P_0, P_1) - x_1p_1 - y_1q_1 - z_1r_1. \quad (2.15.8a)$$

Для этой характеристики мы имеем

$$\begin{aligned}p_0 &= -\partial W / \partial x_0, & q_0 &= -\partial W / \partial y_0, \\x_1 &= -\partial W / \partial p_1 - z_1(p_1/r_1), & y_1 &= -\partial W / \partial q_1 - z_1(q_1/r_1).\end{aligned}\quad (2.15.8б)$$

### 2.15.2. Угловая характеристика поверхности вращения

Последовательность поверхностей вращения, разделяющих однородные среды, образует составные линзы. В общем случае, если записать уравнение отдельной поверхности в виде  $z = f(x, y)$ , то непосредственно из принципа Ферма (разд. 2.14) получаем выражение для  $V$ :

$$\begin{aligned}V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) &= g(P_0, P_1; x, y, z) \equiv \\&\equiv n_0[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2} + \\&+ n_1[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2]^{1/2},\end{aligned}\quad (2.15.9)$$

причем мы имеем следующие условия:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2.15.10)$$

Следствие этого, если в качестве системы координат для плоскостей предмета и изображения использовать плоскость, проходящую

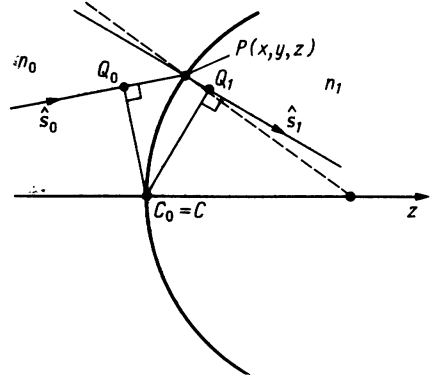


Рис. 2.32. Распространение луча через две однородные среды, разделенные поверхностью вращения вокруг оси  $z$ .

через вершину поверхности  $z_0 = z_1 = z_v = f(0, 0)$ , то относительная угловая характеристика  $T_0$  (см. соответствующее геометрическое построение на рис. 2.32) запишется в виде

$$T_0 = (p_0 - p_1)x + (q_0 - q_1)y + (r_0 - r_1)f(x, y), \quad (2.15.11)$$

где  $P\{x, y, f(x, y)\}$  — точка пересечения преломляющей поверхности лучом  $R$ . Кроме того, из закона Снеллиуса следует, что

$$p_0 - p_1 = -(r_0 - r_1)\partial f/\partial x, \quad q_0 - q_1 = -(r_0 - r_1)\partial f/\partial y. \quad (2.15.12)$$

Учитывая это, относительную угловую характеристику можно записать в виде

$$T_0 = (r_1 - r_0)[x(\partial f/\partial x) + y(\partial f/\partial y) - f]. \quad (2.15.13)$$

Далее, следуя Лунебергу [1], введем переменные  $\alpha = \partial f/\partial x$  и  $\beta = \partial f/\partial y$ , а также функцию  $\Omega(\alpha, \beta)$ , определяемую следующим образом:

$$\Omega(\alpha, \beta) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = x(\alpha, \beta) + y(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta). \quad (2.15.14)$$

Учитывая выражения (2.15.12)—(2.15.14), окончательно получаем

$$T_0 = (r_1 - r_0)\Omega\left(-\frac{p_0 - p_1}{r_0 - r_1}, -\frac{q_0 - q_1}{r_0 - r_1}\right). \quad (2.15.15)$$

Нетрудно проверить, что для поверхности вращения  $z = f(\rho)$  при  $\Omega = \rho \partial f/\partial \rho - f_1$  соотношение (2.15.15) принимает вид

$$T_0 = (r_1 - r_0)\Omega\left[\left(\frac{u + v - w}{r_1 - r_0}\right)^{1/2}\right], \quad (2.15.16)$$

где аргументы  $u, v$  и  $w$  определены выражениями (2.15.7). Для сферической поверхности радиусом  $R$  выражение (2.15.16) имеет простой



вид:

$$\begin{aligned} T_0 &= R \operatorname{sgn}(n_1 - n_0)(n_0^2 + n_1^2 - w - 2r_1 r_0)^{1/2} + R(r_0 - r_1) = \\ &= R \operatorname{sgn}(n_1 - n_0)|n_0 \hat{s}_0 - n_1 \hat{s}_1| + R(r_0 - r_1). \end{aligned} \quad (2.15.17)$$

Здесь учтено, что  $R > 0$  для выпуклой поверхности и  $R < 0$  в обратном случае.

Теперь нетрудно найти угловую характеристику при  $z_0 \neq z_1 \neq z_v$ , поскольку в общем случае  $T$  линейно зависит от  $z_0$  и  $z_1$ , причем коэффициенты пропорциональности равны соответственно  $-r_0$  и  $r_1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} T(z_0, z_1; p_0, q_0, p_1, q_1) &= R \operatorname{sgn}(n_1 - n_0)(n_0^2 + n_1^2 - w - 2r_1 r_0)^{1/2} + \\ &+ (z_1 - z_v - R)r_1 - (z_0 - z_v - R)r_0. \end{aligned} \quad (2.15.18)$$

В частности, если  $u, v, w \ll 1$ , то для  $z_v = 0$  и  $\Delta = n_1 - n_0$  получаем

$$\begin{aligned} T \sim n_1 z_1 - n_0 z_0 + \frac{1}{2\Delta} \left[ -Rw + Ru + \frac{\Delta}{n_0} z_0 u + Rv - \frac{\Delta}{n_1} z_1 v \right] + \\ + \frac{R}{8} \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \frac{u}{n_0^2} + \frac{v}{n_1^2} \right)^2 + \frac{n_1^2 n_0^2}{\Delta^3} \left( \frac{w}{n_0 n_1} - \frac{u}{n_0^2} - \frac{v}{n_1^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{v^2}{n_1^3} + \frac{u^2}{n_0^3} \right] + \frac{z_1}{8n_1^3} v^2 - \frac{z_0}{8n_0^3} u^2. \end{aligned} \quad (2.15.19)$$

### 2.15.3. Лучевая матрица

Определим для осесимметрической системы поперечные векторы  $\rho_0 = \hat{x}_0 + \hat{y}_0$  и  $\rho_1 = \hat{x}_1 + \hat{y}_1$ . При этом выражения (2.15.6) можно переписать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2\mathbf{p}_0 \partial T / \partial u + 2\mathbf{p}_1 \partial T / \partial w, \\ \rho_1 &= -2\mathbf{p}_0 \partial T / \partial w - 2\mathbf{p}_1 \partial T / \partial v, \end{aligned} \quad (2.15.20)$$

где  $\mathbf{p}_0 = \hat{x}_0 + \hat{y}_0$ ,  $\mathbf{p}_1 = \hat{x}_1 + \hat{y}_1$ . Из этих соотношений, в частности, следует, что вектор  $\mathbf{p} \times \rho$  остается постоянным вдоль луча, распространяющегося через осесимметрическую систему. Модуль  $t$  этого вектора, называемый *наклоном* (см. также *инвариант наклона*; разд. 2.13.1), можно использовать для того, чтобы сделать проще построение хода луча в центрированной системе, как это было первоначально сделано Смитом в 1821 г. Например, инвариантность наклона приводит к *оптической теореме синусов* [28]. В общем случае выра-

жения (2.15.20) удобно переписать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.15.21)$$

где

$$A = -\frac{\partial T/\partial v}{\partial T/\partial w}, \quad D = -\frac{\partial T/\partial u}{\partial T/\partial w}, \quad C = \frac{1}{2(\partial T/\partial w)}, \quad B = \frac{AD - 1}{C}. \quad (2.15.22)$$

Из написанных выше выражений следует, что определитель *лучевой матрицы*  $\mathbf{S}$  равен единице. В частности, для сферической поверхности, описываемой угловой характеристикой (2.15.16), можно написать

$$\begin{aligned} A &= r_0/r_1 - (z_1 - z_v - R)K_1/r_1, \\ D &= r_1/r_0 + (z_v + R - z_0)K_1/r_0, \\ B &= (z_1 - z_v - R)/r_0 - (z_v + R - z_0)/r_1 + K_1(z_1 - z_v - R)(z_v + R - z_0)/(r_1 r_0), \\ C &= -|n_0 \hat{s}_0 - n_1 \hat{s}_1|/[R \operatorname{sgn}(n_1 - n_0)] \equiv -K_1, \end{aligned} \quad (2.15.23)$$

где  $K_1$  называется *степенью наклона* поверхности. В общем случае  $K_1$  является функцией переменных  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

При достаточно малых  $\rho_0$  и  $\mathbf{p}_0$  коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не зависят от  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_1$ . Это область *гауссовой оптики*, в которой оптические приборы описываются системной матрицей  $\mathbf{S}_{1,0}$ , образованной *гауссовыми постоянными*  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . (Свое название этот раздел оптики получил в честь К. Гаусса, который в своей известной статье «Диоптрические исследования», опубликованной в Гёттингене в 1841 г., первым провел анализ преломляющей сферы, используя разложения в степенные ряды.) Например, для сферической преломляющей поверхности соотношения (2.15.23) при нулевых  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_1$  приводят к матрице

$$\mathbf{S}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{K(z_1 - z_v)}{n_1} & -\frac{z_v - z_0}{n_0} + \frac{z_1 - z_v}{n_1} + \frac{K(z_1 - z_v)(z_v - z_0)}{n_1 n_0} \\ -K & 1 + \frac{K(z_v - z_0)}{n_0} \end{bmatrix}, \quad (2.15.24)$$

где  $K = (n_1 - n_0)/R$  — предельное значение степени наклона  $K_1$  при малых углах, называемое *преломляющей способностью*.

Если сдвинуть плоскости  $z = z_0$  и  $z = z_1$ , то новую матрицу можно построить, используя линейную связь между угловой характеристикой  $T$  и  $z_0$ ,  $z_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z'_0, z'_1) &= \begin{bmatrix} 1 & (z'_1 - z_1)/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}(z_0, z_1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & (z_0 - z'_0)/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \mathbf{T}(z'_1, z_1) \cdot \mathbf{S}(z_0, z_1) \cdot \mathbf{T}(z_0, z'_0), \end{aligned} \quad (2.15.25)$$

где матрицы перехода  $\mathbf{T}$  учитывают сдвиг опорных плоскостей.

В общем случае, если коэффициент  $B$  равен нулю, то все лучи, выходящие из  $P_0$ , проходят через  $P_1$  независимо от начального направления. Это означает, что  $P_1$  является *параксиальным изображением* точки  $P_0$ . Если это свойство выполняется в параксиальном приближении для всех точек плоскостей  $z = z_0$  и  $z = z_1$ , то эти плоскости называются *сопряженными плоскостями*. Таким образом, условием сопряженности двух плоскостей является равенство нулю коэффициента  $B$ . Для двух произвольных величин  $z = z_0$ ,  $z = z_1$  плоскость, сопряженную к  $z = z_0$ , можно найти, сдвигая опорную плоскость в пространстве изображения, т. е. изменяя величину  $z'_1$  в (2.15.25) до тех пор, пока коэффициент  $B$  не станет равным нулю.

Аналогично если система освещается коллимированным пучком, то вектор  $\rho_1$  не будет зависеть от  $\rho_0$ , при условии, что плоскость  $z = z_1$  совпадает с *фокальной плоскостью* прибора. Ее положение можно найти, сдвигая плоскость  $z = z'_1$  до тех пор, пока не станет равным нулю коэффициент  $A$ . Каждая система имеет две *главные* (или *единичные*) *плоскости*, такие, что изображением любой точки  $\rho_0$  является  $\rho_1 = \rho_0$ . Положение этих плоскостей можно найти, потребовав выполнения условий  $A = 1$  и  $B = 0$ . Точка на оси такая, что исходящий из этой точки исходный луч составляет с оптической осью угол, равный углу, образуемому выходящим пучком, называется *узловой точкой*; для нее  $B = 0$ ,  $D = n_1/n_0$ . Если  $n_1 = n_0$ , то узловые точки (в пространстве предмета и изображения) лежат на главных плоскостях.

В общем случае оптическая система характеризуется своими фокальными и главными плоскостями. Изображение предмета  $O$  можно получить с помощью геометрического построения, иллюстрируемого на рис. 2.33 и 2.34. Соответствующая лучевая матрица записывается в виде

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ -n_1/f_1 & 1/M \end{bmatrix}, \quad (2.15.26)$$

где  $M$  — *поперечное увеличение* предмета, а  $f_1$  — расстояние от фокальной плоскости в пространстве изображения до соответствующей главной плоскости; величина  $f_1$  положительна, если  $\Pi_{f_1}$  лежит справа от  $\Pi_{u_1}$ . Обозначим теперь через  $\phi_0$  и  $\phi_1$  начальный и конечный углы,

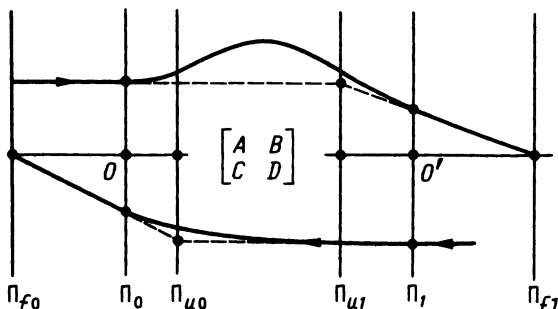


Рис. 2.33. Положение единичных (главных) плоскостей  $\Pi_{u_0}$ ,  $\Pi_{u_1}$  и фокальных плоскостей  $\Pi_{f_0}$ ,  $\Pi_{f_1}$  линзы, лучевая матрица которой построена относительно произвольных плоскостей  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ .

образованные с оптической осью параксиальным лучом, проходящим через точки  $P$  и  $P'$ . Используя приведенное выражение для  $\mathbf{S}$ , имеем:  $\phi_1 = \phi_0 n_1 / (M n_0)$ . Кроме того,  $\rho_1 = M \rho_0$ . Объединяя эти два соотношения, получаем так называемый *инвариант Смита — Гельмгольца* или *Лагранжа* (см. книгу [11] в гл. 1):

$$n_0 \rho_0 \phi_0 = n_1 \rho_1 \phi_1. \quad (2.15.27)$$

Чаще всего оптическая система ограничивает возможный размер пучков, которые могут проходить через К. Такими ограничителями могут быть оправы линз или другие препятствия, наличие которых называют *виньетированием* (рис. 2.35). Параксиальные изображения передним и задним элементами системы К образуют соответственно *входной* и *выходной* зрачки. Лучи, касающиеся границ зрачков, называются *боковыми*, а луч, проходящий через предмет и центр выходного зрачка, называют *главным лучом*. Эти лучи играют важную роль при анализе аберраций.

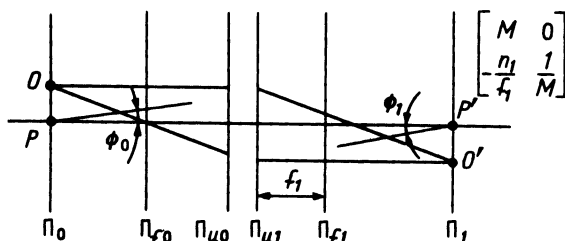


Рис. 2.34. Лучевая матрица относительно двух сопряженных плоскостей ( $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ );  $M$  — линейное увеличение предмета в плоскости  $\Pi_0$ ;  $f_1$  — расстояние от фокальной плоскости  $\Pi_{f_1}$  до главной плоскости  $\Pi_{u_1}$ ;  $f_1$  положительно, если плоскость  $\Pi_{f_1}$  лежит справа от  $\Pi_{u_1}$ .

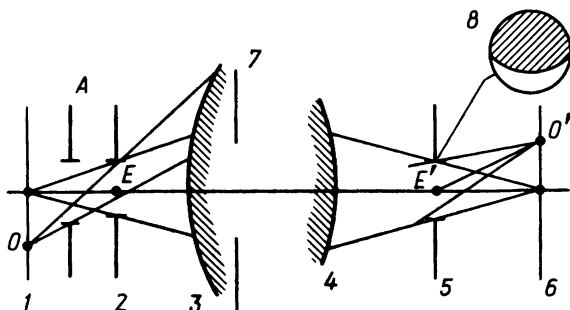


Рис. 2.35. Входной и выходной зрачки оптической системы. Луч, проходящий через  $O'$  и  $E'$ , называется главным. Апертура  $A$  не отделяет пучка лучей от аксиальных точек. Если предмет  $O$  расположен достаточно далеко от оси, то выходной зрачок выглядит частично освещенным, что показано на врезке (на рисунке справа сверху). Такое частичное освещение называют *виньетированием*. 1 — плоскость предмета; 2 — входной зрачок; 3 — первая поверхность; 4 — последняя поверхность; 5 — выходной зрачок; 6 — плоскость изображения; 7 — ограничитель; 8 — прошедший пучок.

Для оценки световой энергии, проходящей через систему, часто используют *числовую апертуру* (ЧА). В параксиальном приближении она равна показателю преломления  $n_0$ , умноженному на половину угла конуса лучей, собираемых входным зрачком от точки  $O$  аксиального предмета. Аналогичную величину можно определить и в пространстве изображения. Используя значения волнового вектора, числовой апертуры и координат предмета  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , положение точки  $P_0$  можно охарактеризовать с помощью безразмерных величин, называемых *оптическими координатами*:

$$v_x = k_0 x_0 NA_0, \quad v_y = k_0 y_0 NA_0, \quad \bar{u} = k_0 z_0 NA_0^2. \quad (2.15.28)$$

Аналогичные определения можно ввести и для пространства изображения, в котором числовую апертуру  $ЧА_0$  необходимо заменить на  $ЧА_1 = (n_0/n_1)ЧА_0/|M|$ , где  $M$  — поперечное увеличение. Если плоскости  $z_0 = 0$  и  $z_1 = 0$  являются сопряженными, то легко показать, что модули оптических координат двух сопряженных точек, близких соответственно  $O$  и  $O'$ , равны друг другу.

Оптический прибор можно также характеризовать размером предмета, изображение которого воспроизводится более или менее правдоподобно. Если обозначить через  $A$  площадь области предмета, а через  $\Omega$  — инструментальный угол, то величину

$$U = A\Omega \quad (2.15.29)$$

называют *светосилой* или *светособирающей способностью*. Этот параметр имеет большое значение для спектроскопических приборов

(см. разд. 7.21.2). Кроме того, величина  $U/\lambda^2$  определяет число точек предмета, которые можно разрешить на изображении предмета, формируемом прибором с данной светосилой (см. разд. 4.15.5).

Показав, какими богатыми возможностями обладает гауссова оптика для анализа оптических систем, в заключение напомним читателю, что лучевую матрицу системы можно построить, заменяя линзу набором плоскостей, касательных к вершинам преломляющих поверхностей. Последовательно перемножая матрицы, относящиеся к преломляющим поверхностям, и матрицы перехода между соседними плоскостями, можно вычислить результирующую матрицу системы. Этот метод не является новым, он давно используется для конструирования и анализа систем, применяемых в технике ускорителей для транспортировки заряженных частиц. Интересное описание этого приложения содержится в книге Стеффена [27].

#### 2.15.4. Аберрации волнового фронта

В анализе аберраций, начатом в 1856 г. Зайделем, удобно использовать специальные координаты для плоскостей предмета и изображения и для входного и выходного зрачков. Их выбирают из тех соображений, чтобы в параксиальном приближении все координаты точек пересечения луча с указанными плоскостями совпадали. При этом изменения этих координат (*координат Зайделя*) для конечного луча являются мерой отклонения от идеальной параксиальной траектории.

Мы уже определили аберрацию оптической системы  $K$  как ее неспособность пропустить луч из точки предмета  $O$  точно через точку изображения  $O'$ . При рассмотрении дифракционных явлений, приводящих к отличию  $K$  от идеального прибора, удобно описывать аберрации как отклонения волновых фронтов от некоторых идеальных поверхностей. В частности, если рассматривать изображение точки  $O$  осесимметричной системой  $K$ , то ее гауссово изображение  $O'$  находится в точке пересечения главного луча, выходящего из точки  $O$ , с плоскостью, сопряженной с плоскостью предмета. Рассмотрим теперь волновой фронт  $W$ , проходящий через центр выходного зрачка  $E'$  и гауссову опорную сферу  $W_s$  радиусом  $R$ , также проходящую через  $E'$  и имеющую центр в точке  $O'$  (рис. 2.36). Луч  $R$ , выходящий из точки  $O$ , будет пересекать  $W$  и  $W_s$  в двух точках, например соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Расстояние между этими точками с учетом знака  $[AB] \equiv W_0$  принимается в качестве меры деформации волнового фронта  $W$  и называется *функцией аберраций* или *запаздыванием волнового фронта* (см. книгу [29], с. 106).

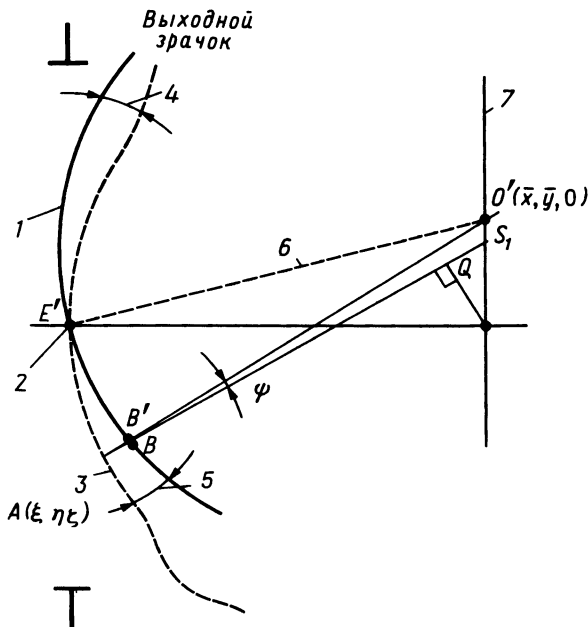


Рис. 2.36. Сечения истинного и опорного сферических волновых фронтов (радиусом  $R$ ). Функция aberrаций  $W_0$  равна расстоянию  $[AB]$  между двумя поверхностями. Выходной зрачок задает область определения функции  $W_0$ , которая для главного луча обращается в нуль. 1 — опорная сфера; 2 — центральная точка луча; 3 — истинный волновой фронт; 4 — отрицательная функция aberrаций  $W_0$ ; 5 — положительная  $W_0$ ; 6 — главный луч; 7 — фокальная плоскость  $W_0$ ;  $O'(x, y, 0)$  — параксиальное изображение.

Здесь мы сталкиваемся с задачей вычисления  $W_0$  при помощи характеристических функций прибора К. Для того чтобы упростить вычисления, полезно сравнить с параметрами  $p$  и  $q$  луча  $R$  отдельные величины, входящие в выражение для  $W_0$ . В частности, если разложить смешанную характеристику прибора К по степеням  $p$  и  $q$ , то получим ряд  $W = W^{(0)} + W^{(2)} + W^{(4)}$ , где  $W^{(2n)}$  — полином степени  $2n$  относительно  $p$  и  $q$ . Из-за аксиальной симметрии в разложении отсутствуют нечетные члены. Слагаемое  $W^{(2)}$  соответствует параксиальной оптике, а aberrации оказываются членами не менее чем четвертого порядка. Этот факт можно сформулировать так: в aberrации вносят вклад члены  $W$  порядка  $O(4)$ . Аналогично говорят, что  $[S_1 O']$  имеет порядок  $O(3)$  и т. д. (рис. 2.36).

После этих предварительных замечаний запишем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 [AQ] - R + p\bar{x} + q\bar{y} &= [AS_1] - R - p\delta x - q\delta y = \\
 &= [AS_1] - [BS_1] + O(6) = W_0 + O(6). \quad (2.15.30)
 \end{aligned}$$

Действительно,  $p\delta x + q\delta y = O(4)$ , а  $R = [BS_1] - p\delta x - q\delta y + O(\delta x^2 + \delta y^2)$ . Следовательно, в качестве функции  $W_0$  для вычисления aberrаций третьего и пятого порядка можно выбрать левую часть выражения (2.15.30), т. е.

$$\begin{aligned}
 W_0(X, Y) &= W(z_0, z_1; x_0, y_0, p, q) + p\bar{x} + q\bar{y} - R - V(O, E') = \\
 &= T(z_0, z_1; p_0, q_0, p, q) - p_0x_0 - q_0y_0 + \\
 &\quad + p\bar{x} + q\bar{y} - R - V(O, E'), \quad (2.15.31)
 \end{aligned}$$

где  $X$  и  $Y$  — координаты выходного зрачка, равные соответственно  $X = Rp/r$  и  $Y = Rq/r$ .

Теперь можно разложить  $T$  в степенной ряд по  $s_0 \equiv u$ ,  $s_1 \equiv v$ ,  $s_2 \equiv w$ . Мы уже отмечали, что функция  $W_0$  должна быть по крайней мере четвертого порядка, т. е.  $W_0 = W_0^{(4)} + W_0^{(6)} + \dots$ , где в соответствии с (2.15.31)  $W_0^{(4)} = T^{(4)}$ . Таким образом,

$$W_0^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^2 T_{ij} s_i s_j. \quad (2.15.32)$$

Определяя новые переменные  $\bar{u} = x_0^2 + y_0^2$ ,  $v = p_1^2 + q_1^2$  и  $\bar{w} = 2(x_0 p_1 + y_0 q_1)$ , формулу (2.15.32) можно переписать в виде

$$W_0^{(4)} = -\frac{1}{4}Bv^2 - \frac{1}{4}C\bar{w}^2 - \frac{1}{2}D\bar{u}v + \frac{1}{2}E\bar{u}\bar{w} + \frac{1}{2}Fv\bar{w}, \quad (2.15.33)$$

где  $B, C, D, E, F$  — коэффициенты первичных aberrаций (или aberrаций Зайделя) [30, 31]. Они связаны с такими дефектами изображения, как сферическая aberrация ( $B$ ), кома ( $F$ ), астигматизм ( $C$ ), кривизна поля ( $D$ ) и дисторсия ( $E$ ).

## ЗАДАЧИ

### Раздел 2.2

1. Покажите, что члены асимптотического ряда Ханкеля для функции  $H^{(2)}(k_0\rho)$  [(2.12.12)] удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.2.9). Подсказка:  $\nabla^2 = d^2/d\rho^2 + \rho^{-1}d/d\rho$ .

### Раздел 2.4

2. Покажите, что в параксиальном приближении (малое отклонение пучка лучей от аксиального направления) уравнения для лучей принимают вид

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{\partial \ln n}{\partial z} \frac{dx}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} \ln n,$$



$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\partial \ln n}{\partial z} \frac{dy}{dz} = \frac{\partial}{\partial y} \ln n.$$

3. Покажите, что в параксиальном приближении лучи в *линзоподобной среде* с показателем преломления

$$n^2 = n_0^2 - a(x^2 + y^2)$$

описывают синусоидальные траектории.

### Раздел 2.6

4. Покажите, что асимптотическое решение параболического волнового уравнения (2.6.12) можно получить в виде

$$A(\mathbf{r}) \cong \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(-ik_0)^m},$$

где коэффициенты  $A_m$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(\partial/\partial z)A_m = -\frac{1}{2}\nabla_t^2 A_{m-1}.$$

5. Докажите, что асимптотические решения уравнений (2.6.11) и (2.6.12) совпадают с точностью до членов второго порядка по  $k^{-1}_0$ . *Подсказка:* см. задачу 2.4.

### Раздел 2.8

6. Рассмотрите линейный ток  $\mathbf{J}(\rho, t) = e^{i\omega t} [\delta(\rho)/2\pi\rho] \hat{\mathbf{z}}$ , текущий вдоль оси  $z$ . Соответствующий векторный потенциал  $\mathbf{A}$  пропорционален  $\hat{\mathbf{z}}H_0^{(2)}(k_0\rho)$ . Вычислите векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  и с помощью (2.12.12) найдите их асимптотические разложения в ряд.

### Раздел 2.9

7. Пусть распределение показателя преломления таково, что прямой луч может распространяться вдоль оси  $z$ . В небольшой окрестности около этой оси распределение показателя преломления можно приблизительно записать в виде

$$n^2(\mathbf{r}) = n_0^2(z) + f(z)x^2 + g(z)y^2.$$

Покажите, что эйконал можно разложить в следующий степенной ряд:

$$S(\mathbf{r}) = S_0(z) + \frac{1}{2}a(z)x^2 + \frac{1}{2}b(z)y^2 + c(z)xy + \text{высшие степени по } x \text{ и } y,$$

где

$$\frac{dS_0}{dz} = n_0(z), \quad \frac{dc}{dz} = -(a+b)\frac{c}{n_0},$$

$$\frac{da}{dz} = -\frac{a^2}{n_0} + \frac{f-c^2}{n_0} \quad (\text{уравнение Риккати}), \quad \frac{db}{dz} = -\frac{b^2}{n_0} + \frac{g-c^2}{n_0}.$$

8. Используя уравнения из задачи 7, получите закон изменения главных радиусов кривизны в вакууме (2.9.12).

### Раздел 2.10

9. Рассмотрите точечный источник в среде с показателем преломления  $n$ , находящийся на расстоянии  $l$  от плоской границы раздела со средой, в которой показатель

преломления равен  $n'$ . Покажите, что каустика преломленных лучей описывается уравнением

$$\mu^{2/3} z^{2/3} + (\mu^2 - 1)^{1/3} \rho^{2/3} = t^{2/3} \quad (\mu = n/n'),$$

где  $z$  и  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  — координаты в системе отсчета, начало которой расположено в плоскости раздела, а ось  $z$  совпадает с перпендикуляром, опущенным из источника на эту плоскость. Покажите, что при  $\mu \geq 1$  каустика является эволютой эллипса. Исследуйте форму волновых фронтов. *Подсказка.* См. разд. X.4 в книге [13].

Раздел 2.11

10. Вычислите поле, отраженное металлической сферой при ее облучении плоской волной. Считайте, что коэффициент отражения для скалярного поля равен  $-1$ , что означает равенство нулю полного поля на поверхности.

11. Пусть точечный источник расположен внутри сферы радиусом  $R$ , показатель преломления внутри которой равен  $n_1$ , а снаружи —  $n_0 (< n_1)$ . Докажите, что если расстояние от источника  $S$  до центра сферы  $O$  равно  $Rn_0/n_1$ , то лучи, образующие с направлением  $SO$  угол  $\leq \pi/2$ , преломляются таким образом, что имеют мнимый фокус в точке  $S'$  на расстоянии  $Rn_1/n_0$  от точки  $O$ . Идеальные точки  $S$  и  $S'$  называют *апланатическими точками* сферы. *Подсказка.* Используйте соотношения (2.11.22) и закон Снеллиуса.

12. Рассмотрите точечный источник и пучок лучей, перпендикулярный плоскому «окну» или цилиндрической линзе с заданными размерами и показателем преломления (рис. 2.37). Вычислите главные радиусы кривизны вдоль пучка лучей при пересечении линзы и после выхода из нее.

13. Рассмотрите *мениск Амичи* (рис. 2.38), получаемый из диэлектрической сферы радиусом  $R$  с показателем преломления  $n_1$ , часть которой выбрана в форме другой сферы с центром в апланатической точке  $S$  (см. задачу 11). Вся система помещена в среду с

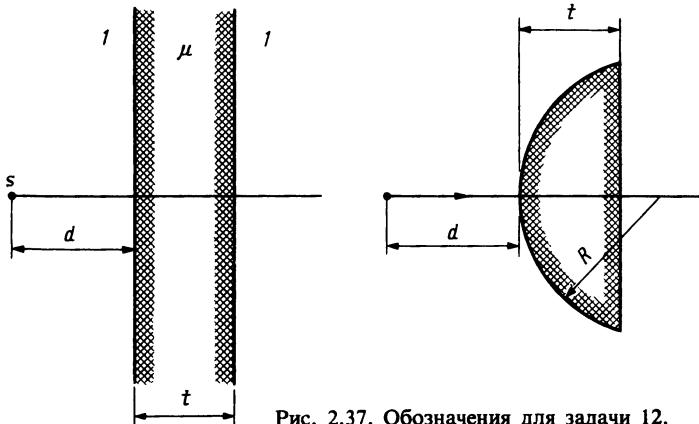


Рис. 2.37. Обозначения для задачи 12.

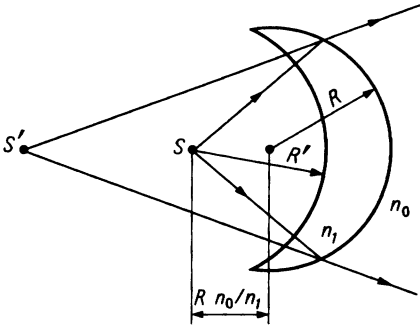


Рис. 2.38. Мениск Амичи.

показателем преломления  $n_0 (< n_1)$ . Вычислите отношение *числовых апертур* падающей и преломленной после выхода из мениска конгруэнций, если источник находится в точке  $S$ . Числовая апертура (ЧА) определяется как  $n \sin \theta_{\text{макс}}$ , где  $\theta_{\text{макс}}$  — угол между оптической осью линзы и наиболее отклоненным лучом конгруэнции.

14. Рассмотрите *объектив микроскопа с масляной иммерсией* (рис. 2.39). В этом случае предмет погружен в жидкость, показатель преломления которой  $n_{\text{масл}}$  близок к показателю преломления первого сферического элемента. Источник расположен в апланатической точке этой сферы, причем его изображение находится в центре кривизны первой поверхности  $R_2$  дополнительного мениска, являющемся также апланатической точкой второй поверхности мениска радиусом  $R_3$ . Вычислите ЧА конгруэнции лучей, покидающих мениск Амичи (см. задачу 13), как функцию входной ЧА =  $n_{\text{масл}} \sin \theta$ .

### Раздел 2.12

15. Запишите уравнение для лучей в эллиптических цилиндрических координатах  $(\psi, \mu, \nu)$  [см. выражения (2.7.10)], предполагая, что показатель преломления является постоянным на каждом эллипсе из координатного семейства и не зависит от  $\psi$ . Найдите интеграл движения, соответствующий наклону данного луча в волокнах с вращательной симметрией относительно поворота волокна. Проанализируйте моды, распространяю-

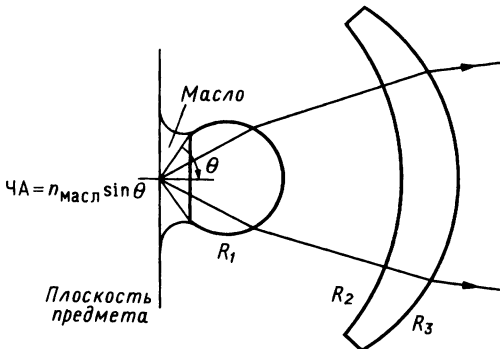


Рис. 2.39. Объектив микроскопа с масляной иммерсией.

щиеся вдоль оси  $u$  этого эллиптически градиентного волокна. Для этого исследуйте относительные каустики и зависимость постоянной распространения  $\beta$  от модовых индексов.

### Раздел 2.13

16. Используя соотношение (2.13.45), найдите круговые траектории с центром в начале координат максвелловского рыбьего глаза [выражение (2.13.53)] и линзы Лунеберга [выражение (2.13.55)]. Покажите, что радиусы этих траекторий равны соответственно  $b^{1/2}$  и  $R$ .

17. Пусть в линзе Лунеберга луч распространяется вдоль оси  $x$ . Используя транспортные уравнения из задачи 2.7, покажите, что изменение радиуса кривизны вращательно-симметричного волнового фронта вдоль оси  $x$  описывается уравнением

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{1}{R} \frac{1}{[2 - (x/R)^2]^{1/2}} \operatorname{tg} \left( - \arcsin \frac{x}{2^{1/2}R} + \phi \right),$$

где  $\phi$  — угол для начального значения  $\rho$ , а координата  $x$  измеряется относительно центра линзы.

18. Докажите, что начальный и конечный радиусы кривизны вращательно-симметричного волнового фронта, распространяющегося вдоль диаметра линзы Лунеберга, связаны соотношением

$$\rho_{\text{вх}} \rho_{\text{вых}} = -R^2.$$

### Раздел 2.14

19. Решите уравнение (2.14.19) при наличии однородного магнитного поля (потенциал  $\mathbf{A}$  неоднороден!). Покажите, что траекторией является спираль с осью, параллельной вектору  $\mathbf{H}$ . Найдите частоту вращения вокруг  $\mathbf{H}$  (*циклотронную частоту*).

20. Рассмотрите периодически наклонный *нематический жидкий кристалл*, компоненты диэлектрического тензора которого зависят только от координаты  $z$ :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 + \delta \cos(\beta z) & 0 & \delta \sin(\beta z) \\ 0 & 1 + \delta & 0 \\ \delta \sin(\beta z) & 0 & 1 - \delta \cos(\beta z) \end{bmatrix},$$

здесь  $|\delta| \ll 1$ ,  $\beta = 2\pi/L$ , а  $L$  — пространственный период дисторсии. Докажите, что тензор  $\varepsilon$  описывает одноосный кристалл, и вычислите направление оптической оси как функцию  $z$ . Предполагая, что  $L \gg \lambda$  и используя уравнение (2.14.14а), вычислите траекторию необыкновенного луча. *Подсказка:* см. пример 2 в разд. 2.14.1 и работу Онга и Мейера в библиографии к данной главе.

21. Рассмотрите луч, падающий в однородный одноосный кристалл и распространяющийся как необыкновенный луч. Предполагая, что оптическая ось компланарна с плоскостью падения, и используя соотношение (2.14.19), определите угол преломления

как функцию угла падения. *Подсказка.* Покажите, что обобщенное соотношение (2.14.19) имеет вид

$$\operatorname{tg} \theta' = -C/B + (\sin \theta/B)\{(AB - C^2)/(B - \sin^2 \theta)\}^{1/2},$$

где

$$A = n_e^2 \sin^2 \alpha + n_o^2 \cos^2 \alpha, B = n_o^2 \sin^2 \alpha + n_e^2 \cos^2 \alpha, C = \sin \alpha \cos \alpha (n_o^2 - n_e^2).$$

22. Используя символы Кристоффеля для сферических координат, определите траектории в диэлектрике с зависящим от  $r$  показателем преломления. Примените полученный результат для максвелловского рыбьего глаза.

23. Используя сферические координаты  $r, \theta, \phi$ , исследуйте траектории, соответствующие плоской волне, отклоняемой статическим гравитационным полем звезды. *Подсказка.* *Пространственно-временная* траектория фотона является нулевой геодезической для метрики

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - e^{\nu(r)} c^2 dt^2,$$

где функции  $\lambda$  и  $\nu$  описывают влияние гравитационного поля [32] ( $\lambda = \nu = 0$  в *плоском пространстве-времени*). Как следствие, пространственные траектории можно получить, рассматривая эквивалентную среду с показателем преломления

$$n_{\text{эkv}}^2(r) = e^{-\nu(r)}$$

и метрическим тензором с компонентами

$$g_{rr} = e^{\lambda(r) - \nu(r)}, \quad g_{\theta\theta} = r^2 e^{-\nu(r)}, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta e^{-\nu(r)}.$$

24. Используя результаты задачи 27, вычислите траекторию луча, отклоняемого *черной дырой* с массой  $M$ . Считайте, что

$$g_{rr} = (1 - r_g/r)^{-2}, \quad g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} \sin^2 \theta = r^2 (1 - r_g/r)^{-1},$$

где  $r_g = 2GM/c^2$ , а  $G$  — гравитационная постоянная. Покажите, что при  $l > 3^{3/2} r_g/2 = l_{\text{крит}}$  лучи отклоняются массой  $M$ , а при  $l < l_{\text{крит}}$  захватываются гравитационным полем [32] (рис. 2.40).

### Раздел 2.15

25. Вычислите угловую характеристику сферической линзы во втором порядке по  $u, v, w$ . *Подсказка.* Выберите опорные плоскости  $\Pi_0(z = 0)$  и  $\Pi_1(z = d)$ , которые являются касательными к сфере, и определите вспомогательную плоскость  $\Pi'$ , совпадающую,

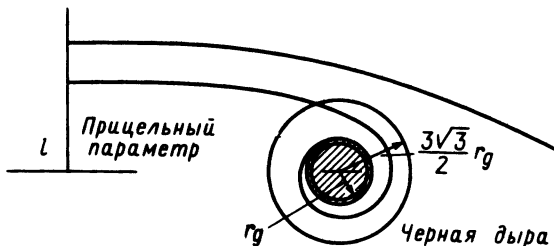


Рис. 2.40. Траектории лучей вблизи черной дыры.

к примеру, с  $\Pi_1$ . После этого представьте  $T_{\text{линза}}$  в виде

$$T_{\text{линза}} = T(0, d; p_0, q_0, p', q') + T_0(d, d; p', q', p_1, q_1).$$

Поскольку точка пересечения плоскости  $\Pi'$  лучом, приходящим слева, совпадает с точкой пересечения той же плоскости лучом справа, характеристика  $T_{\text{линза}}$  стационарна по отношению к  $p'$  и  $q'$ . Это позволяет исключить  $p'$  и  $q'$  и, таким образом, с помощью формулы (2.15.17) записать  $T_{\text{линза}}$  как явную функцию величин  $p_0, q_0, p_1, q_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Luneburg L. K.*, *Mathematical Theory of Optics*, Univ. of California Press, Berkeley, 1964.
2. *Kline M., Kay I. W.*, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Wiley (Interscience), New York, 1965.
3. *Felsen L. B., Marcuvitz M.*, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
4. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965. [Имеется перевод: *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.]
5. *Courant R., Hilbert D.*, *Methods of Mathematical Physics*, v. 2., Wiley (Interscience), New York, 1962. [Имеется перевод 1-го изд.: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. — М. — Л.: Гостехиздат, 1951.]
6. *Stavroudis O. N.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 187 (1962).
7. *Laugwitz D.*, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1965.
8. *Montagnino L.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 1667 (1968).
9. *Deschamps G. A.*, *Proc. IEEE*, **60**, 1022 (1972). [Имеется перевод: ТИИЭР, 1972, т. 60, № 9, с. 5.]
10. *Ludwig D.*, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **19**, 215 (1966).
11. *Kneisly J. A.*, II, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 229 (1964).
12. *Herzberger M.*, *Appl. Opt.*, **5**, 1383 (1966).
13. *Stavroudis O. N.*, *The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics*, Academic Press, New York, 1972.
14. *Buchdahl H. A.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, 46 (1973).
15. *Streifer W., Paxton K. B.*, *Appl. Opt.*, **10**, 769 (1971); **10**, 1164 (1971).
16. *Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M.*, *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.
17. *Marchand E. W.*, *Gradient Index Optics*, Academic Press, New York, 1978.
18. *Cornbleet S.*, *Microwave Optics*, Academic Press, New York, 1976.
19. *Zatzkis H.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 59 (1965).
20. *Budden K. G.*, *Radio Waves in Ionosphere*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1961.
21. *Brandstatter J. J.*, *An Introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media*, McGraw-Hill, New York, 1963.
22. *Righini G. C., Russo V., Sottini S., Toraldo di Francia G.*, *Appl. Opt.*, **12**, 1477 (1973).
23. *Sottini S., Russo V., Righini G. C.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1248 (1979).
24. *Möller C.*, *The Theory of Relativity*, Oxford Univ. Press, London and New York,

1972. [Имеется перевод: *Меллер К.* Теория относительности. — М.: Атомиздат, 1973.]
25. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980. [Имеется перевод 1-го изд.: *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука, 1975.]
  26. *Marcuse D.*, Light Transmission Optics, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1972.
  27. *Steffen K. G.*, High Energy Beam Optics, Wiley (Interscience), New York, 1965.
  28. *Welford W. T.*, Aberrations of the Symmetrical Optical Systems, Academic Press, New York, 1974.
  29. *Buchdahl H. A.*, An Introduction to Hamiltonian Optics, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1970.
  30. *Kingslake R.*, Lens Design Fundamentals, Academic Press, New York, 1978.
  31. *Cagnet M., Françon M., Thierré J. C.*, Atlas of Optical Phenomena, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1962.
  32. *Zeldovich Y. B., Novikov L. D.*, Relativistic Astrophysics, v. 1, Chicago Univ. Press, Chicago, Illinois, 1971.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Brouwer W.*, Matrix Methods in Optical Instruments Design, Benjamin, New York, 1964.
- Chrétien H.*, Calcul des Combinaisons Optiques, Masson, Paris, 1980.
- Cornbleet S.* Microwave and Optical Ray Geometry, Wiley, New York, 1984.
- Handbuch der Physik, v. 24, (ed. S. Flugge), Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- Focke J.*, Prog. Opt., 4, 1—36 (1965).
- Gerrard A., Burch J. M.*, Introduction to Matrix Methods in Optics, Wiley, New York. [Имеется перевод: *Джерард А., Берч Дж.* Введение в матричную оптику. — М.: Мир, 1981.]
- Herzberger M.* Modern Geometrical Optics, Wiley (Interscience), New York, 1958. [Имеется перевод *Герцбергер М.* Современная геометрическая оптика. — М.: ИЛ, 1962.]
- Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* — УФН, 1983, т. 141, с. 591.
- Mu G., Zhan Y.*, Optics, The People's Education Publishing House, Peking, 1978 (китайск.).
- Ong H. L., Meyer R. B.*, J. Opt. Soc. Am., A2, 198 (1985).
- Shaomin W.*, Opt. Quantum Electron., 17, 1 (1985).
- Slyusarev G. G.*, Aberration and Optical Design Theory, Adam Hilger, Bristol 1984. [См. также: *Слюсарев Г. Г.* Методы расчета оптических систем. — Л.: Машиностроение, 1969; Расчет оптических систем. — Л.: Машиностроение, 1975.]
- Smith W. J.*, Modern Optical Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
- Welford W. T., Winston R.*, The Optics of Nonimaging Concentrators, Academic Press, New York, 1980.

## ПЛОСКИЕ МНОГОСЛОЙНЫЕ СРЕДЫ

## 3.1. ВВЕДЕНИЕ

Из всех возможных неоднородностей в оптике чаще всего встречаются разрывы показателя преломления. Они приводят к возникновению отраженных волн, которые интерферируют с падающей волной и образуют весьма сложную интерференционную картину. В большинстве случаев для вычисления амплитуды волн, отраженных или пропущенных оптической системой, обычно необходимо учесть бесконечное число многократных отражений, испытываемых падающим пучком. На языке геометрической оптики это соответствует бесконечной последовательности лучей, суперпозиция которых определяет полное поле. Это обстоятельство определяет главное отличие рассматриваемых здесь задач от тех, которые мы изучали до этого. В частности, необходимы новые методы, которые позволили бы в случае бесконечного множества лучей получить ответ на главный вопрос, а именно на вопрос об амплитудах при отражении и пропускании оптических пучков. Для того чтобы подчеркнуть практическое значение таких методов, мы приведем ниже несколько примеров реально существующих приложений, в которых модулированная диэлектрическая проницаемость приводит к тому, что амплитуды отраженных или прошедших волн зависят от частоты самого поля.

В оптических приборах для улучшения их характеристик, а именно для увеличения прозрачности и ослабления паразитных изображений, используют покрытия стеклянных поверхностей тонкими диэлектрическими пленками [1]. Преимущества такого метода борьбы с отражением становятся еще более явными при увеличении числа покрытий. Полупрозрачные тонкие пленки используются и для увеличения отражения света от стеклянной поверхности [2]. Такие диэлектрические зеркала особенно важны в лазерных резонаторах и интерферометрах. В частности, с их помощью создаются оптические фильтры, ограничивающие полосу пропускания узким частотным интервалом.

В последние годы с развитием источников синхротронного излучения потребовались зеркала для далекого УФ-диапазона [3]. Известно, что при длинах волн меньше  $300 \text{ \AA}$  ни один из материалов не имеет



достаточно высокого коэффициента отражения, если только не используется скользящее падение света. В этом случае в качестве отражателя можно использовать лишь набор тонких пленок. Уже созданы диэлектрические зеркала для длин волн вплоть до нескольких ангстрем, причем их отражательная способность превышает 50% [4].

Для создания периодических структур можно применять фотоматериалы. Для этого они экспонируются в поле двух (или более) интерферирующих монохроматических пучков и после этого закрепляются, так что фотопленка оказывается периодической, причем пространственный период зависит как от длины волны, так и от угла, образуемого падающими пучками [5]. Эти системы обеспечивают резонансное отражение или пропускание и благодаря своей более высокой эффективности и лучшему разрешению могут заменить традиционные решетки [6] (см. обсуждение голографических решеток в разд. 6.10).

Описанный метод можно использовать для записи трехмерных изображений в *толстослойных голограммах*<sup>1)</sup>. Для этого толстый слой эмульсии на фотопластинке высокого разрешения экспонируют в поле *опорной* сферической волны, интерферирующей с когерентным полем, рассеянным предметом, восстановленное изображение которого и должно быть получено.

Простейший пример неоднородной среды — это такая среда, в которой показатель преломления  $n$  изменяется только вдоль одного направления [7, 8]. В этом случае среда называется *слоистой*, причем ее диэлектрические свойства постоянны на каждой плоскости, перпендикулярной оси расслоения. Более сложным примером является семейство коаксиальных цилиндров, на поверхностях которых показатель преломления постоянен. Такая геометрия встречается в градиентных волокнах (см. гл. 8). Однако к настоящему времени наибольшее распространение получили плоскостойкие среды. Поэтому данную главу мы посвятили исключительно этим структурам. В частности, в последующих разделах мы рассмотрим среды с *медленной, ступенчатой* и *синусоидальной* модуляциями показателя преломления.

Хотя основное внимание в этой главе будет сконцентрировано на распространении света в направлении расслоения  $z$ , мы рассмотрим и задачу о боковых волнах, которые распространяются *параллельно* тонкой пленке (в направлении  $x$  или  $y$ ; рис. 3.1). Существование таких *поверхностных* волн или волн *утечки* показывает, что можно создать структуры, которые удерживают распространяющиеся волны в пределах ограниченной области, которая может иметь толщину, равную

<sup>1)</sup> Толстослойные (трехмерные) голограммы были предложены Ю.Н. Денисюком в 1962 г. (см. работу [13], указанную в литературе к гл. 6). — *Прим. ред.*

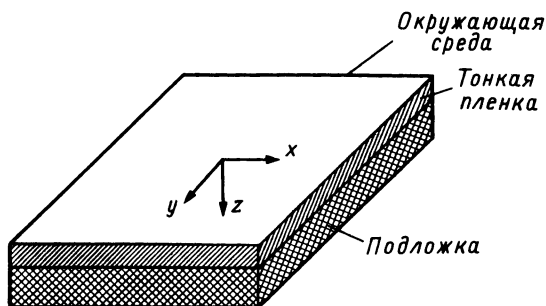


Рис. 3.1. Структура планарного пленочного световода.

всего лишь несколькими длинами волны. В настоящее время это свойство используют для создания оптических планарных волноводов и других устройств *интегральной оптики* [9].

Распространение поверхностных волн можно использовать также для исследования физических свойств тонких пленок. В частности, в металлах возбуждение и анализ поверхностных волн, удерживаемых тонкими пленками, позволяет изучать параметры *поверхностных плазмонов* [10].

Данная глава состоит из двух частей. Первая, более короткая, посвящена средам, в которых изменение показателя преломления  $n$  происходит на характерных размерах, существенно превышающих длину волны, в то время как во второй, более длинной, части мы рассматриваем противоположную ситуацию. В первой части завершается анализ градиентных сред, начатый в гл. 2 изучением представления поля вблизи критических областей (*каустики* или *точек поворота*). Рассмотренные практические примеры касаются распространения оптического излучения в градиентных многомодовых оптических волокнах. Вторая часть в основном посвящена анализу сред с кусочно-постоянными профилями показателя преломления.

Мы очень кратко остановимся на задаче о создании оптических фильтров, так как здесь требуется сложный математический аппарат, для изложения которого объем данной главы явно недостаточен. Заинтересованный читатель должен обратиться к более специализированным книгам, часть которых мы привели в списке литературы в конце данной главы.

### 3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим случай, когда показатель преломления не зависит от  $x$  и  $y$ , что соответствует *неограниченной слоистой среде*. Пусть показате-

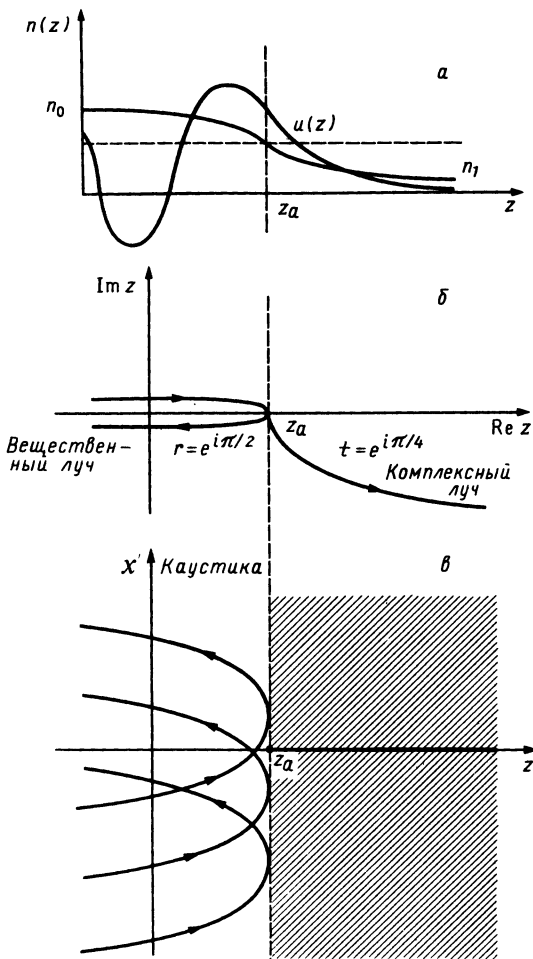


Рис. 3.2. Отражение и пропускание плоской волны на каустике плоскостройной среды. *a* — профиль показателя преломления и распределение поля вблизи каустики  $z = z_a$ ; *б* — траектория комплексного луча; *в* — траектории лучей в плоскости  $xz$ .

тель преломления  $n(z)$  принимает постоянные значения  $n_0$  и  $n_1$  соответственно при  $z \rightarrow -\infty$  и  $z \rightarrow +\infty$  (рис. 3.2, *a*). Предположим, что поле при  $z = -\infty$  имеет вид плоской волны  $u_i$ , распространяющейся под углом  $\theta$  к оси  $z$ :

$$u_i = e^{-ik_0 n_0 (z \cos \theta + x \sin \theta)}. \quad (3.2.1)$$

Без потери общности в дальнейшем будем считать, что амплитуда начального поля равна единице.

Стандартный путь исследования задачи о распространении волн состоит в поиске подходящего приближенного метода решения волнового уравнения. Точные аналитические решения получаются только для некоторых частных случаев профиля  $n(z)$ . Например, в методе Венцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) [11] ищется приближенное решение, которое является асимптотическим по параметру  $\epsilon = (dn/dz)/(k_0/n)$ . Малость  $\epsilon$  означает, что показатель преломления слабо изменяется на размерах порядка длины волны. В данном разделе мы используем развитый в гл. 2 формализм геометрической оптики, который в низшем порядке по  $1/k_0$  приводит к тем же результатам, что и ВКБ-метод.

Записанное в виде (2.4.10) уравнение для лучей можно решить, используя декартовы координаты. При этом получаем

$$d^2z/d\tau^2 = (d/dz)(\frac{1}{2}n^2), \quad d^2x/d\tau^2 = d^2y/d\tau^2 = 0. \quad (3.2.2)$$

Таким образом,  $n dx/ds$  и  $n dy/ds$  являются интегралами движения. Для удобства можно выбрать направление оси  $x$  таким, чтобы все лучи начальной плоской волны были ортогональны оси  $y$ . Это уже невно предполагалось при записи выражения (3.2.1). Следовательно,  $dy = 0$  и

$$d\tau \equiv ds/n = (dx^2 + dz^2)^{1/2}/n. \quad (3.2.3)$$

Кроме того, из (3.2.2) мы имеем  $d\tau = dx/a$  ( $a$  — постоянная), так что можно записать следующее уравнение:

$$dx/dz = a/(n^2 - a^2)^{1/2}. \quad (3.2.4)$$

При  $z \rightarrow -\infty$  из этого уравнения и (3.2.1) следует, что  $\operatorname{tg} \theta = a(n_0^2 - a^2)^{-1/2}$  и, таким образом,

$$a = n_0 \sin \theta. \quad (3.2.5)$$

Используя уравнение (3.2.4), траекторию любого луча можно записать в виде

$$x = x_0 + \int_{z_0}^z \frac{a}{(n^2 - a^2)^{1/2}} dz', \quad (3.2.6)$$

где  $x_0$  и  $z_0$  — координаты произвольной точки траектории.

В нашем случае эйконал запишется в виде

$$S = S_0 + a(x - x_0) + \int_{z_0}^z (n^2 - a^2)^{1/2} dz', \quad (3.2.7)$$

где  $S_0$  — постоянная. Действительно, это выражение является частным случаем формулы (2.12.5) и описывает волну, направление распространения которой при  $z = -\infty$  образует угол  $\theta$  с осью  $z$ . В соответствии с (3.2.7) имеем

$$\nabla^2 S = \frac{1}{(n^2 - a^2)^{1/2}} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} n^2 \right). \quad (3.2.8)$$

Кроме того, поскольку  $ds/n dz = (n^2 - a^2)^{1/2}$  [см. уравнения (3.2.3), (3.2.4) и (2.5.6)], можно записать

$$A_0(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{1}{4} \int_{z_0}^z \frac{1}{(n^2 - a^2)} \left(\frac{d}{dz'} n^2\right) dz'\right] = \frac{(n_0 \cos \theta)^{1/2}}{(n^2 - a^2)^{1/4}}. \quad (3.2.9)$$

Здесь мы положили  $z_0 = -\infty$ .

Окончательно, используя выражение (3.2.7), нетрудно получить искомого лучевое поле в виде

$$u(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) e^{-ik_0 S(\mathbf{r})} = \frac{(n_0 \cos \theta)^{1/2}}{(n^2 - a^2)^{1/4}} \bar{u}_i(\mathbf{r}) e^{-i\delta_i}, \quad (3.2.10)$$

где  $\bar{u}_i(\mathbf{r})$  представляет собой плоскую волну (3.2.1), распространяющуюся без возмущения в однородной среде с показателем преломления  $n_0$ , а  $\delta_i$  — связанная с изменением показателя преломления задержка фазы волны  $u$  по сравнению с  $u_i$ :

$$\delta_i(z) = k_0 \int_{-\infty}^z [(n^2 - a^2)^{1/2} - n_0 \cos \theta] dz'. \quad (3.2.11)$$

Полученное выражение для поля  $u(\mathbf{r})$  имеет сингулярность при  $n^2 - a^2 = 0$ . Соответствующее значение  $z_a$ , при котором  $n^2(z_a) = a^2 = n_0^2 \sin^2 \theta$ , является *точкой поворота* для волнового уравнения. Плоскость  $z = z_a$ , если она вообще существует, представляет собой каустику, связанную с конгруэнцией всех лучей, имеющих одинаковое значение  $\sin \theta$ .

Чтобы вычислить поле вблизи  $z_a$ , рассмотрим снова волновое уравнение. Начальные условия позволяют искать решение уравнения (1.1.12) в виде

$$u = e^{-ik_0 n_0 x \sin \theta} f(z). \quad (3.2.12)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (1.1.12) дает

$$\partial^2 u / \partial z^2 + k_0^2 (n^2 - a^2) u = 0. \quad (3.2.13)$$

Для наших целей удобно искать решение уравнения (3.2.13) в виде

$$u = u_+ \exp\left[-ik_0 \int^z (n^2 - a^2)^{1/2} dz' - ik_0 n_0 x \sin \theta\right] + \\ + u_- \exp\left[ik_0 \int^z (n^2 - a^2)^{1/2} dz' - ik_0 n_0 x \sin \theta\right]. \quad (3.2.14)$$

Здесь  $u_+$  и  $u_-$  — две функции координаты  $z$ , удовлетворяющие уравнению

$$\pm \frac{i}{k_0} \frac{d^2 u_{\pm}}{dz^2} + 2(n^2 - a^2)^{1/2} \frac{du_{\pm}}{dz} + u_{\pm} \frac{d}{dz} (n^2 - a^2)^{1/2} = 0, \quad (3.2.15)$$

которое нетрудно получить, подставив выражение (3.2.14) в уравнение

(3.2.13). При  $k_0 \rightarrow \infty$  получаем

$$2(n^2 - a^2)^{1/2} \frac{du_{\pm}}{dz} + u_{\pm} \frac{d}{dz} (n^2 - a^2)^{1/2} = 0, \quad (3.2.16)$$

так что  $u_+$  и  $u_-$  являются медленно меняющимися функциями координаты  $z$  типа  $u_{\pm} \sim (n^2 - a^2)^{-1/4}$  [все быстро меняющиеся множители включены в экспоненту (3.2.14)].

Таким образом, мы показали, что в выражении (3.2.14) предел  $k_0 \rightarrow \infty$  соответствует лучевому полю, если считать, что член  $u_-$  описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $z$  (ВКБ-решение).

### 3.3. СШИВКА АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ; МЕТОД ЛАНГЕРА

Для того чтобы исключить область нефизического поведения поля при  $z = z_a$ , можно обратиться к методу *сшивки асимптотических решений* [11], позволяющему построить полное приближенное решение дифференциального уравнения, имеющего точки поворота. Этот метод состоит в объединении различных приближенных решений (ВКБ или геометрической оптики), которые справедливы лишь в соответствующих областях применимости. Аналогичный подход для вычисления дифракционных интегралов в *переходных областях* мы рассмотрим в гл. 5.

Для начала заменим в уравнении (3.2.13) величину  $k_0^2(n^2 - a^2)$  ее линейным разложением

$$-\gamma(z - z_a) \equiv k_0^2(z - z_a) \frac{dn^2}{dz} \Big|_{z=z_a} \quad (3.3.1)$$

При этом уравнение (3.2.13) в окрестности точки  $z_a$  сводится к *уравнению Эйри* (см. работу [4] в гл. 2)

$$\partial^2 u / \partial z^2 - \gamma(z - z_a)u = 0. \quad (3.3.2)$$

Это частный случай уравнения более общего вида с точками поворота  $m$ -го порядка:

$$\partial^2 u / \partial z^2 - \gamma(z - z_a)^m u = 0, \quad (3.3.3)$$

решение которого можно записать в виде

$$u(z) \propto \xi^{1/2} \gamma(z - z_a)^{-1/4} J_{\pm n}(\xi), \quad \xi = \int_{z_a}^z \gamma^{1/2}(z' - z_a)^{m/2} dz', \quad (3.3.4)$$

где  $J_n$  — функция Бесселя дробного порядка  $n = 1/(m + 2)$ . При  $m = 1$  (3.3.4) сводится к уравнению (3.3.2) и его решение, если использовать разложение (3.2.14), имеет вид

$$u = c_1 e^{-ik_0 n_0 x \sin \theta} \text{Ai}[k_0 \eta^{1/3}(z - z_a)] + c_2 e^{-ik_0 n_0 x \sin \theta} \text{Bi}[k_0 \eta^{1/3}(z - z_a)], \quad (3.3.5)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные,  $\eta = \gamma/k_0^{-3}$  — безразмерный параметр, а  $\text{Ai}$  и  $\text{Bi}$  — функции Эйри.

Теперь видно, что наше начальное предположение о виде волны при  $z \rightarrow -\infty$  означает, что полупространство  $z < z_a$  представляет собой освещенную зону, в которой эйконал является вещественным. Следовательно, при  $z < z_a$  мы имеем  $n^2(z) > a^2 = n^2(z_a)$ , так что  $\gamma$  и  $\eta$  — положительные величины.

Переходные функции  $\text{Ai}$  и  $\text{Bi}$  осциллируют при отрицательных значениях аргумента, при положительных  $\text{Ai}$  монотонно спадает, а  $\text{Bi}$  монотонно возрастает. Из физических соображений можно сделать вывод, что  $c_2 = 0$ , т. е. зависимость функции  $u$  от  $z$  можно представить кривой, изображенной на верхнем графике рис. 3.2.

Сравним теперь два выражения (3.2.14) и (3.3.5) для  $u$ . Первое из них представляет собой лучевое поле и является хорошим приближением на достаточно большом расстоянии от каустики  $z = z_a$ . Второе выражение является решением волнового уравнения, справедливым при достаточно малых  $|z - z_a|$  [так, чтобы выполнялось приближение (3.3.1)]. Если области применимости обоих приближений перекрываются, что обычно и имеет место для реальных распределений  $n(z)$ , то оба этих решения можно сшить и получить полную информацию о поле. Точнее говоря, если использовать асимптотические выражения для функции  $\text{Ai}$  при больших аргументах (см. книгу [4], цитируемую в гл. 2)

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{|\zeta|^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \begin{cases} e^{-(2/3)\zeta^{3/2}} & (\zeta > 0), \\ 2\sin[(2/3)|\zeta|^{3/2} + \pi/4] & (\zeta < 0), \end{cases} \quad (3.3.6a)$$

то из уравнения (3.3.5) получаем выражения

$$u \sim \frac{c_1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ik_0 n_0 x \sin \theta}}{[\eta^{1/3} k_0 |z - z_a|]^{1/4}} \begin{cases} e^{-(2/3)(\eta^{1/2} k_0^3/2)(z - z_a)^{3/2}} & (z > z_a), \\ e^{-i\pi/4} \{ e^{i(2/3)\eta^{1/2}[k_0(z_a - z)]^{3/2}} + \\ + e^{-i(2/3)\eta^{1/2}[k_0(z_a - z)]^{3/2}} e^{i\pi/2} \} & (z < z_a), \end{cases} \quad (3.3.7b)$$

для поля в области, где оба используемых приближения приводят к одному и тому же результату. В соответствии с этим, когда волна подходит к точке поворота, всегда существует отраженная волна [см. второй член в правой части выражения (3.3.7b)]. Она имеет ту же амплитуду, что и падающая, и задержана по времени на  $\pi/2\omega$  (см. разд. 2.10 и рис. 2.17).

### 3.3.1. Прошедшие и отраженные волны

В соответствии с проведенным выше рассмотрением поля отраженной и прошедшей волн можно найти, используя следующие правила: когда

действительный луч подходит к каустике, он становится касательным к плоскости  $z = z_a$  и расщепляется на два, один из которых является действительным и отражается от каустики, а другой, комплексный луч, проникает в неосвещенную область  $z > z_a$  и соответствует затухающей волне (рис. 3.2, б). Амплитуда поля отраженного луча умножается на  $e^{i\pi/2}$ , а прошедшего — на  $e^{i\pi/4}$ . Видно, что падающий и отраженный лучи симметричны относительно оси  $z$ , и по аналогии с разложением (3.2.10) поле отраженного луча можно записать в виде

$$u_r(\mathbf{r}) = \frac{(n_0 \cos \theta)^{1/2}}{(n^2 - a^2)^{1/4}} \bar{u}_i(\mathbf{r}) e^{-i\delta_r r}, \quad (3.3.8)$$

где  $\bar{u}_i$  — однородная волна, которая является «зеркально-симметричной» к  $u_i$  относительно плоскости каустики и имеет такую же величину амплитуды и фазы, как и  $u_i$ . Параметр  $r = e^{i\pi/2}$  играет роль коэффициента отражения (см. рис. 3.2, б), а  $\delta_r$  — фазовый сдвиг по отношению к  $u_i$  и  $\bar{u}_i$ , набранный волной при проходе от  $-\infty$  до каустики и обратно до  $z$ . Для  $\delta_r$  по аналогии с (3.2.11) имеем

$$\begin{aligned} \delta_r(z) &= k_0 \int_{-\infty}^z [(n^2 - a^2)^{1/2} - n_0 \cos \theta] dz' + \\ &+ 2k_0 \int_z^{z_a} [(n^2 - a^2)^{1/2} - n_0 \cos \theta] dz' = \\ &= \delta_i(z) + 2k_0 \int_z^{z_a} [(n^2 - a^2)^{1/2} - n_0 \cos \theta] dz'. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Из тех же соображений поле затухающей прошедшей волны  $u_i$ , которое при  $z > z_a$  в области перекрытия описывается выражением (3.3.7а), имеет вид

$$u_i(\mathbf{r}) = \frac{(n_0 \cos \theta)^{1/2}}{(a^2 - n^2)^{1/4}} \bar{u}_i(\mathbf{r}) e^{-i\delta_i t}, \quad (3.3.10)$$

где  $t = e^{i\pi/4}$ , а фазовый сдвиг  $\delta_i = \delta_i' - i\delta_i''$  определяется выражением, аналогичным выражению для  $\delta_r$ . Величина  $\delta_i''$  соответствует экспоненциальному затуханию поля в неосвещенной области (см. также [12]).

### 3.3.2. Переход из запрещенной зоны в разрешенную

Рассмотрим теперь противоположный случай — переход из запрещенной зоны в разрешенную. Точнее говоря, пусть полупространство  $z > z_a$  является освещенной областью, а затухающая волна возникает при  $z < z_a$ . Так как при  $z > z_a$  существует лишь одна бегущая волна, то решение уравнения Эйри необходимо выразить в виде подходящей комбинации



функций  $A_i$  и  $B_i$ . Используем тот факт, что при больших значениях аргумента  $B_i(\zeta)$  имеет вид (см. книгу [4], цитируемую в гл. 2)

$$B_i(\zeta) \sim (1/\pi^{1/2})|\zeta|^{-1/4} \cos[(2/3)|\zeta|^{3/2} + \pi/4] \quad (\zeta < 0). \quad (3.3.11)$$

При этом непосредственно из выражений (3.3.5) и (3.3.6а) следует, что правильная комбинация, представляющая собой переходную функцию, имеет вид

$$u \propto -i A_i[k_0 \eta^{1/3}(z - z_a)] + B_i[k_0 \eta^{1/3}(z - z_a)]. \quad (3.3.12)$$

(В данном случае параметр  $\eta$  отрицательный, т. е.  $\zeta < 0$  соответствует освещенной зоне  $z > z_a$ .) Используя выражения (3.3.12), (3.3.6а) и (3.3.11), получаем начальный фазовый множитель  $e^{-i\pi/4}$  для прошедшей бегущей волны. Кроме того, при больших значениях аргумента мы имеем

$$B_i(\zeta) \sim (1/\pi^{1/2})|\zeta|^{-1/4} e^{(2/3)\zeta^{3/2}} \quad (\zeta > 0). \quad (3.3.13)$$

Поскольку волна, возникающая в неосвещенной области, представляется в переходной области функцией  $B_i$ , из уравнения (3.3.12) следует, что второй комплексный луч возникает за счет отражения. При этом его начальная амплитуда имеет множитель  $(1/2)e^{-i\pi/2}$  по сравнению с амплитудой затухающего поля  $B_i$  (см. рис. 3.3, на котором освещенная область находится при  $z < z_a$ ).

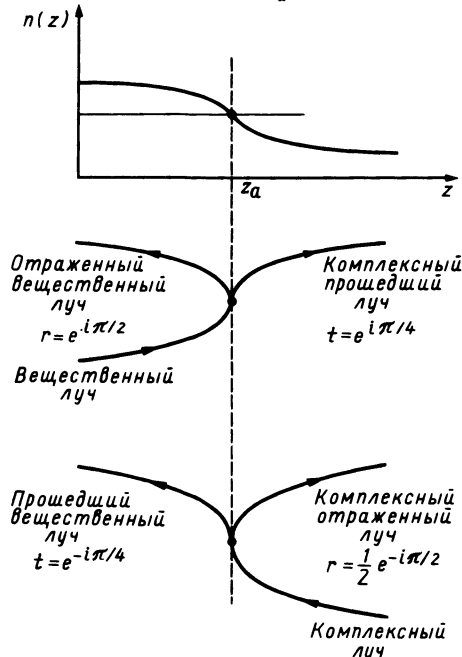


Рис. 3.3. Схематическое представление распределения поля в области уменьшающегося показателя преломления. Средний график иллюстрирует полное отражение.

## 3.3.3. Темный барьер

Рассмотрим случай, когда существуют две точки поворота —  $z_a$  и  $z'_a > z_a$ . Темным барьером является интервал  $z_a < z < z'_a$ , где  $n(z)$  имеет провал. Полученные выше результаты позволяют искать лучевое поле в виде (рис. 3.4)

$$u(\mathbf{r}) = \frac{(n_0 \cos \theta)^{1/2}}{(n^2 - a^2)^{1/4}} \times$$

$$\begin{cases} \bar{u}_r(\mathbf{r})e^{-i\delta_r r_b} + \bar{u}_i(\mathbf{r})e^{-i\delta_i} & (z < z_a), & (3.3.14a) \\ \bar{u}_i(\mathbf{r})e^{-i\delta_i t_b} & (z > z'_a), & (3.3.14б) \\ \bar{u}_i(\mathbf{r})e^{-i\delta_i t_b} [e^{i\pi/4 + \alpha - \delta_i''} + \frac{1}{2}e^{-i\pi/4 - \alpha + \delta_i''}] & (z_a < z < z'_a), & (3.3.14в) \end{cases}$$

причем

$$\alpha = \delta_i''(z'_a) = k_0 \int_{z_a}^{z'_a} (a^2 - n^2)^{1/2} dz'$$

Предположение об отсутствии волны, приходящей из  $z = +\infty$ , что позволяет использовать формулу (3.3.14б), означает, что лучевое поле в темной области описывается выражением (3.3.14в), поскольку это поведение поля согласуется с результатами, полученными для перехода из запрещенной в разрешенную зону. Для того чтобы определить лучевое поле при  $-\infty < z < z_a$ , заметим, что в выражении (3.3.14в) член  $[e^{i\pi/4 + \alpha - \delta_i''} + (\frac{1}{2})e^{-i\pi/4 - \alpha + \delta_i''}]$  у первой точки поворота должен быть заменен на член, содержащий переходную функцию  $e^{i\pi/4 + \alpha} \text{Ai} + (\frac{1}{4})e^{-i\pi/4 - \alpha} \text{Bi}$ . Это следует из выражений для Ai и Bi при больших значениях аргумента [(3.3.6а) и (3.3.13)]. Следуя тому же методу, который мы уже использовали в этом разделе, будем рассматривать непрерывное движение налево от точки  $z_a$ . Далее, вновь выражая Ai и Bi с помощью соотношений (3.3.6б) и (3.3.11), используем совпадение полученного асимптотического приближения с (3.3.14а). Действуя таким образом, коэффициенты отражения  $r_b$  и пропускания  $t_b$  можно записать следующим образом:

$$r_b = e^{i\pi/2} (4 - e^{-2\alpha}) / (4 + e^{-2\alpha}), \quad t_b = 4e^{-\alpha} / (4 + e^{-2\alpha}). \quad (3.3.15)$$

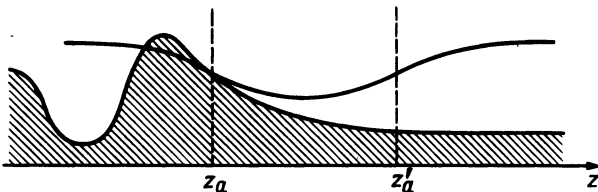


Рис. 3.4. Распределение интенсивности (нижняя кривая) вблизи ямы показателя преломления (верхняя кривая) при падении плоской волны слева направо.

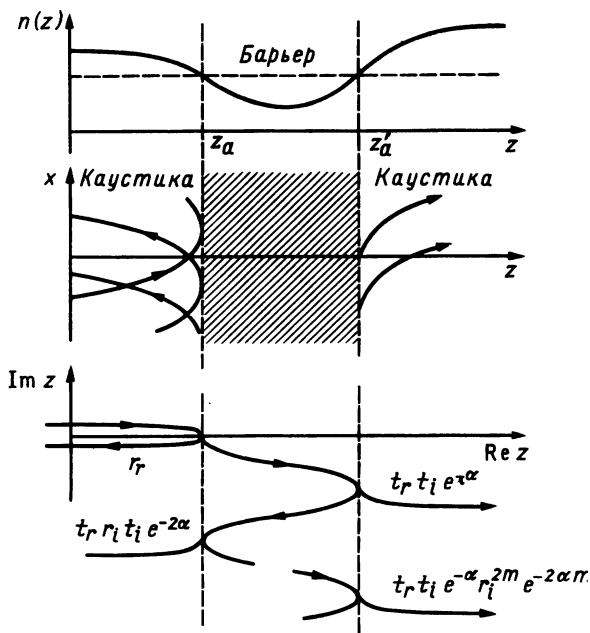


Рис. 3.5. Схематическое представление изменений в распределении амплитуды поля при наличии ямы (барьера) в профиле показателя преломления. На нижней диаграмме показаны многократные отражения луча, приходящего из освещенной области. Амплитуды прошедшего и отраженного полей можно вычислить, суммируя бесконечную последовательность полей, помеченных индексом  $m$ . Индексы  $r$  и  $i$  относятся к точкам  $z_a$  и  $z'_a$ .

Они удовлетворяют соотношению  $|r_b|^2 + |t_b|^2 = 1$ , которое выражает закон сохранения потока энергии вдоль направления распространения  $z$ .

Для полноты картины заметим, что тот же результат можно получить, если рассматривать отраженные и прошедшие пучки как суммы бесконечного числа вкладов от «захваченной в ловушку» барьера затухающей волны, отражающейся между плоскостями  $z_a$  и  $z'_a$  (рис. 3.5).

Разумеется, если  $z'_a \rightarrow \infty$ , то  $\alpha \rightarrow \infty$ , т. е.  $t_b = 0$  и  $r_b = \exp(i\pi/2)$ , что согласуется с выражением (3.3.8). В общем случае  $t_b$  не равно нулю, что связано с частичным просачиванием энергии через темную область — явление, аналогичное эффекту туннелирования в квантовой механике. Величина этого просачивания зависит от параметра  $\alpha$ , который служит мерой величины провала между двумя листами каустики  $z = z_a$  и  $z = z'_a$ . Такое просачивание приводит к эффекту, называемому *нарушенным полным отражением*, который применяется в интегральной оптике для возбуждения волн в тонкопленочных волно-

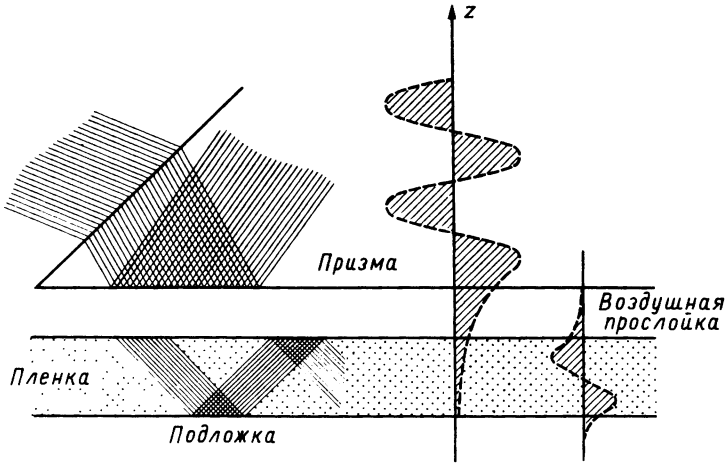


Рис. 3.6. Призменный элемент связи, использующий эффект нарушенного полного отражения для возбуждения удерживаемой волны в пленке на подложке.

водах при помощи призмного элемента связи (см. рис. 3.6 и разд. 3.20.1).

Заметим, что при  $\alpha = 0$  мы должны получить  $r_b = 0$  и  $t_b = 1$ , но это противоречит выражениям (3.3.15). Такое расхождение связано с неприменимостью процедуры сшивки в тех случаях, когда темный барьер недостаточно велик.

Точная зависимость величин  $r_b$  и  $t_b$  от волнового числа связана с особенностями среды вблизи точек поворота и определяется вкладом функций  $A_i$  и  $B_i$  в разложение поля.

В заключение рассмотрим случай *затухающей волны*  $u^{(e)}$ , возникающей при  $z = -\infty$ . Затухание можно учесть подстановкой  $\theta \rightarrow \pi/2 + i\theta''$ , и сам читатель может получить выражение

$$u^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{(n_0 \operatorname{sh} \theta'')^{1/2}}{(n_0^2 \operatorname{ch}^2 \theta'' - n^2)^{1/4}} \bar{u}_i^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\delta^{(e)}}, \quad (3.3.16)$$

где  $\bar{u}_i^{(e)}(\mathbf{r}) = \exp(-k_0 n_0 z \operatorname{sh} \theta'' - ik_0 n_0 x \operatorname{ch} \theta'')$ , а фазовый сдвиг  $\delta^{(e)}$  записывается в виде

$$\delta^{(e)}(z) = -ik_0 \int_{-\infty}^z [(a^{(e)2} - n^2)^{1/2} - n_0 \operatorname{sh} \theta''] dz', \quad (3.3.17)$$

где  $a^{(e)} = n_0 \operatorname{ch} \theta''$ .

При приближении комплексного луча к точке поворота  $z_a$  он расщепляется на комплексный отраженный и действительный прошедший лучи.

### 3.3.4. Канал

В тех случаях, когда две точки поворота  $z_a$  и  $z'_a$  ограничивают некоторый канал, т. е. область, в которой показатель преломления  $n(z)$  имеет максимум, возникает ситуация, сходная с рассмотренной выше. В частности, операция сшивки позволяет получить коэффициент отражения  $r_d$  в виде

$$r_d = \frac{e^{-i\pi/2}}{2} \frac{1 - e^{-2i\phi}}{1 + e^{-2i\phi}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \phi, \quad (3.3.18)$$

где  $\phi$  — сдвиг фазы (действительного) луча при проходе от  $z_a$  до  $z'_a$ :

$$\phi = k_0 \int_{z_a}^{z'_a} (n^2 - n_0^2 \operatorname{ch}^2 \theta'')^{1/2} dz'. \quad (3.3.19)$$

Мы видим, что  $r_d$  расходится при  $\phi = (n + 1/2)\pi$ . Из интуитивных соображений это означает, что слабая падающая волна может возбудить очень сильное поле внутри канала. Иными словами, ситуация, при которой  $\phi = (n + 1/2)\pi$ , соответствует *резонансу* системы, в которой возникает поле бесконечно большой амплитуды при конечной амплитуде возбуждения. Создаваемое таким образом в системе поле называют *модой*, распространяющейся в направлении  $x$ . При этом соотношение (3.3.19) определяет значения  $\theta''$ , при которых возможно возбуждение мод. Так как величина  $k_l \equiv n_0 k_0 \operatorname{ch} \theta''$  однозначно определяется при данной величине  $\theta''$ , одновременно с  $\theta''$  можно найти и дискретный набор разрешенных значений  $k_l$ . Каждая из мод в большей или меньшей степени сконцентрирована внутри освещенной области  $z_a < z < z'_a$ . При этом система ведет себя как диэлектрический волновод, передающий возмущение вдоль оси  $x$  с возможными волновыми числами  $k_l$ .

## 3.4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

Как следует из предыдущего раздела, отражение возможно только при наличии точек поворота. Казалось бы, это явно неверное утверждение, ведь, как хорошо известно, разрывность показателя преломления в любом случае приводит к появлению отраженного луча. Противоречие это обусловлено тем, что метод сшивки асимптотических решений учитывает правильно распределение поля в непосредственной близости от точки поворота. Однако этот метод неприменим в тех случаях, когда показатель преломления существенно изменяется на масштабах порядка длины волны. Здесь мы рассмотрим приближение, основанное на решении волнового уравнения методом ВКБ [13].

Как будет видно ниже, отражение зависит от поляризации поля, т. е. с самого начала надо рассматривать векторную задачу.

Следуя работе [13], рассмотрим плоскую волну

$$\mathbf{E}_i = [-\sin(\theta)\cos(\beta)\hat{z} + \sin(\beta)\hat{y} + \cos(\theta)\cos(\beta)\hat{x}]e^{-ik_0(x\sin\theta + z\cos\theta)}; \quad (3.4.1)$$

распространяющуюся в свободном полупространстве  $z < 0$  и падающую на плоскость  $z = 0$ , отделяющую пустую область от неоднородного полупространства  $z > 0$ . Пусть при  $z > 0$  диэлектрическая проницаемость является некоторой функцией нормализованной координаты  $\xi = z/a$ , где  $a$  — произвольная единица длины. В выражении (3.4.1)  $\beta$  — угол поляризации, а  $\theta$  — угол падения.

Поле, отраженное средой при  $z < 0$ , и поле, прошедшее в полупространство  $z > 0$ , даются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= [-\sin(\theta)\cos(\beta)r_p\hat{z} + \sin(\beta)r_s\hat{y} - \cos(\theta)\cos(\beta)r_p\hat{x}]e^{-ik_0(x\sin\theta - z\cos\theta)}, \\ \mathbf{E}_t &= [-\sin(\theta)\cos(\beta)\frac{g(\xi)}{n^2(\xi)}\hat{z} + \sin(\beta)f(\xi)\hat{y} + i\cos(\beta)\frac{g'(\xi)}{\Lambda n^2(\xi)}\hat{x}]e^{-ik_0x\sin\theta}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где штрих означает производную по переменной  $\xi$ ,  $\Lambda = k_0a$ , а  $r_p$  и  $r_s$  — коэффициенты отражения при поляризации, соответственно параллельной ( $\beta = 0$ ) и перпендикулярной ( $\beta = \pi/2$ ) плоскости падения. В частности, функция  $g(\xi)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[ \frac{1}{n^2(\xi)} \right] \frac{dg}{d\xi} \right\} + \Lambda^2 \left[ 1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2(\xi)} \right] g = 0. \quad (3.4.3)$$

Из непрерывности составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , тангенциальных к поверхности  $z = 0$ , следует, что

$$r_p = \left[ 1 - \frac{i}{\Lambda n^2(0)\cos\theta} \frac{g'(0)}{g(0)} \right] / \left[ 1 + \frac{i}{\Lambda n^2(0)\cos\theta} \frac{g'(0)}{g(0)} \right]. \quad (3.4.4)$$

Определив величины

$$\eta = \int^\xi n^2(\xi') d\xi', \quad Q(\eta) = \frac{n^2(\xi) - \sin^2\theta}{n^4(\xi)}, \quad (3.4.5)$$

уравнение (3.4.3) можно переписать в виде

$$d^2g/d\eta^2 + \Lambda^2 Q(\eta)g = 0. \quad (3.4.6)$$

Можно получить асимптотическое решение этого уравнения для больших  $\Lambda$ , раскладывая функцию  $g$  по аналогии с разложением (2.2.5). Таким образом, если положить

$$g(\eta) \sim C \exp \left[ -i\Lambda \sum_{n=0}^{\infty} (i\Lambda)^{-n} S_n(\eta) \right] \quad (3.4.7)$$

и повторить выкладки, приведшие к уравнению (2.2.8), то можно по-

казать, что

$$S_0(\eta) = \pm \int^{\eta} Q^{1/2}(\eta') d\eta', \quad (3.4.8a)$$

$$S_1(\eta) = \left(-\frac{1}{4}\right) \ln Q(\eta), \quad (3.4.8b)$$

$$S_2(\eta) = \pm \int^{\eta} \left( \frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{5Q'^2}{32Q^{5/2}} \right) d\eta', \quad (3.4.8b)$$

где штрихи у  $Q$  означают производные по  $\eta'$  (выражения для  $S_4$  и  $S_5$  можно найти в работе [11]).

Если неоднородная среда не обладает существенным отражением, то в качестве  $g$  можно выбрать решение уравнения (3.4.7), связанное с волной, распространяющейся слева направо. Это отвечает положительной определенности величин  $S_0, S_2$  и т. д. Получив таким образом выражение для  $g$ , с помощью соотношения (3.4.4) можно вычислить

$$r_p^{(F)} = \frac{1 - (i/\Lambda \cos \theta) d \ln g / d\eta}{1 + (i/\Lambda \cos \theta) d \ln g / d\eta} \sim \frac{\cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} (i\Lambda)^{-n} dS_n / d\eta}{\cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} (i\Lambda)^{-n} dS_n / d\eta} =$$

$$= r_p^{(F)} - (i/\Lambda) r_p^{(1)} - (1/\Lambda^2) r_p^{(2)} + \dots, \quad (3.4.9)$$

где

$$r_p^{(F)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} r_p = \frac{\cos \theta - S'_0}{\cos \theta + S'_0} = \frac{n_0^2 \cos \theta - (n_0^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{n_0^2 \cos \theta + (n_0^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (3.4.10)$$

Здесь  $n_0 = n(0)$ . Остальные члены можно вычислить методом итераций, используя следующее выражение:

$$r_p^{(q)} = \lim (i\Lambda)^q \left[ r_p - \sum_{n=0}^{q-1} (i\Lambda)^{-n} r_p^{(n)} \right]. \quad (3.4.11)$$

Главный член в асимптотическом разложении  $r_p(\Lambda)$  мы обозначили через  $r_p^{(F)}$ , так как он совпадает с коэффициентом отражения Френеля [см. ниже выражение (3.8.1)]. В то время как  $r_p^{(F)}$  зависит от разрыва показателя преломления на границе раздела, величина  $r_p^{(1)}$  пропорциональна первой производной от  $n^2$ . Продолжая разложение, нетрудно показать, что произвольный член  $r_p^{(m)}$  содержит  $m$ -ю производную от  $n^2$ . Коэффициент отражения  $r_s$  вычисляется аналогичным образом.

Важно заметить, что в соответствии с полученными выше результатами возникновение отраженной волны обусловлено разрывностью производной от функции  $n(z)$ . Казалось бы, отсюда можно сделать вывод, что отражения не может быть, если  $n(z)$  является аналитической функцией. Ошибочность этого заключения можно показать на следующем контрпримере, разобранным Эпштейном, который вычислил коэффициент отражения  $|r|$  при нормальном падении на гладкую границу раздела между двумя средами с показателями преломления

соответственно  $n_1$  и  $n_2$ . Эпштейн рассмотрел следующий профиль  $n(z)$  (см. [1], с. 446):

$$n^2(z) = \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) + \frac{1}{2}(n_2^2 - n_1^2) \operatorname{th}(z/a) \quad (3.4.12)$$

и получил для коэффициента отражения

$$|r| = \operatorname{sh} [\pi^2(a/\lambda)|n_2 - n_1|] / \operatorname{sh} [\pi^2(a/\lambda)(n_2 + n_1)]. \quad (3.4.13)$$

В частности, мы видим, что при  $a/\lambda \rightarrow 0$  справедливо соотношение  $|r| = |n_2 - n_1|/(n_2 + n_1)$ , которое совпадает с величиной френелевского коэффициента отражения от резкой границы между средами [см. ниже выражение (3.8.9)].

Неудача асимптотического метода не вызывает удивления. Она связана с тем известным фактом, что во всех порядках по  $k^{-1}$  асимптотическое разложение функции  $e^{-kx}$  обращается тождественно в нуль. Как мы покажем в разд. 3.12.4, эту трудность можно преодолеть, используя метод характеристической матрицы.

### 3.5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СЛОЯ С ЛИНЕЙНО УВЕЛИЧИВАЮЩИМСЯ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Рассмотрим переходный слой толщиной  $a$ , связывающий два однородных полупространства с показателями преломления соответственно  $n = 1$  и  $n > 1$ . Предположим, что  $s$ -волна падает на переходный слой под углом  $\theta$ . Если  $n^2(z)$  изменяется линейно в переходной области  $0 \leq z \leq a$ , то уравнение (3.4.3) принимает вид

$$d^2 f/d\xi^2 + \Lambda^2 [\cos^2 \theta + (n^2 - 1)\xi] f = 0. \quad (3.5.1)$$

Преобразуя переменную  $\xi \rightarrow [\Lambda/(n^2 - 1)]^{2/3} [\cos^2 \theta + (n^2 - 1)\xi]$ , получаем уравнение Эйри, решение которого можно выразить через функцию Бесселя порядка  $1/3$  [см. выражение (3.3.4)]. Используя затем непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля при  $z = 0$  и  $z = a$ , получаем после некоторых алгебраических выкладок коэффициент отражения  $r_s$  (см. [14], с. 70):

$$r_s = \frac{F_+^{(1)}(w_0)F_+^{(2)}(w_1) - F_+^{(2)}(w_0)F_+^{(1)}(w_1)}{F_-^{(1)}(w_0)F_+^{(2)}(w_1) - F_-^{(2)}(w_0)F_+^{(1)}(w_1)}. \quad (3.5.2)$$

Здесь  $w_0 = (2/3)[\Lambda/(n^2 - 1)]\cos^3 \theta$ ,  $w_1 = (2/3)[\Lambda/(n^2 - 1)](n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}$  и  $F_{+,-}^{(1,2)} = H_{1/3}^{(1,2)} \pm iH_{2/3}^{(1,2)}$ . Таким образом, коэффициент отражения зависит от нескольких факторов, а именно от характера изменения функции  $n^2(z)$  между двумя однородными средами, толщины переходного слоя, длины волны и угла падения. Поэтому, измеряя  $r_s$  для различных длин волн и угла падения, можно в принципе определить параметры переходного слоя.



### 3.6. МНОГОСЛОЙНЫЕ СРЕДЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ПРОФИЛЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В качестве простейшего примера неоднородной среды рассмотрим многослойную область (мультислой) с кусочно-постоянным (ступенчатым) законом изменения показателя преломления. В разд. 3.2 мы уже обсуждали обобщение метода геометрической оптики на неоднородный диэлектрик с непрерывным профилем показателя преломления; сущностью этого анализа была основанная на свойствах функций Эйри возможность сшивки асимптотических решений. При наличии у показателя преломления разрывов непрерывности можно также применить этот метод, учитывая, однако, некоторые небольшие изменения в выражениях для коэффициентов отражения и пропускания. Если же в задаче возникает большое число разрывов функции  $n(z)$ , то описание многократного отражения проходящей через среду волны становится очень сложным. Для этого требуется систематическое изучение зависимости коэффициентов отражения и пропускания от числа разрывов, их характера и относительных положений разрывов непрерывности  $n(z)$ .

Многослойная среда с кусочно-постоянным показателем преломления оказывается удобной моделью для анализа эффектов распространения, присущих средам с многочисленными разрывами. В частности, в слоистых средах с эквидистантным расположением поверхностей разрыва непрерывности возникает *полоса непрозрачности*, которая свойственна всем средам с периодическим изменением показателя преломления [15], так что для некоторых частотных интервалов волна вообще не может распространяться без существенного затухания. Благодаря наличию у многослойных сред полос непрозрачности их можно использовать в качестве селективных зеркал, которые нетрудно изготовить методами последовательного нанесения тонких пленок.

Диэлектрические мультислои широко применяются в электрооптических устройствах для уменьшения отражения от поверхности, получения полосовых фильтров или увеличения отражательной способности при определенных длинах волн [16, 17]. Создание таких сред при помощи испарения или напыления возможно на многих подложках (стекла, полимеры, металлы, композитные материалы) [18] (рис. 3.7). Простейший мультислой представляет собой *стопу четвертьволновых пластинок*, каждая из которых имеет оптическую толщину  $nd = \lambda_0/4$ . В современных системах вместо одинаковых четвертьволновых пластинок используют слои со слабо изменяющейся толщиной, поскольку это позволяет обеспечить лучшее управление пропускательной способностью в широком частотном диапазоне. При изготовле-

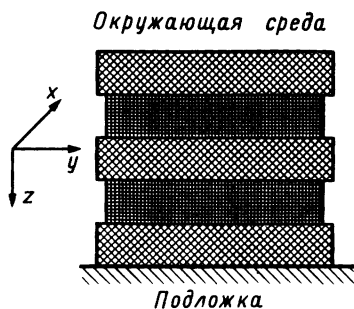


Рис. 3.7. Схематическое представление мультислоя

нии многослойных покрытий их рассчитывают, вообще говоря, для определенных углов падения волны, причем наиболее часто используются углы  $0$  и  $\pi/4$ .

Конкретную стопу четвертьволновых пластинок обозначают последовательностью символов; так, например, пишут «воздух ВН ВН...ВН стекло» или «в(ВН)<sup>m</sup>ст». Здесь содержится информация о том, что главный период мультислоя ВН (В — высокий показатель преломления  $n$ , Н — низкий) повторяется  $m$  раз, в то время как подложка сделана из стекла и вся структура находится в воздухе (в и ст — начальные буквы слов воздух и стекло). Более сложные структуры типа в(ВН)<sup>m</sup>Вст используются как зеркала с высоким отражением. Иногда оптическая толщина основной ячейки ВН слабо и монотонно увеличивается при переходе от первой ячейки к последней, граничащей с подложкой. Если показатели преломления в четвертьволновой стопе (ВН)<sup>m</sup> выбирают таким образом, чтобы  $(n_{\text{В}}/n_{\text{Н}})^{2m} = n_{\text{С}}/n_{\text{П}}$ , где  $n_{\text{С}}$  и  $n_{\text{П}}$  — показатели преломления соответственно подложки и окружающей среды, то при длине волны в вакууме  $\lambda_0$ , равной учетверенной оптической толщине одного слоя из стопы, отражение равно нулю. Это свойство используется для создания *многослойных просветляющих покрытий*, называемых из-за характерной зависимости  $r$  от частоты также *V-покрытиями*. При  $m = 1$  и  $n_{\text{П}} = 1$  условие, приведенное выше, принимает вид  $n_{\text{В}}^2 = n_{\text{С}}/n_{\text{П}}$ . Это означает, что для уменьшения коэффициента отражения от подложки на нее нужно нанести покрытие толщиной, равной примерно четверти длины волны, с показателем преломления  $\cong (n_{\text{С}}/n_{\text{П}})^{1/2}$ . Чаще всего для стеклянных подложек в воздухе используют однослойные просветляющие покрытия из  $\text{MgF}_2$ . У этого материала показатель преломления (в зависимости от поляризации волны) равен  $1,37 - 1,38$ , т. е. не сильно отличается от значения  $1,22 \cong \sqrt{1,5}$ , которое представляет собой корень квадратный из показателя преломления, характерного для большинства оптических стекол.

### 3.7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Как мы уже отмечали во введении, многослойные диэлектрические покрытия широко используются в настоящее время в оптических приборах. Типичный пример — диэлектрические зеркала в лазерных резонаторах, полностью отражающие или обеспечивающие вывод части излучения. Все такие устройства принадлежат к классу мультислоев. Но все же главной их особенностью является то, что размер неоднородности в них сравним с длиной волны. Вследствие этого их нельзя исследовать развитым выше методом, основанным на переходных функциях. Требуется развитие нового подхода, который позволил бы учесть эффекты многократного отражения на последовательности поверхностей разрыва, разделяющих отдельные диэлектрические слои стопы. Задачу можно упростить, если пренебречь конечностью поперечных размеров. В частности, пропускание мультислоя можно вычислить, считая радиус зеркала бесконечным. Возникающая при этом ошибка невелика. Кроме того, можно предположить, что показатель преломления постоянен по всей толщине каждого из слоев и резко изменяется лишь при переходе через границы раздела. Более общая ситуация рассмотрена в книге Бекмана и Спицичино и в статье Хандери, полные ссылки на которые приведены в библиографии в конце главы. Таким образом, мы будем рассматривать модель мультислоя, а именно последовательность пластин с неограниченными поперечными размерами, разделенных идеальными плоскопараллельными поверхностями. Показатель преломления каждой из пластин постоянен (рис. 3.8). Будем нумеровать пластины последовательно справа налево, причем индексом 1 отметим среду, наиболее удаленную от источника падающей волны. Предположим, что ось  $z$  направлена поперек слоев, а  $xz$  — плоскость падения плоской волны, приходящей из  $z = -\infty$ . Не-

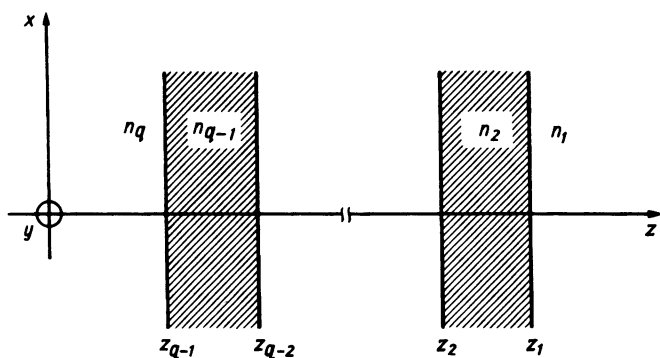


Рис. 3.8. Обозначения и система координат для описания мультислоя.

трудно показать, что любая составляющая поля  $u(x, z)$  запишется в виде

$$u(x, z) = e^{-ik_x x} f(z), \quad (3.7.1)$$

где  $k_x$  — постоянная, зависящая от направления распространения плоской волны, освещающей первую из пластин. Для решения рассматриваемой задачи удобно использовать теорию электрических цепей (см. гл. 2 и 5 в книге [3], цитируемой в гл. 2 настоящей книги). Для этого используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_e(z) &= E_x(0, z), & V_h(z) &= -E_y(0, z), \\ I_e(z) &= H_y(0, z), & I_h(z) &= H_x(0, z). \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Выражения (3.7.1) и (3.7.2) с учетом (1.1.1) — (1.1.4.) позволяют получить следующие уравнения для  $q$ -го слоя, характеризуемого показателем преломления  $n_q$ :

$$-dV_e/dz = i\beta_q Z_q^{(e)} I_e, \quad (3.7.3a)$$

$$-dI_e/dz = i\beta_q V_e / Z_q^{(e)}, \quad (3.7.3b)$$

где

$$Z_q^{(e)} = \zeta_0 \cos \theta_q / \tilde{n}_q. \quad (3.7.4)$$

Здесь  $\zeta_0$  — волновое сопротивление вакуума,  $\tilde{n}_q$  (в общем случае комплексный) — показатель преломления  $q$ -й среды, а

$$\cos \theta_q = [1 - k_x^2 / (\tilde{n}_q^2 k_0^2)]^{1/2}. \quad (3.7.5)$$

Для вещественных  $n_q$  угол  $\theta_q$  (рис. 3.9) есть угол между направлением распространения волны в  $q$ -м слое и осью  $z$ , перпендикулярной поверхностям раздела слоев. Среды с потерями будут рассмотрены в разд. 3.21. Множитель  $\beta_q$  в уравнениях (3.7.3) определяется выражени-

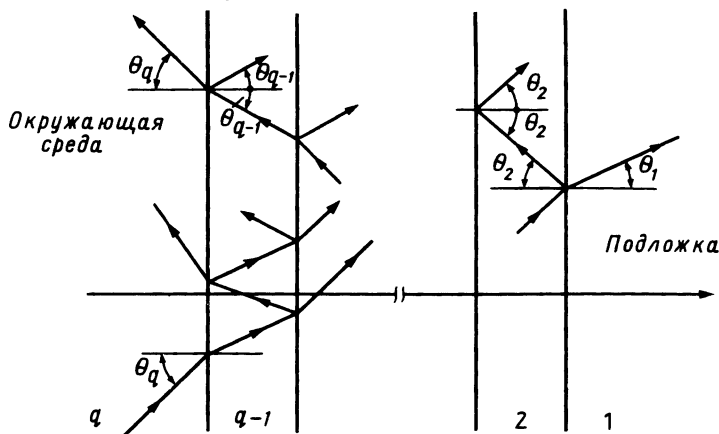


Рис. 3.9. Направления распространения плоских волн, интерферирующих в многослойной системе.

нием

$$\beta_q = (\tilde{n}_q^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} = \tilde{n}_q k_0 \cos \theta_q, \quad (3.7.6)$$

так что соотношение (3.7.4) можно переписать в виде

$$Z_q^{(e)} = Z_q \cos \theta_q = \beta_q / (\omega \epsilon_0 \tilde{n}_q^2), \quad (3.7.7)$$

где

$$Z_q = \zeta_0 / \tilde{n}_q \quad (3.7.8)$$

есть *характеристический волновой импеданс*  $q$ -го слоя. Индекс «е» (или ТМ) означает *поперечную магнитную волну*, для которой магнитное поле перпендикулярно оси  $z$  ( $H_z = 0$ ), т. е. параллельно плоскости раздела между последовательными пластинами (рис. 3.10,а). При этом  $H_x = 0$  и  $E_y = 0$ .

Дополнительный случай имеет место, если положить  $E_z = 0$  (ТЕ-волны, отмечаемые индексом «h»). Для этих *поперечных электрических волн* (рис. 3.10,б)  $H_y = 0$ ,  $E_x = 0$  и справедлива система уравнений, аналогичная (3.7.3), причем необходимо сделать замену  $Z_q^{(e)} \rightarrow Z_q^{(h)}$ , где

$$Z_q^{(h)} = \zeta_0 / (\tilde{n}_q \cos \theta_q) = \omega \mu_0 / \beta_q. \quad (3.7.9)$$

В оптике ТМ-поля отмечают, как правило, индексом «р», указывая на то, что вектор  $\mathbf{E}$  *параллелен* плоскости падения, ТЕ-поле — индексом s, указывая на то, что электрическое поле *перпендикулярно* (от немецкого слова senkrecht) плоскости падения.

Система уравнений (3.7.3) позволяет изучать распространение ТМ-или ТЕ-волн, используя аналогию с электрической линией передачи, состоящей из однородных секций (рис. 3.11) с соответствующими импедансами. Для каждой секции общее решение уравнений (3.7.3) записывается следующим образом:

$$V(z) = V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z} + V_q^{(-)} e^{i\beta_q z}, \quad (3.7.10a)$$

$$I(z) = V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z} / \hat{Z}_q - V_q^{(-)} e^{i\beta_q z} / \hat{Z}_q, \quad (3.7.10b)$$

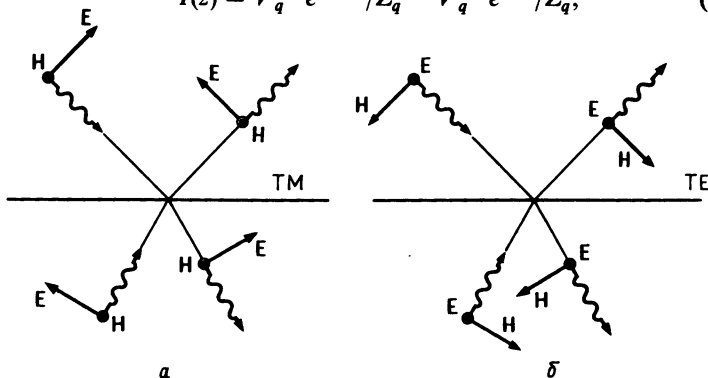


Рис. 3.10. а — поперечные магнитные (ТМ) и б — поперечные электрические (ТЕ) волны.

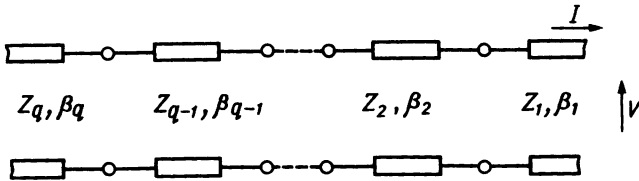


Рис. 3.11. Эквивалентная линия передачи для мультислой на рис. 3.8. Каждая из секций имеет длину, равную толщине соответствующего слоя.

где  $V_q^{(+)}$  и  $V_q^{(-)}$  — постоянные, а импеданс  $\hat{Z}_q$  совпадает с  $Z_q^{(e)}$  для ТМ-волн или  $Z_q^{(h)}$  для ТЕ-волн. Величины  $V(z)$  и  $I(z)$  [равные  $V_e(z)$ ,  $I_e(z)$  для ТМ-волн и  $V_h(z)$ ,  $I_h(z)$  для ТЕ-волн] формально можно рассматривать как напряжение и силу тока в электрической цепи. Как принято в теории линий передачи, ток в верхней цепи считается положительным, если он направлен в положительном направлении оси  $z$ . При рассмотрении многослойных сред поставим в соответствие каждому из однородных слоев диэлектрика (обозначаемому нижним индексом  $q$ ) элемент линии передачи с характеристическим импедансом  $\hat{Z}_q$  и длиной  $d_q$ .

Указанная выше аналогия становится полной, если ввести понятие *локального импеданса*

$$\vec{Z}(z) = V(z)/I(z), \quad (3.7.11)$$

для которого с помощью соотношений (3.7.10) можно получить выражение

$$\vec{Z}(z) = \hat{Z}_q \frac{V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z} + V_q^{(-)} e^{i\beta_q z}}{V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z} - V_q^{(-)} e^{i\beta_q z}}. \quad (3.7.12)$$

Пусть рассматриваемый  $q$ -й слой находится в сечении  $z = 0$ . Тогда

$$\vec{Z}(0) = \hat{Z}_q \frac{V_q^{(+)} + V_q^{(-)}}{V_q^{(+)} - V_q^{(-)}}, \quad (3.7.13)$$

$$\frac{V_q^{(-)}}{V_q^{(+)}} = \frac{\vec{Z}(0) - \hat{Z}_q}{\vec{Z}(0) + \hat{Z}_q}. \quad (3.7.14)$$

Сравнивая выражения (3.7.12) и (3.7.13), получаем

$$\vec{Z}(z) = \hat{Z}_q \frac{\vec{Z}(0) - i\hat{Z}_q \operatorname{tg}(\beta_q z)}{\vec{Z}(0) - i\vec{Z}(0) \operatorname{tg}(\beta_q z)}. \quad (3.7.15)$$

Величина  $\vec{Z}(z)$  представляет собой измеряемое отношение разности потенциалов и тока в сечении  $z$  в том случае, когда часть линии левее  $z$  удалена и заменена на генератор электрического напряжения (рис. 3.12). Выражение (3.7.15) можно интерпретировать как соотношение, связывающее локальный импеданс в произвольной точке  $z$  с его известным значением в некоторой точке  $z_1$  той же пластины. На

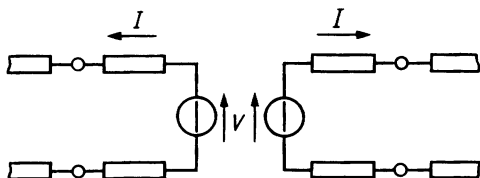


Рис. 3.12. Схематическое представление измерения импедансов в произвольном сечении линии передачи на рис. 3.11.

самом деле произвол в выборе начала отсчета  $z = 0$  позволяет обобщить соотношение (3.7.15) следующим образом:

$$\tilde{Z}(z) = \hat{Z}_q \frac{\tilde{Z}(z_1) - i\hat{Z}_q \operatorname{tg} [\beta_q(z - z_1)]}{\hat{Z}_q - i\tilde{Z}(z_1) \operatorname{tg} [\beta_q(z - z_1)]}. \quad (3.7.16)$$

Рассмотрим теперь *амплитудный коэффициент отражения*  $r$ , определяемый как отношение обратной и прямой составляющих напряжения  $V(z)$ , а именно

$$r(z) = e^{2i\beta_q z} V_q^{(-)} / V_q^{(+)}. \quad (3.7.17)$$

С помощью соотношений (3.7.10) и (3.7.11) это выражение можно переписать в виде

$$r(z) = [\tilde{Z}(z) - \hat{Z}_q] / [\tilde{Z}(z) + \hat{Z}_q]. \quad (3.7.18)$$

Заметим, что, в то время как  $\tilde{Z}(z)$  наряду с величинами  $V(z)$  и  $I(z)$  являются непрерывными функциями координаты  $z$ , импеданс  $\hat{Z}_q$  представляет собой кусочно-непрерывную функцию, так что функция  $r(z)$  разрывна при  $z = z_q$ , где  $z_q$  — левая граница  $q$ -го слоя.

На каждой из границ разрыва  $z = z_q$  можно определить также *амплитудный коэффициент пропускания*  $t_q$ :

$$t_q = V(z_q) / [V_{q+1}^{(+)} e^{-i\beta_{q+1} z_q}], \quad (3.7.19)$$

который есть не что иное, как отношение  $V(z_q)$  к прямой составляющей  $V(z)$  непосредственно перед  $z_q$ . Отметим здесь, в чем состоит различие между ТМ- и ТЕ-волнами. Если мы ищем комплексную амплитуду *полного* электрического поля  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x + \hat{\mathbf{z}} E_z$  сразу за поверхностью  $z = z_q$ , то удобно определить новый коэффициент  $t_q^{(\text{полн})}$ , получаемый из  $t_q$  подстановкой в выражение (3.7.19) соответствующих суммарных амплитуд электрического поля вместо  $V(z_q)$  и  $V_{q+1}^{(+)} e^{-i\beta_{q+1} z_q}$ . При этом для ТМ(р)- и ТЕ(с)-волн нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} t_{q,p}^{(\text{полн})} &= t_{q,p} \cos \theta_q / \cos \theta_{q+1} = \\ &= t_{q,p} (n_{q+1}^2 - n_q^2 \sin^2 \theta_q)^{1/2} / (n_{q+1}^2 - n_q^2 \sin^2 \theta_q)^{1/2}, \quad (3.7.20) \\ t_{q,s}^{(\text{полн})} &= t_{q,s}, \end{aligned}$$

так как в этом случае  $V$  представляет собой полное электрическое поле. Формальное описание распространения волн в последовательности

слоев можно завершить, замечая, что из условия непрерывности тангенциальные составляющие поля связывают  $V_{q+1}^{(+)}$  и  $V_{q+1}^{(-)}$  с  $V_q^{(+)}$  и  $V_q^{(-)}$  следующими выражениями:

$$\begin{aligned} V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z_q} + V_q^{(-)} e^{i\beta_q z_q} &= V_{q+1}^{(+)} e^{-i\beta_{q+1} z_q} + V_{q+1}^{(-)} e^{i\beta_{q+1} z_q}, \\ \frac{V_q^{(+)} e^{-i\beta_q z_q} - V_q^{(-)} e^{i\beta_q z_q}}{\hat{Z}_q} &= \frac{V_{q+1}^{(+)} e^{-i\beta_{q+1} z_q} - V_{q+1}^{(-)} e^{i\beta_{q+1} z_q}}{\hat{Z}_{q+1}}. \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

### 3.8. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Рассмотрим простейший случай двух диэлектрических сред с показателями преломления соответственно  $n_1$  и  $n_2$ , разделенных плоскостью  $z = 0$ . Согласно принятому нами соглашению  $n_2$  — это показатель преломления той среды, куда волны поступают прежде всего. Мы будем следовать этому несколько неестественному выбору, поскольку он согласуется с тем, что мы приняли уже при рассмотрении мультислов (см. рис. 3.8), когда, грубо говоря, отражение начинается с подложки.

Коэффициент отражения  $r_p$  для ТМ-волны на поверхности раздела (а точнее, сразу перед границей раздела 2 → 1) определяется выражением [см. (3.7.18)]

$$r_p = -\frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}, \quad (3.8.1)$$

где мы использовали соотношение (3.7.7), а также учли то, что  $\vec{Z}(0)$  совпадает с  $\vec{Z}^{(e)}$  [поскольку среда 1 расположена между  $z = 0$  и  $z = +\infty$  и в ней нет волны, бегущей в обратном направлении, т. е. из (3.7.12) следует, что при  $z > 0$   $\vec{Z}(z) = \vec{Z}_1$ ]. Закон Снеллиуса и выражение (3.7.8) позволяют переписать выражение (3.8.1) и аналогичные выражения для  $r_s$ ,  $t_p$  и  $t_s$  в виде

$$\begin{aligned} r_p &= -\frac{\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, & r_s &= -\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \\ t_p &= \frac{2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}, & t_s &= \frac{2 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

Здесь  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — соответственно углы преломления и падения.

Соотношения (3.8.2) известны как *формулы Френеля*. Они справедливы лишь для идеально плоских поверхностей раздела. Наличие неровностей, шероховатостей или царапин приводит к рассеянию падающего излучения, что сказывается на действительной отражательной способности. Заметим, что  $r_p = 0$ , если  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Угол падения  $\theta_B$ , для которого верно это равенство, называют *углом Брюстера*, ко-



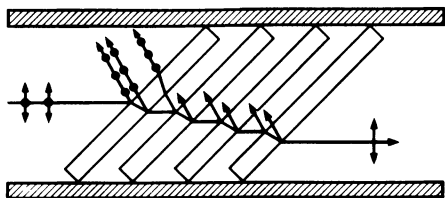


Рис. 3.13. Используемая в качестве поляризатора стопка стеклянных пластин, расположенных под углом Брюстера.

торый в соответствии с законом Снеллиуса определяется выражением

$$\operatorname{tg} \theta_B = n_1/n_2. \quad (3.8.3)$$

Равенство  $r_p(\theta_B)$  нулю широко используется в светоделительных поляризаторах (рис. 3.13). В трубках газовых лазеров для улучшения пропускания р-компоненты поля окна располагают под углом Брюстера к оси трубки.

С физической точки зрения источником отраженного поля являются диполи, возбуждаемые во второй среде преломленным полем  $\mathbf{E}$  и направленные параллельно самому вектору  $\mathbf{E}$ . Однако в направлении своей ориентации диполь не излучает. Следовательно, если отраженные лучи параллельны возникающим во второй среде диполям, то связанное с ними поле должно быть равно нулю. Именно такая ситуация реализуется при  $\theta = \theta_B$ .

В случае когда  $r_p(\theta_B) = 0$  и  $t_p(\theta_B) = 1$ , выражения (3.8.2) и (3.8.3) приводят к следующим равенствам:

$$r_s(\theta_B) = (n_2^2 - n_1^2)/(n_1^2 + n_2^2), \quad (3.8.4a)$$

$$t_s(\theta_B) = 2n_2^2/(n_1^2 + n_2^2). \quad (3.8.4b)$$

Необходимо также подчеркнуть, что для любого угла падения коэффициенты  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $t_p$  и  $t_s$ , определяемые выражениями (3.7.17) и (3.7.19), удовлетворяют в соответствии с (3.7.10a) следующим соотношениям:

$$t_s - r_s = t_p - r_p = 1. \quad (3.8.5)$$

Выразим теперь коэффициенты отражения и пропускания через соответствующие *оптические интенсивности* (измеряемые в ваттах на квадратный метр)  $I_r$  и  $I_t$ . Если интенсивность падающей волны обозначить через  $I_i$ , то можно записать следующую цепочку соотношений, справедливых для s-волн:

$$I_i = E_i H_i^* / 2 = n_2 |E_i|^2 / (2\zeta_0), \quad (3.8.6a)$$

$$I_r = I_i |r_s|^2 \equiv I_i R_s, \quad (3.8.6b)$$

$$I_t = I_i |t_s|^2 n_1/n_2 \equiv I_i T_s, \quad (3.8.6b)$$

в то время как для р-волн мы имеем

$$I_r = I_i |r_p|^2 \equiv I_i R_p, \quad (3.8.7a)$$

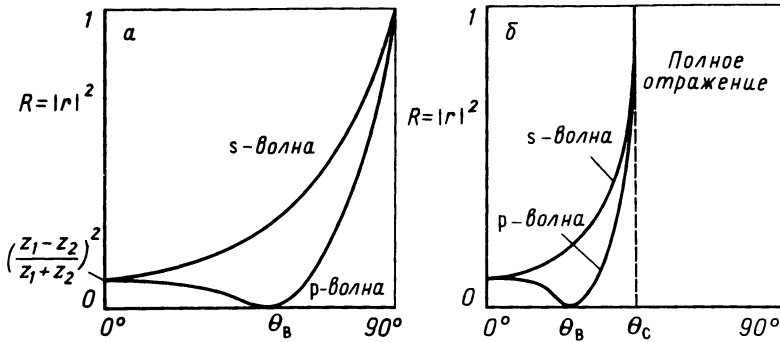


Рис. 3.14. Зависимость отражательной способности от угла падения для р- и s-волн в случаях, когда луч распространяется из воздуха в диэлектрик (а) и из диэлектрика в воздух (б).

$$I_t = I_i |t_p|^2 (n_1/n_2) |\cos \theta_r / \cos \theta_1|^2 \equiv I_i T_p. \quad (3.8.76)$$

Величины  $R$  и  $T$  называют соответственно *коэффициентом отражения* (или *отражательной способностью*) и *пропускания* (или *пропускательной способностью*). В частности, из (3.8.2) следует (рис. 3.14), что

$$R_s = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) / \sin^2(\theta_1 + \theta_2), \quad (3.8.8a)$$

$$R_p = \operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2) / \operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2). \quad (3.8.8b)$$

При нормальном угле падения эти соотношения сводятся к следующим выражениям:

$$R_s = R_p = (n_1 - n_2)^2 / (n_1 + n_2)^2, \quad (3.8.9)$$

$$T_s = T_p = 4n_1 n_2 / (n_1 + n_2)^2. \quad (3.8.10)$$

Если же  $\tilde{n}_1$  и  $\tilde{n}_2$  — комплексные величины, т. е. потерями пренебречь нельзя, то выражения (3.8.9) и (3.8.10) можно записать в обобщенном виде:

$$R_s = R_p = |\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2|^2 / |\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2|^2 \quad (\theta_1 = 0), \quad (3.8.11a)$$

$$T_s = T_p = 4(\operatorname{Re} \tilde{n}_1 \operatorname{Re} \tilde{n}_2 + \operatorname{Im} \tilde{n}_1 \operatorname{Im} \tilde{n}_2) / |\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2|^2 \quad (\theta_1 = 0). \quad (3.8.11b)$$

Если энергия преломленного луча диссипирует в среде 1 (например, в металлических подложках достаточной толщины), то для описания соответствующих потерь на поглощение вводят понятие *коэффициентов поглощения* (или *поглощательной способности*)  $A_s$  и  $A_p$ , где  $A_s = 1 - R_s$ ,  $A_p = 1 - R_p$ . На рис. 3.15 построены зависимости коэффициентов поглощения при нормальном падении для некоторых типичных металлов.

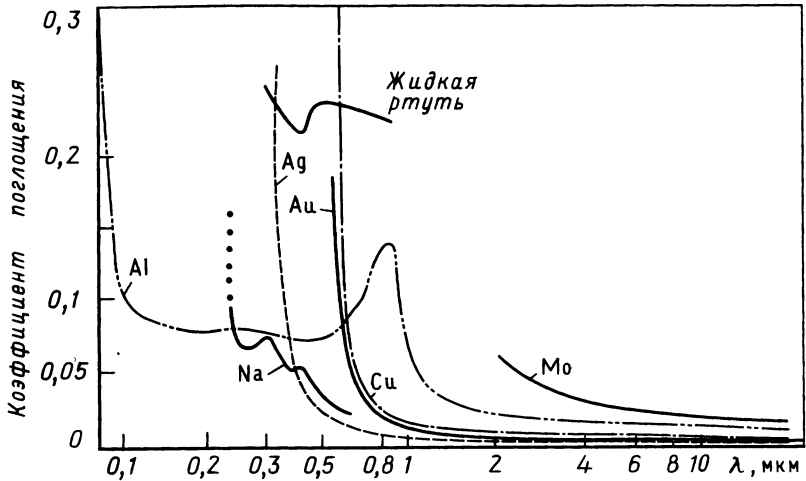


Рис. 3.15. Зависимость коэффициента поглощения от длины волны для некоторых типичных металлов.

### 3.9. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим однородный диэлектрический слой толщиной  $d$ . Выражения (3.7.10) позволяют получить простые соотношения для эквивалентного напряжения  $V_1$  и силы тока  $I_1$  как на поверхности 1, так и на поверхности 2. Действительно, если положить  $z_1 = 0$  и  $z_2 = -d$ , то мы имеем

$$V_1 = V^{(+)} + V^{(-)}, \quad (3.9.1)$$

$$I_1 = V^{(+)} / \hat{Z} - V^{(-)} / \hat{Z},$$

$$V_2 = V^{(+)} e^{-i\beta d} + V^{(-)} e^{i\beta d}, \quad (3.9.2a)$$

$$I_2 = V^{(+)} e^{-i\beta d} / \hat{Z} - V^{(-)} e^{i\beta d} / \hat{Z}, \quad (3.9.2b)$$

где  $\hat{Z} = Z_p$  для ТМ-волн и  $\hat{Z} = Z_s$  для ТЕ-волн. Таким образом,

$$V^{(+)} = V_1 / 2 + \hat{Z} I_1 / 2, \quad (3.9.3a)$$

$$V^{(-)} = V_1 / 2 - \hat{Z} I_1 / 2, \quad (3.9.3b)$$

Из этих соотношений в свою очередь получаем

$$V_2 = V_1 \cos \beta d - i \hat{Z} I_1 \sin \beta d, \quad (3.9.4a)$$

$$I_2 = -i V_1 \sin(\beta d) / \hat{Z} + I_1 \cos \beta d. \quad (3.9.4b)$$

Последние уравнения можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta d & -i \hat{Z} \sin \beta d \\ -i \sin(\beta d) / \hat{Z} & \cos \beta d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \quad (3.9.5)$$

Входящая сюда матрица  $2 \times 2$  называется *характеристической матрицей*, или *матрицей пропускания* слоя [19]. В оптике эти матрицы впервые использовали Херпин и Мачмор при рассмотрении простых сред. Позднее они были обобщены на анизотропные кристаллы [20]. Элементы характеристической матрицы зависят от оптической толщины  $\beta d$  и импеданса  $\hat{Z}$  однородного слоя, а ее детерминант равен единице.

Когда рассматривается стопа пластин, пронумерованных, как обычно, справа налево, пара величин  $V_n, I_n$  может быть выражена через  $V_1, I_1$ , если  $(n - 1)$  раз использовать умножение вектора на матрицу аналогично тому, как это сделано в (3.9.5). Точнее говоря, если обозначить через  $\mathbf{M}_{i, i-1}$  матрицу, относящуюся к  $i$ -й пластине, то можно написать следующее выражение:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{n, n-1} \cdot \mathbf{M}_{n-1, n-2} \cdots \mathbf{M}_{2,1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{M}_{n,1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9.6)$$

где  $\mathbf{M}_{n,1}$  — произведение матриц  $\mathbf{M}_{n, n-1} \cdots \mathbf{M}_{2,1}$ . Заметим, что произведение матриц требуется вычислять именно в указанном порядке, так как в общем случае матрицы не коммутируют, исключение составляет лишь случай пластин с одинаковыми характеристиками. Таким образом, можно сказать, что для любого мультислова, используя соответствующую характеристическую матрицу, можно получить одну из другой пары  $V, I$ , относящиеся к произвольным поверхностям раздела.

Проведенное выше рассмотрение применимо для границ раздела мультислова. Однако это ограничение можно обойти для произвольного сечения с абсциссой  $z$ . Поскольку нам ничто не мешает рассматривать это сечение как поверхность раздела между двумя средами, существует матрица  $\mathbf{M}(z, z')$ , такая, что в общем случае мы можем записать

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \mathbf{M}(z, z') \cdot \begin{bmatrix} V(z') \\ I(z') \end{bmatrix}. \quad (3.9.7)$$

В качестве следующего шага можно отказаться и от предположения о постоянстве показателя преломления в каждом слое. Действительно, каждый непрерывный профиль можно аппроксимировать мультисловом, состоящим из бесконечно тонких пластин. Отсюда можно заключить, что метод характеристической матрицы применим и для общего случая произвольной плоскостной среды. В частности, для любой такой среды  $\det \mathbf{M}(z, z') = 1$ , так как для каждой матрицы  $\mathbf{M}$  детерминант равен единице, а детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов.

В следующем разделе мы рассмотрим сначала случай пластины с

произвольным профилем  $n(z)$ , а затем дадим последовательный анализ периодической стопы, состоящей из одинаковых пластин, каждая из которых характеризуется одной и той же матрицей  $\mathbf{M}$ .

### 3.9.1. Уравнение для $\mathbf{M}$ -матрицы

Для среды с изменяющимся  $n$  с помощью соотношения (3.9.5) получаем

$$\mathbf{M}(z + dz, z') = \mathbf{M}(z + dz, z) \cdot \mathbf{M}(z, z') = \mathbf{M}(z, z') + i dz \begin{bmatrix} 0 & \beta \hat{Z} \\ \beta / \hat{Z} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}(z, z'),$$

Следовательно, (3.9.8)

$$-i \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(z + dz, z') - \mathbf{M}(z, z')}{dz} = -i \frac{d}{dz} \mathbf{M}(z, z') = \begin{bmatrix} 0 & \beta \hat{Z} \\ \beta / \hat{Z} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}(z, z').$$

(3.9.9)

Если теперь обозначить элементы матрицы  $\mathbf{M}(z, z')$  как  $A = M_{1,1}$ ,  $B = M_{1,2}$ ,  $C = M_{2,1}$  и  $D = M_{2,2}$ , то из уравнения (3.9.9) мы имеем

$$dA/dz = i\beta \hat{Z} C, \quad (3.9.10a)$$

$$dB/dz = i\beta \hat{Z} D, \quad (3.9.10б)$$

$$dC/dz = i\beta A / \hat{Z}, \quad (3.9.10в)$$

$$dD/dz = i\beta B / \hat{Z}, \quad (3.9.10г)$$

где как  $\beta$ , так и  $\hat{Z}$  являются функциями координаты  $z$ . Если  $n$  — непрерывная функция от  $z$ , то уравнения (3.9.10а) и (3.9.10в) дают

$$\hat{Z} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{\hat{Z}} \frac{dA}{d\phi} \right) + A = 0; \quad (3.9.11)$$

здесь  $\phi = \int \beta dz$  — *фазовая толщина*. Это уравнение необходимо решать вместе с дополнительными условиями  $A(z', z') = 1$  и  $dA/dz = 0$  при  $z = z'$  [последнее соотношение следует из того, что  $C(z', z') = 0$ ]. Если в среде нет потерь, то  $\beta$  и  $\hat{Z}$  вещественны и из уравнения (3.9.11) при начальном условии  $A = 1$  следует, что  $A(z, z')$  — тоже вещественная функция. В свою очередь из уравнения (3.9.10в) следует, что  $C$  — мнимая величина. Аналогичные выкладки можно повторить для  $B$  и  $D$ . Поэтому можно заключить, что для среды без потерь диагональные элементы  $\mathbf{M}$ -матрицы являются вещественными, а недиагональные — мнимыми.

Заметим, что  $\beta(z) = k_0 [n^2(z) - k_x^2 / k_0^2]^{1/2}$ , т. е. уравнение (3.9.11) содержит большой параметр  $k_0^2$ . Поэтому его можно переписать по аналогии с (3.4.6), используя следующие подстановки:  $d\eta = \hat{Z} (n^2 - k_x^2 / k_0^2)^{1/2} dz$ ,  $\Lambda = k_0$ ,  $Q(\eta) = 1 / \hat{Z}^2$ . Таким образом, если  $n(z)$  мало изменяется на расстоянии порядка длины волны, то функцию  $A$

можно разложить в асимптотический ряд (3.4.7). Таким образом, используя начальные условия, нетрудно получить

$$A(z, z') \sim [\hat{Z}(z')/\hat{Z}(z)]^{-1/2} \cos[k_0(S_0 - S_2/k_0^2 + \dots)], \quad (3.9.12)$$

где

$$S_0 = \int_z^{z'} \left( n^2 - \frac{k_x^2}{k_0^2} \right)^{1/2} dz'', \quad (3.9.13a)$$

$$S_2 = \int_z^{z'} \left[ \frac{3}{8} \frac{\hat{Z}'^2}{\hat{Z}^2} - \frac{1}{4} \frac{\hat{Z}''}{\hat{Z}} \right] \left( n^2 - \frac{k_x^2}{k_0^2} \right)^{1/2} dz''; \quad (3.9.13b)$$

здесь  $\hat{Z}'$  и  $\hat{Z}''$  — производные импеданса  $\hat{Z}$  первого и второго порядков по фазовой переменной  $\int (n^2 - k_x^2/k_0^2)^{1/2} dz''$ . Аналогичные разложения можно получить и для остальных компонент **M**-матрицы.

### 3.9.2. Вычисление **M**-матрицы для мультислоя

Рассмотрим теперь мультислой из  $m$  слоев, каждый из которых характеризуется одинаковой **M**-матрицей, а чтобы получить матрицу для всего мультислоя, матрицу **M** нужно повторить  $m$  раз, т. е. вычислить  $m$ -ю степень матрицы **M**. Для этого **M** удобно представить в виде двух матриц  $\mathbf{O}^{(+)}$  и  $\mathbf{O}^{(-)}$ , таких, что  $\mathbf{O}^{(+)^2} = \mathbf{O}^{(+)}$ ,  $\mathbf{O}^{(-)^2} = \mathbf{O}^{(-)}$  и  $\mathbf{O}^{(+)} \cdot \mathbf{O}^{(-)} = 0$ . Для того чтобы найти это представление, будем действовать в три этапа. Во-первых, найдем два собственных значения  $\gamma_{\pm}$  матрицы **M** (для простоты будем считать, что они различны); во-вторых, вычислим правые и левые собственные векторы матрицы **M**, соответствующие  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , и, в-третьих, построим  $\mathbf{O}^{(+)}$  и  $\mathbf{O}^{(-)}$ , используя эти собственные векторы. Для нахождения собственных значений нужно решить уравнение

$$\det \begin{bmatrix} A - \gamma & B \\ C & D - \gamma \end{bmatrix} = 0, \quad (3.9.14)$$

из которого с учетом равенства  $\det \mathbf{M} = 1$  получаем

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(A + D) \mp i[1 - (A + D)^2/4]^{1/2} = e^{\mp i\delta}. \quad (3.9.15)$$

Здесь

$$\delta = \arccos[(A + D)/2]. \quad (3.9.16)$$

Вычислим затем правый собственный вектор  $\mathbf{V}^{(+)} \equiv (V^{(+)}, I^{(+)})$ , соответствующий  $\gamma_+$ . Для этого нужно решить однородную систему уравнений

$$(A - \gamma_+)V^{(+)} + BI^{(+)} = 0, \quad (3.9.17a)$$

$$CV^{(+)} + (D - \gamma_+)I^{(+)} = 0. \quad (3.9.17b)$$

Аналогично для нахождения левого собственного вектора

$\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \equiv [\tilde{V}^{(+)}, \tilde{I}^{(+)}]$  решаем систему уравнений

$$(A - \gamma_+) \tilde{V}^{(+)} + C \tilde{I}^{(+)} = 0, \quad (3.9.18a)$$

$$B \tilde{V}^{(+)} + (D - \gamma_+) \tilde{I}^{(+)} = 0, \quad (3.9.18b)$$

При этом все собственные векторы определяются с точностью до произвольного постоянного множителя. Очевидно, что те же уравнения справедливы при замене  $\gamma_+$ ,  $\mathbf{V}^{(+)}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \rightarrow \gamma_-$ ,  $\mathbf{V}^{(-)}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}^{(-)}$ .

Теперь нетрудно построить матрицу  $\mathbf{O}^{(+)}$  ( $\mathbf{O}^{(-)}$ ), комбинируя составляющие векторов  $\mathbf{V}^{(+)}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}^{(+)}$  следующим образом:

$$\mathbf{O}^{(+)} = \frac{\mathbf{V}^{(+)} \tilde{\mathbf{V}}^{(+)}}{\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(+)}} \frac{i}{2 \sin \delta} \begin{bmatrix} A - e^{i\delta} & B \\ C & D - e^{i\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.9.19)$$

Матрица  $\mathbf{O}^{(-)}$  определяется аналогично. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{O}^{(+)^2} &= \frac{1}{(\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(+)})^2} \mathbf{V}^{(+)} (\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(+)}) \tilde{\mathbf{V}}^{(+)} = \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(+)}} \mathbf{V}^{(+)} \tilde{\mathbf{V}}^{(+)} = \mathbf{O}^{(+)}, \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

$$\mathbf{O}^{(-)^2} = \mathbf{O}^{(-)},$$

$$\mathbf{O}^{(+)} \cdot \mathbf{O}^{(-)} = \frac{1}{\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(+)}} \frac{1}{\tilde{\mathbf{V}}^{(-)} \cdot \mathbf{V}^{(-)}} \mathbf{V}^{(+)} (\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(-)}) \tilde{\mathbf{V}}^{(-)} = 0. \quad (3.9.21)$$

Равенство нулю последнего произведения следует из соотношения

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(-)} = \frac{1}{\gamma_-} \tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{(-)} = \frac{1}{\gamma_+} \tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{(-)}, \quad (3.9.22)$$

которое при  $\gamma_+ \neq \gamma_-$  верно лишь в том случае, если  $\tilde{\mathbf{V}}^{(+)} \cdot \mathbf{V}^{(-)} = 0$ .

Теперь можно выразить  $\mathbf{M}$  через  $\mathbf{O}^{(+)}$  и  $\mathbf{O}^{(-)}$ :

$$\mathbf{M} = C_+ \mathbf{O}^{(+)} + C_- \mathbf{O}^{(-)}. \quad (3.9.23)$$

Умножая обе части этого равенства на  $\mathbf{O}^{(+)}$ , получаем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{O}^{(+)} = C_+ \mathbf{O}^{(+)} = \gamma_+ \mathbf{O}^{(+)} \rightarrow C_+ = \gamma_+. \quad (3.9.24)$$

Поскольку аналогичное равенство справедливо и для  $C_-$ , окончательно имеем

$$\mathbf{M} = \gamma_+ \mathbf{O}^{(+)} + \gamma_- \mathbf{O}^{(-)}. \quad (3.9.25)$$

Кроме того, с использованием условия ортогональности ( $\mathbf{O}^{(+)} \cdot \mathbf{O}^{(-)} = 0$ ) и идемпотентности ( $\mathbf{O}^{(\pm)^2} = \mathbf{O}^{(\pm)}$ ) нетрудно получить (другое выражение для  $\mathbf{M}^n$  приведено в задаче 7)

$$\mathbf{M}^n = \gamma_+^n \mathbf{O}^{(+)} + \gamma_-^n \mathbf{O}^{(-)}. \quad (3.9.26)$$

*Пример:*  $\mathbf{M}$ -матрица мультислоя с попеременно изменяющимся показателем преломления. Соотношение (3.9.26) полезно применять, в частности, для вычисления матрицы мультислоя, состоящего из  $2m$

чередующихся слоев с показателями преломления соответственно  $n_a$ ,  $n_b$  и толщинами  $d_a$ ,  $d_b$ . В этом случае, если обозначить через  $\mathbf{M}_a$  и  $\mathbf{M}_b$  матрицы отдельных слоев, то из уравнения (3.9.5) для матрицы  $\mathbf{M}_{ba}$  двойного слоя получаем

$$\mathbf{M}_{ba} = \mathbf{M}_b \cdot \mathbf{M}_a =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi_a \cos \phi_b - \frac{\hat{Z}_b}{\hat{Z}_a} \sin \phi_a \sin \phi_b & -i \hat{Z}_a \sin \phi_a \cos \phi_b - i \hat{Z}_b \cos \phi_a \sin \phi_b \\ -\frac{i}{\hat{Z}_b} \cos \phi_a \sin \phi_b - \frac{i}{\hat{Z}_a} \sin \phi_a \cos \phi_b & -\frac{\hat{Z}_a}{\hat{Z}_b} \sin \phi_a \sin \phi_b + \cos \phi_a \cos \phi_b \end{bmatrix}, \quad (3.9.27)$$

где  $\phi_a = \beta_a d_a$  и  $\phi_b = \beta_b d_b$  — фазовые толщины слоев соответственно  $a$  и  $b$ . Для того чтобы представить матрицу  $\mathbf{M}_{ba}$  в виде, аналогичном (3.9.25), нужно с помощью выражения (3.9.16) вычислить  $\delta$  и решить уравнения (3.9.17) и (3.9.18).

Следует заметить, что для любой слоистой среды матрица  $\mathbf{M}$  при данной длине волны равна характеристической матрице некоторой двухплечной комбинации (теорема Херпина). Математически это утверждение эквивалентно тому, что можно найти четыре таких параметра:  $\hat{Z}_a$ ,  $\hat{Z}_b$ ,  $\phi_a$  и  $\phi_b$ , при которых матричные элементы в (3.9.27) будут совпадать с величинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

### 3.10. БЛОХОВСКИЕ ВОЛНЫ

Продолжим анализ структур, состоящих из  $m$  одинаковых слоев толщиной  $\Lambda$ , причем каждый элементарный слой характеризуется матрицей  $\mathbf{M}$ . Периодичность слоев приводит к хорошо известному явлению частичной непрозрачности. Это означает, что в среде могут распространяться лишь волны, частоты которых лежат в определенных интервалах, называемых *полосами пропускания*. Вне этих полос поле затухает экспоненциально, аналогично тому, как затухают волны в средах с потерями. Изучение свойств полос непрозрачности возможно с помощью теоремы Флоке. Этим мы займемся в разд. 3.17. Положение различных полос и их ширина зависят от характеристик элементарного слоя (толщин и показателей преломления составляющих их тонких пленок). С математической точки зрения полосы непрозрачности соответствуют тем частотным интервалам, для которых модули собственных значений  $\gamma_{\pm}$  характеристической матрицы элементарного слоя отличны от единицы, т. е.  $|A + D| > 2$ .

Собственные векторы  $\mathbf{V}^{(+)}$  и  $\mathbf{V}^{(-)}$  матрицы  $\mathbf{M}$  являются также собственными векторами для матрицы степени  $\mathbf{M}^n$ , где  $n$  — произ-



вольная степень. Это позволяет найти значения вектора  $\mathbf{V}(z)$  на любой поверхности раздела между соседними элементарными слоями, а именно при  $z = z_q = -q\Lambda$ , где  $q$  — целое. Правая поверхность первого элементарного слоя расположена в начале оси  $z$ . Если  $\mathbf{V}(0)$  совпадает с  $\mathbf{V}^{(+)}$  или  $\mathbf{V}^{(-)}$ , то

$$\mathbf{V}(z_q) = e^{\pm iq\delta} \mathbf{V}^{(\pm)}. \quad (3.10.1)$$

Для полного описания поля требуется рассмотреть поведение вектора  $\mathbf{V}$  в произвольной точке  $z$ . Для этого воспользуемся *теоремой Флоке* (разд. 3.17.1), в соответствии с которой  $\mathbf{V}(z)$  можно представить в виде

$$\mathbf{V}^{(\pm)}(z) = \mathbf{f}^{(\pm)}(z) e^{\mp i\delta z/\Lambda}, \quad (3.10.2)$$

где  $\mathbf{f}^{(\pm)}(z)$  — периодическая функция с периодом  $\Lambda$ , зависящим от профиля  $n(z)$  в элементарном слое. В частности, если элементарный слой имеет плоскость симметрии, то  $\mathbf{f}^{(+)}(z - \Lambda/2) \propto \mathbf{f}^{(-)}(-z - \Lambda/2)$ . Зависимость  $\mathbf{V}^{(\pm)}(z)$  в виде (3.10.2) можно рассматривать как электромагнитный аналог квантовомеханических электронных волн, распространяющихся в кристалле с постоянной решетки  $\Lambda$ . Благодаря этой аналогии векторы  $\mathbf{V}^{(+)}(z)$  и  $\mathbf{V}^{(-)}(z)$  называют *блховскими волнами* [21].

Заметим, что  $\mathbf{V}^{(+)}(z)$  и  $\mathbf{V}^{(-)}(z)$  только в том случае описывают волны, распространяющиеся соответственно в прямом и обратном направлениях, когда  $\delta$  является вещественной величиной, т. е. [см. выражение (3.9.16)]

$$|A + D| \leq 2. \quad (3.10.3)$$

Для элементарного слоя, состоящего из двух пластин, выражения (3.9.27) и (3.9.16) приводят к следующему соотношению:

$$\cos \delta = \cos \phi_a \cos \phi_b - (1/2)(\hat{Z}_a/\hat{Z}_b + \hat{Z}_b/\hat{Z}_a) \sin \phi_a \sin \phi_b. \quad (3.10.4)$$

Если  $\phi_a = \phi_b = \phi$ , то выражение (3.10.4) принимает вид

$$\cos \delta = \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \frac{\hat{Z}_a^2 + \hat{Z}_b^2}{\hat{Z}_a \hat{Z}_b} \sin^2 \phi. \quad (3.10.5)$$

Таким образом,  $\delta$  вещественно, если

$$\cos^2 \phi \geq (\hat{Z}_a - \hat{Z}_b)^2 / (\hat{Z}_a + \hat{Z}_b)^2 \equiv \cos^2 \phi_1. \quad (3.10.6)$$

Поскольку  $\mathbf{V}^{(+)}$  и  $\mathbf{V}^{(-)}$  определены с точностью до произвольного постоянного множителя, блховские волны удобно характеризовать импедансами  $Z^{(+)}$  и  $Z^{(-)}$ , определяемыми следующими выражениями:

$$Z^{(+)} = V^{(+)}(z_q)/I^{(+)}(z_q), \quad Z^{(-)} = V^{(-)}(z_q)/I^{(-)}(z_q). \quad (3.10.7)$$

Если учесть уравнения (3.9.17), то сразу получаем

$$Z^{(+)} = -B/(A - e^{-i\delta}), \quad Z^{(-)} = -B/(A - e^{i\delta}). \quad (3.10.8)$$

Заметим, что для вычисления  $I^{(+)}$  и  $I^{(-)}$  используется одно и то же определение положительного направления тока. Поэтому для волн, распространяющихся в однородной среде справа налево,  $I^{(-)}$  и  $Z^{(-)}$  отрицательны.

### 3.11. ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ И НЕПРОЗРАЧНОСТИ СТОПЫ ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВЫХ ПЛАСТИНОК

В случае когда характеристическая экспонента  $\delta$  вещественна, блоховские волны распространяются через мультислой без затухания и стопа ведет себя как прозрачный диэлектрик. Если же  $\text{Im } \delta \neq 0$ , то амплитуда одной блоховской волны экспоненциально затухает, а другой экспоненциально возрастает. Это означает, что падающая извне волна не может проникнуть в среду. В данном случае стопа действует как отражатель.

Благодаря этим свойствам те частотные интервалы, в которых  $\text{Im } \delta = 0$ , называют *полосами прозрачности (или пропускания)*, а все остальные части спектра — *полосами непрозрачности*. Полосы пропускания для мультислоя с однородной фазовой толщиной ( $\phi_a = \phi_b$ ) непосредственно определяются из уравнения (3.10.6). Каждая полоса пропускания простирается от  $\Omega_m - \Delta\Omega$  до  $\Omega_m + \Delta\Omega$ , где  $\Omega_m$  — центральная угловая частота (рис. 3.16). Величины  $\Omega_m$  и  $\Delta\Omega$  можно сразу вычислить, заметив, что при  $\omega = \Omega_m$  мы имеем  $\cos^2 \phi_a = 1$ , а при  $\omega = \Omega_m \pm \Delta\Omega$ ,  $\cos^2 \phi_a = \cos^2 \phi_l$ . В соответствии с (3.10.6) получаем

$$\Omega_m = \pi n c / (n_a d_a \cos \theta_a) \quad (m \text{ — целое}) \quad (3.11.1)$$

и,

$$\Delta\Omega = \frac{c}{n_a d_a \cos \theta_a} \arccos |(\hat{Z}_a - \hat{Z}_b) / (\hat{Z}_a + \hat{Z}_b)|. \quad (3.11.2)$$



Рис. 3.16. Схематическое представление дисперсионной кривой  $\beta = \beta(\omega)$  (сплошная кривая) и постоянной затухания  $\alpha = \alpha(\omega)$  для периодической структуры (штриховые кривые). Полосы непрозрачности отмечены толстыми отрезками.

В частности, если  $n_b = n_a$ , то из выражения (3.11.2) следует, что  $2\Delta\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{m+1} - \bar{\Omega}_m$ ; это отражает тот очевидный факт, что однородная диэлектрическая среда пропускает все частоты. Центральные угловые частоты  $\bar{\Omega}_m$  полос непрозрачности определяются выражением

$$\bar{\Omega}_m = (m + 1/2)\pi c / (n_a d_a \cos \theta_a), \quad (3.11.3)$$

а  $\Delta\bar{\Omega}$  (полуширина полосы непрозрачности) записывается в виде

$$\Delta\bar{\Omega} = \frac{c}{n_a d_a \cos \theta_a} \arcsin |(\hat{Z}_a - \hat{Z}_b) / (\hat{Z}_a + \hat{Z}_b)|. \quad (3.11.4)$$

В частности,

$$\Delta\bar{\Omega} / \bar{\Omega}_0 = (2/\pi) \arcsin |(\hat{Z}_a - \hat{Z}_b) / (\hat{Z}_a + \hat{Z}_b)|, \quad (3.11.5)$$

в то время как длина волны в вакууме  $\lambda_0$ , соответствующая первой полосе непрозрачности  $\bar{\Omega}_0$ , определяется выражением

$$n_a d_a \cos \theta_a = n_b d_b \cos \theta_b = \lambda_0 / 4. \quad (3.11.6)$$

Следует заметить, что  $\bar{\Omega}_m$  и  $\Delta\bar{\Omega}$  не зависят от поляризации, а  $\Delta\bar{\Omega}$  и  $\Delta\bar{\Omega}$  зависят от нее всегда, за исключением случая нормального падения.

Из выражений (3.11.1) и (3.9.27) следует, что в центре любой полосы пропускания матрица  $\mathbf{M}_{ba}$  сводится к единичной матрице, так что  $\gamma_+ = \gamma_- = 1$ .

Аналогично, в центре любой полосы непрозрачности матрица  $\mathbf{M}_{ba}$  принимает вид

$$\mathbf{M}_{ba} = - \begin{bmatrix} \hat{Z}_a / \hat{Z}_b & 0 \\ 0 & \hat{Z}_b / \hat{Z}_a \end{bmatrix}, \quad (3.11.7)$$

так что  $\gamma_+ = -\hat{Z}_a / \hat{Z}_b$ ,  $\gamma_- = -\hat{Z}_b / \hat{Z}_a$  и  $Z^{(+)} = \infty$ ,  $Z^{-} = 0$ .

В случае когда  $\phi_a = \phi_b$ , можно показать [используя выражения (3.10.8) и (3.9.27)], что импедансы блоховских волн записываются в виде

$$Z^{(\pm)} = \frac{i(\hat{Z}_a + \hat{Z}_b) \sin \phi_a \cos \phi_a}{\frac{1}{2} \left( \frac{\hat{Z}_a}{\hat{Z}_b} - \frac{\hat{Z}_b}{\hat{Z}_a} \right) \sin^2 \phi_a \pm i \left[ 1 - \left( \cos^2 \phi_a - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{Z}_a}{\hat{Z}_b} + \frac{\hat{Z}_b}{\hat{Z}_a} \right) \sin^2 \phi_a \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (3.11.8)$$

Используя затем выражение (3.10.6), получаем  $\hat{Z}_a / \hat{Z}_b = (1 + \cos \phi_t) / (1 - \cos \phi_t)$ , так что  $Z^{(\pm)}$  можно записать в виде

$$Z^{(\pm)} = i \hat{Z}_{cb} \frac{\sin \phi_t \cos \phi_a}{\cos \phi_t \sin \phi_a \pm i (\sin^2 \phi_t - \sin^2 \phi_a)^{1/2}}, \quad (3.11.9)$$

где  $\hat{Z}_{cb}$  — это блоховский импеданс  $Z^{(+)} = -Z^{(-)}$  в центре полосы пропускания, причем

$$\hat{Z}_{cb} = (\hat{Z}_a + \hat{Z}_b) / (2 + \hat{Z}_a / \hat{Z}_b + \hat{Z}_b / \hat{Z}_a)^{1/2}. \quad (3.11.10)$$

В соответствии с этими выражениями произведение  $Z^{(+)}Z^{(-)} = -Z_{cb}^2$  является постоянной величиной. К тому же внутри полосы непрозрачности  $\arg(Z^{(+)}) = \arg(Z^{(-)}) = \pi/2$ . Кроме того, в центре полосы непрозрачности  $\cos \phi_a = 0$ , а это означает, что  $Z^{(+)} \rightarrow \infty$  и  $Z^{(-)} = 0$ , как мы уже отмечали. Внутри полосы пропускания амплитуда  $|Z^{(+)}| = Z_{cb}$  постоянна и  $\arg(Z^{(+)}) + \arg(Z^{(-)}) = \pi$ . Кроме того, при изменении частоты от центра к границе полосы  $\arg(Z^{(+)})$  монотонно увеличивается от 0 до  $\pi/2$ .

### 3.12. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ МУЛЬТИСЛОЯ

Одной из важных задач является определение соотношений между амплитудами блоховских волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях по стопе, расположенной на некоторой подложке S, имеющей импеданс  $\hat{Z}_S$ . Для решения этой задачи заметим, что отношение  $V = V^{(+)} + V^{(-)}$  к  $I = I^{(+)} + I^{(-)}$  на поверхности подложки равно  $\hat{Z}_S$ , т. е. в соответствии с выражениями (3.10.7) имеем

$$\frac{V^{(+)} + V^{(-)}}{V^{(+)} / Z^{(+)} + V^{(-)} / Z^{(-)}} = \hat{Z}_S. \quad (3.12.1)$$

Таким образом, если ввести обозначение  $r_S = V^{(-)} / V^{(+)}$ , то получим

$$r_S = \frac{-Z^{(-)} \hat{Z}_S - Z^{(+)}}{Z^{(+)} \hat{Z}_S - Z^{(-)}}. \quad (3.12.2)$$

В центре полосы непрозрачности  $Z^{(+)} = \infty$ ,  $Z^{(-)} = 0$  (см. разд. 3.11), поэтому вне зависимости от подложки  $r_S = 0$ . Однако равенство нулю амплитуды отраженной волны вовсе не означает, что падающая волна поглощается в нагрузке. На самом деле внутри полосы непрозрачности  $V^{(+)}$  представляет собой *стационарную волну* (вновь обратите внимание на аналогию с электронными волнами в кристалле). При этом обычное представление о полях, распространяющихся в прямом и обратном направлении, уже теряет смысл. В соответствии с выражением (3.10.2) коэффициент отражения  $r_{q+1}$  на левой границе  $q$ -го слоя имеет вид

$$r_{q+1} = r_S e^{-2iq\delta} \quad (q = 1, 2, \dots, m). \quad (3.12.3)$$

Необходимо отдельно остановиться на различии между определением коэффициента отражения, которое мы дали здесь, и тем, которое было дано в разд. 3.3.3. Здесь мы определили коэффициент отражения по отношению к блоховским волнам. Для них понятие о прямом или обратном распространении возможно лишь в приближенном смысле, поскольку такая интерпретация не годится при приближении

к центру полосы непрозрачности. В то же время в разд. 3.3.3 эти понятия совершенно строгие, так как относятся к бегущим волнам. Естественно, что оба используемых определения совпадают при рассмотрении практически однородной среды.

Вычислим теперь коэффициент отражения  $r$  на поверхности раздела между мультислойем и окружающей средой. При этом будем рассматривать структуру типа «окружающая среда —  $(\text{ВН})^m$  — подложка». Заметим, что  $\hat{Z}_q$  (локальный импеданс  $q$ -го элементарного слоя) связан с коэффициентом отражения  $r_q$  и величинами  $Z^{(+)}$ ,  $Z^{(-)}$  следующим соотношением:

$$\hat{Z}_q = Z^{(+)} \frac{1 + r_q}{1 + r_q Z^{(+)} / Z^{(-)}}. \quad (3.12.4)$$

При этом  $Z^{(+)}$  и  $Z^{(-)}$ , как уже отмечалось, представляют из себя локальные импедансы прямой и обратной блоховских волн. Вследствие этого входной импеданс стопы равен величине

$$\hat{Z}_{\text{вх}} = Z^{(+)} \frac{1 + e^{-2im\delta} r_s}{1 + e^{-2im\delta} r_s Z^{(+)} / Z^{(-)}}, \quad (3.12.5)$$

которую с помощью (3.9.5) можно выразить через  $\hat{Z}_s$  и матричные элементы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , характеризующие стопу. Коэффициент отражения  $r$  можно теперь получить, используя соотношение (3.7.18) для случая  $\vec{Z}(z) = \vec{Z}_{\text{вх}}$ ,  $\hat{Z}_q = \hat{Z}_1$ , где  $\hat{Z}_1$  — импеданс окружающей среды. При этом

$$\begin{aligned} r &= \frac{Z^{(+)}Z^{(-)} - \hat{Z}_1 Z^{(-)} + (Z^{(+)}Z^{(-)} - Z^{(+)}\hat{Z}_1)e^{-2im\delta} r_s}{Z^{(+)}Z^{(-)} + \hat{Z}_1 Z^{(-)} + Z^{(+)}Z^{(-)} + Z^{(+)}\hat{Z}_1 e^{-2im\delta} r_s} = \\ &= \frac{A\hat{Z}_s + B - C\hat{Z}_s\hat{Z}_1 - D\hat{Z}_1}{A\hat{Z}_s + B + C\hat{Z}_s\hat{Z}_1 + D\hat{Z}_1}. \end{aligned} \quad (3.12.6)$$

Определим следующий набор вещественных параметров  $X$ ,  $Y$ ,  $W$ ,  $V$ :

$$\begin{aligned} X &= \text{Re}(A/\hat{Z}_1 + B/\hat{Z}_1\hat{Z}_s), \\ Y &= \text{Im}(B/Z_1\hat{Z}_s), \\ W &= \text{Re}(D/\hat{Z}_s), \\ V &= \text{Im}(C + D/\hat{Z}_s). \end{aligned} \quad (3.12.7)$$

Теперь с помощью соотношения (3.12.6) нетрудно получить отражательную способность  $R = |r|^2$ :

$$R = [(X - W)^2 + (Y - V)^2] / [(X + W)^2 + (Y + V)^2]. \quad (3.12.8)$$

Кроме того, если  $\arg(r) \equiv \psi$ , мы имеем

$$\text{tg } \psi = \frac{(X + W)(Y - V) - (X - W)(Y + V)}{(X + W)(X - W) + (Y + V)(Y - V)}. \quad (3.12.9)$$

Следует заметить, что слоистая среда без потерь имеет ту же самую отражательную способность как со стороны окружающей среды, так и со стороны подложки. Это утверждение можно доказать, используя *теорему взаимности* или простые трансформационные свойства **M**-матрицы при инверсии положительной оси распространения (см. задачу 3.8). В соответствии с этим отражательную способность и пропускание  $T = 1 - R$  можно считать характеристиками самой многослойной среды независимо от того, с какой стороны падает на нее излучение.

### 3.12.1. Формула Эйри

В некоторых случаях пропускание системы удобно представить в виде функции от отражательной способности отдельных составляющих подсистем. Рассмотрим для примера среду, изображенную на рис. 3.17. Пусть известен коэффициент отражения двух смежных поверхностей, вычисленный в предположении, что окружающей средой является соответствующий прилегающий слой, который будем считать бесконечно толстым. При этом пропускание  $T$  промежуточного слоя, окруженного двумя мультислоями, определяется *формулой суммы Эйри*:

$$T = 1 - R = \frac{T_1 T_2}{(1 - R_g)^2} \left[ 1 + \frac{4R_g}{(1 - R_g)^2} \sin^2 \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 - 2\phi) \right]^{-1}. \quad (3.12.10)$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  — коэффициенты пропускания соответственно первой и второй подсистем,  $R_g = \sqrt{R_1 R_2}$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — фазы коэффициентов отражения  $r_1$  и  $r_2$ , а  $\phi$  — фазовая толщина слоя между двумя выделенными поверхностями. Доказательство этой формулы оставляет читателю в качестве упражнения (см., например, книгу Стоуна [22]).

Из структуры выражения (3.12.10) видно, что пропускание всей системы может быть равно единице только при выполнении условий



Рис. 3.17. Система, для которой вычисляется сумма Эйри.

$R_1 = R_2$  и  $\sin(\psi_1 + \psi_2 - 2\phi)/2 = 0$ . Отсюда следует, что для мультислоев, симметричных относительно центрального слоя, можно достичь высокой прозрачности, если добиться выполнения этого условия за счет изменения относительной фазовой толщины. Эти системы ведут себя аналогично интерферометрам Фабри—Перо. Изменение расстояния между симметричными мультислоями позволяет управлять частотами, при которых достигаются максимумы пропускания (см. разд. 7.21).

Применительно к интерферометрам формулу Эйри обычно записывают в виде

$$T = T_{\max} \{1 + (2F_R/\pi)^2 \sin^2[\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 - 2\phi)]\}^{-1}, \quad (3.12.11)$$

где

$$T_{\max} = T_1 T_2 / [1 - (R_1 R_2)^{1/2}]^2 \quad (3.12.12)$$

— максимальное пропускание, называемое также *пропускной способностью*, а величина

$$F_R = \pi R_g^{1/2} / (1 - R_g) \quad (3.12.13)$$

— *резкость* интерферометра. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться в разд. 7.21.

### 3.12.2. Четвертьволновые стопы

В пределах полосы пропускания четвертьволновой стопы без потерь ( $\phi_a = \phi_b$ ) выражение (3.12.6) принимает более простой вид:

$$r = \frac{Z^{(+)} Z_1 - Z^{(-)} r_1 - r_s e^{-2im\delta}}{Z^{(-)} Z_1 + Z^{(+)} 1 - r_1^* r_s e^{-2im\delta}}, \quad (3.12.14)$$

где  $r_1$  — коэффициент отражения по отношению к окружающей среде (без потерь). С учетом равенства  $Z^{(-)} = -Z^{(+)*}$ , которое справедливо для диэлектрических пленок без потерь, имеем

$$r_1 = -(Z^{(-)}/Z^{(+)}) (Z_1 - Z^{(+)}) / (Z_1 - Z^{(-)}). \quad (3.12.15)$$

Вычисляя квадрат модуля выражения (3.12.14) для  $r$ , получаем

$$R = \frac{|r_1|^2 + |r_s|^2 + 2|r_1 r_s| \cos(2m\delta + \phi)}{1 + |r_1 r_s|^2 + 2|r_1 r_s| \cos(2m\delta + \phi)}; \quad (3.12.16)$$

здесь  $\phi = \pi + \arg(r_s) - \arg(r_1)$ . Рэлей и другие авторы исследовали поведение мультислоев при  $m \rightarrow \infty$ . В этом случае для отражательной способности выполнено одно из двух условий: 1)  $R$  стремится к единице или 2)  $R$  принимает значение между  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$ , которые определяют огибающую функцию  $R(\lambda)$ . Если рассматривать  $R$  как функцию непрерывного параметра  $m$ , то сразу получаем

$$R_{\min} = \left( \frac{|r_1| - |r_s|}{1 - |r_1 r_s|} \right)^2 < R < R_{\max} = \left( \frac{|r_1| + |r_s|}{1 + |r_1 r_s|} \right)^2. \quad (3.12.17)$$

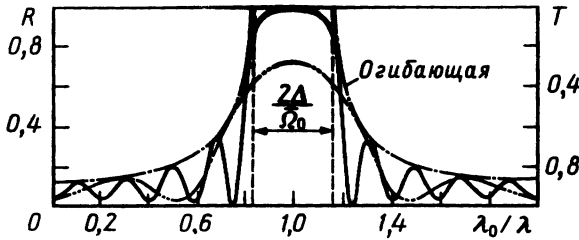


Рис. 3.18. Вычисленные спектры отражения диэлектрического зеркала «стекло —  $(\text{ВН})^p$ ». Здесь  $n_s = 1,51$ ,  $n_B = 2,3$  (ZnS),  $4n_B d_B = \lambda_0$ ;  $n_H = 1,38$  ( $\text{MgF}_2$ );  $4n_H d_H = \lambda_0$ . (---)  $p = 2$ ; (—)  $p = 5$ . (Из [22a].)

На рис. 3.18 построены зависимости  $R(\lambda)$  для мультислоев, состоящих из двух и пяти элементарных составляющих структур. Эти зависимости нормированы на центр полосы непрозрачности. Из рисунка видно, что величина  $R$  осциллирует между огибающими  $R_{\text{макс}}$  и  $R_{\text{мин}}$  (вычисление  $R_{\text{макс}}$  и  $R_{\text{мин}}$  из уравнения (3.12.8) см. в работе [23]).

### 3.12.3. Однослойные покрытия

В случае когда покрытие состоит из одного слоя, выражение (3.12.5) определяет входной импеданс:

$$\hat{Z}_{\text{вх}} = \hat{Z}_s \frac{1 + i(\hat{Z}_c/\hat{Z}_s) \operatorname{tg} \phi_c}{1 + i(\hat{Z}_s/\hat{Z}_c) \operatorname{tg} \phi_c}, \quad (3.12.18)$$

где индекс «с» указывает на принадлежность вычисляемых величин покрытию. Отсюда, используя (3.7.8), получаем коэффициент отражения для р-волн:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{(\hat{Z}_s - \hat{Z}_1)\hat{Z}_c + i(\hat{Z}_c^2 - \hat{Z}_s\hat{Z}_1) \operatorname{tg} \phi_c}{(\hat{Z}_s + \hat{Z}_1)\hat{Z}_c + i(\hat{Z}_c^2 + \hat{Z}_s\hat{Z}_1) \operatorname{tg} \phi_c} = \\ &= \frac{\frac{\cos \theta_s}{n_s} - \frac{\cos \theta_1}{n_1} + i\left(\frac{\cos \theta_c}{n_c} - \frac{\cos \theta_s \cos \theta_1}{\cos \theta_c} \frac{n_c}{n_s n_1}\right) \operatorname{tg} \phi_c}{\frac{\cos \theta_s}{n_s} + \frac{\cos \theta_1}{n_1} + i\left(\frac{\cos \theta_c}{n_c} + \frac{\cos \theta_s \cos \theta_1}{\cos \theta_c} \frac{n_c}{n_s n_1}\right) \operatorname{tg} \phi_c}. \end{aligned} \quad (3.12.19)$$

Для данного направления падающей волны коэффициент отражения  $r_p$  является периодической функцией угловой частоты  $\omega$ :  $r_p(\omega) = r_p(\omega + \Omega)$ . При этом период  $\Omega$  дается выражением

$$\Omega = \frac{2\pi c}{n_c d_c \cos \theta_c}. \quad (3.12.20)$$

Экстремальными значениями величины  $|r_p(\omega)|$  являются

$$\left| \frac{\hat{Z}_s - \hat{Z}_1}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_1} \right|, \quad \left| \frac{\hat{Z}_c^2 - \hat{Z}_s\hat{Z}_1}{\hat{Z}_c^2 + \hat{Z}_s\hat{Z}_1} \right|, \quad (3.12.21)$$



что соответствует угловым частотам

$$\omega = [c/(n_c d_c \cos \theta_c)] q \pi, \quad \omega = [c/(n_c d_c \cos \theta_c)] (2q + 1) \pi / 2 \quad (3.12.22)$$

для любого целого  $q$ . Если  $\hat{Z}_c = (\hat{Z}_s \hat{Z}_1)^{1/2}$ , то минимум величины  $r_p$  равен нулю, т. е. покрытие «преобразует» импеданс подложки в импеданс окружающей среды в полной аналогии с четвертьволновыми преобразователями, используемыми для синхронизации двух линий передачи. Аналогичное рассмотрение можно провести и для  $r_s$ .

### 3.12.4. Отражение от слоя со слабо изменяющимся профилем $n$

В случае когда  $n$  является медленно меняющейся функцией координаты  $z$ , мы можем получить асимптотические решения уравнений (3.9.10), которые описывают эволюцию компонент  $\mathbf{M}$ -матрицы. Точнее говоря, асимптотическое представление компоненты  $A$ , даваемое выражением (3.9.12), нетрудно обобщить и на остальные компоненты. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} A(z, z') &\sim [\hat{Z}(z')/\hat{Z}(z)]^{-1/2} \cos k_0(S_0 - S_2/k_0^2 + \dots), \\ B(z, z') &\sim -i[\hat{Z}(z')\hat{Z}(z)]^{1/2} \sin k_0(S_0 - S_2'/k_0^2 + \dots), \\ C(z, z') &\sim -i[\hat{Z}(z)\hat{Z}(z')]^{-1/2} \sin k_0(S_0 - S_2/k_0^2 + \dots), \\ D(z, z') &\sim [\hat{Z}(z)/\hat{Z}(z')]^{-1/2} \cos k_0(S_0 - S_2'/k_0^2 + \dots), \end{aligned} \quad (3.12.23)$$

где величины  $S_0$  и  $S_2$  определяются выражениями (3.9.13), а  $S_2'$  получается заменой  $\hat{Z}$  на  $1/\hat{Z}$  в выражении (3.9.136). Если рассмотреть теперь среду без потерь, подставить выражение (3.12.23) в (3.12.8) и использовать равенства  $\hat{Z}(z) = \hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}(z') = \hat{Z}_s$ , то получим

$$R = \operatorname{tg}^2[(S_2 - S_2')/2k_0]. \quad (3.12.24)$$

## 3.13. МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ОТРАЖАТЕЛИ

Большинство отражателей, используемых для ультрафиолетового, инфракрасного и видимого излучения, изготавливают, используя метод напыления металлов на полированную поверхность [24]. На рис. 3.15 приведены спектры поглощательной способности некоторых металлических пленок. Почти все такие пленки, за исключением родиевых, плохо пригодны для практического использования из-за их окисления и потускнения. Эти же свойства ограничивают использование в качестве второго слоя зеркал серебро, хотя для него отражение в видимом и ИК-диапазонах максимально. В подавляющем большинстве приложений предпочтительным покрытием является алюминий, имеющий высокую отражательную способность в широкой спектральной

полосе и приемлемую долговечность. В спектре отражательной способности Al существует за счет слабого внутризонного перехода небольшой провал вблизи 0,825 мкм (1,4 эВ). Алюминиевые зеркала для их защиты, а также для увеличения отражательной способности в УФ-диапазоне нередко дополнительно покрывают тонким слоем фторида магния или монооксида кремния.

Большинство металлических отражателей имеют отражательную способность менее 99%. Если же требуется более высокая отражательная способность, необходимо использовать диэлектрические зеркала. Такие зеркала применяются для достижения полного отражения в лазерах с малым усилением, а также в интерферометрических системах. Многослойные диэлектрические покрытия очень слабо поглощают, так что нетрудно изготовить частично пропускающие зеркала. Они широко используются в качестве устройств вывода в стабильных оптических резонаторах.

Простейшие диэлектрические зеркала имеют структуру «стекло —  $(\text{ВН})^m$ ». Используя выражения (3.12.2) и (3.12.5), а также равенства  $e^{i\delta} = -n_B/n_H$ ,  $Z^{(+)} = \infty$  и  $Z^{(-)} = 0$ , нетрудно показать, что в центре полосы непрозрачности импеданс системы определяется следующим образом:

$$\hat{Z}_{\text{вк}} = \hat{Z}_S e^{2im\delta} = \hat{Z}_S (n_B/n_H)^{2m}. \quad (3.13.1)$$

Отсюда с помощью соотношения (3.7.18) найдем

$$r = \frac{\hat{Z}_S (n_B/n_H)^{2m} - \hat{Z}_1}{\hat{Z}_S (n_B/n_H)^{2m} + \hat{Z}_1}. \quad (3.13.2)$$

Для данной комбинации показателей преломления отражательную способность подложки можно увеличить за счет установки достаточного большого числа двойных слоев, для которых частота излучения попадает в центр полосы непрозрачности. При этом удобно представить отражательную способность  $R$  диэлектрического зеркала как функцию параметра, называемого *отношением стоячей волны*  $V$  и учитывающего распределение поля, локализованного у передней поверхности всей системы [25]. Этот параметр широко используется в микроволновой технике [21] для характеристики импедансного рассогласования в волноводе. В нашем случае  $V$  является отношением максимума и минимума амплитуды поля, образующегося в результате интерференции с усилением и ослаблением между начальной и отраженной плоской волной. В отсутствие отражения амплитуда поля вдоль направления распространения постоянна. Если же существует и отраженная волна, то интерференция приводит к появлению стоячей волны и амплитуда поля записывается в виде

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re}[(e^{-ikz} + re^{ikz})e^{i\omega t}E^+], \quad (3.13.3)$$

где  $r$  — коэффициент отражения. В соответствии с этим  $E_x(z, t)$  изменяется в промежутке между максимальным значением  $|E^+|(1 + |r|)$  при  $z$ , таких, что  $1 + re^{2ikz} = 1 + |r|$ , и минимальным значением  $|E^+|(1 - |r|)$ , когда  $1 + e^{2ikz} = 1 - |r|$ . При  $\lambda = \lambda_0$  отношение максимального и минимального значений записывается в виде

$$V = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} = \frac{|\vec{Z}_{\text{вх}}|}{\vec{Z}_1} = \frac{n_1}{n_s} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2m}. \quad (3.13.4)$$

Для тех структур, у которых  $|\vec{Z}_{\text{вх}}| < Z_1$ , имеем  $V = \vec{Z}_1/|\vec{Z}_{\text{вх}}|$  и, как следствие,

$$R = \left( \frac{V - 1}{V + 1} \right)^2, \quad T = \frac{4V}{(V + 1)^2} \quad (\approx 4/V \text{ для высокоотражательного зеркала}). \quad (3.13.5)$$

Определим теперь безразмерную частоту  $g = \lambda_0/\lambda$ , где  $\lambda_0$  — центр первой полосы непрозрачности. Тогда полуширина полосы  $\Delta g$ , т. е. расстояние от центра первой полосы непрозрачности ( $g = 1$ ) до ее границы [см. выражения (3.9.15), (3.11.5) и (3.11.7)], запишется в виде

$$\Delta g = (2/\pi) \arcsin[(n_B/n_H - 1)/(n_B/n_H + 1)]. \quad (3.13.6)$$

В соответствии с выражением (3.13.4) чем больше число двойных слоев, тем больше величина  $V$ . Однако практически  $V$  не превышает  $10^3$ — $10^4$  вне зависимости от того, как много слоев используется. Дело в том, что в тонких пленках потери за счет поглощения и рассеяния увеличиваются с ростом  $m$ , что и ограничивает максимально достижимую отражательную способность. Аналогичное рассмотрение можно провести и для поля внутри мультислоя (см. задачу 13).

Отражательная способность  $R$  периодической структуры типа «стекло —  $(\text{ВН})^m$ » может быть увеличена добавлением еще одного В-слоя, так что мультислой имеет теперь структуру «стекло —  $(\text{ВН})^m \text{В}$ ». В этом случае  $V = [n_B^2/(n_S n_1)](n_B/n_H)^{2m}$ .

Располагая одну или более стоп на соответствующей подложке и устанавливая центры полос непрозрачности на тех длинах волн, которые должны быть подавлены, можно создать либо *длинноволновые*, либо *коротковолновые фильтры* (рис. 3.19). Коротковолновые фильтры с границей при 0,7 мкм применяются в кинопроекторах и других оптических приборах, у которых основная часть излучаемой лампой или угольной дугой энергии сосредоточена в ИК-области спектра. Так называемые *тепловые отражатели* или *холодные*

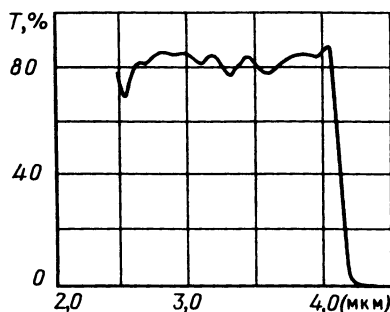


Рис. 3.19. Спектр пропускания коротковолнового фильтра (Optical Coating Laboratory).

зеркала<sup>1)</sup> эффективно предохраняют оптические элементы от тепловых нагрузок.

**Пример. Вычисление спектра отражения диэлектрического зеркала.** Вычислим спектр отражения при нормальном падении излучения на диэлектрическое зеркало, состоящее из 22 четвертьволновых пластинок на стеклянной подложке [структура «стекло — (ВН)<sup>11</sup>»]. Пусть в максимуме отражения  $\lambda_0 = 660$  нм, а диэлектрическими материалами с высоким и низким показателями преломления являются  $\text{TiO}_2$  ( $n_B = 2,3$ ) и  $\text{SiO}_2$  ( $n_H = 1,45$ ) соответственно.

При этих параметрах сразу можно вычислить требуемые величины  $\cos \phi_i = (n_B - n_H)/(n_B + n_H) = 0,226$  и  $Z_{cb} = 0,548 \zeta_0$  [см. выражение (3.10.6) и (3.11.10)]. В дальнейшем будет удобно нормировать импеданс на  $Z_{cb}$ . Для простоты мы будем использовать одинаковые символы как для нормированных, так и ненормированных величин.

Теперь с помощью выражений (3.10.5) и (3.10.6) можно вычислить угол расфазировки  $\delta$ :  $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \phi / \sin^2 \phi_i = 1 - 2,108 \sin^2 \phi$ , где  $\phi = 2\pi nd / \lambda$  есть фазовая толщина одного слоя. Таким образом,  $\delta$  является вещественной величиной при  $0 \leq \phi \leq 1,34$  и  $1,80 \leq \phi \leq 4,48$ . Если же  $1,34 < \phi < 1,80$ , то угол  $\delta$  комплексный:  $\delta = \pi + i\delta''$ . Следовательно, полоса непрозрачности, центрированная при  $\lambda_0 = 660$  нм ( $\phi = \pi/2$ ), имеет границы  $\lambda_{\min} = \pi\lambda_0/(2)(1,80) = 576$  нм,  $\lambda_{\max} = \pi\lambda_0/(2)(1,34) = 779$  нм. Импедансы  $Z^{(\pm)}$  внутри полосы пропускания равны  $Z^{(+)} = i \exp(-i\psi)$  и  $Z^{(-)} = i \exp(i\psi)$ , где  $\psi = \arctg[(\tg^2 \phi_i / \sin^2 \phi - 1/\cos^2 \phi_i)]^{1/2}$  [см. выражение (3.11.9)], а в полосе непрозрачности  $Z^{(+)} = iZ$ , а  $Z^{(-)} = i/Z$ , причем  $Z = \sin \phi_i \cos \phi / [\cos \phi_i \sin \phi - (\sin^2 \phi - \sin^2 \phi_i)^{1/2}]$ .

Используя эти результаты, соответствующий коэффициент отра-

<sup>1)</sup> Зеркала с высоким отражением в видимом диапазоне и высоким пропусканием в ИК-диапазоне. — Прим. перев.

жения  $r_s$  [выражение (3.12.2)] можно записать в виде

$$r_s = - \left( \frac{1 - [2Z_s/(1 - Z_s^2)] \sin \psi}{1 + [2Z_s/(1 + Z_s^2)] \sin \psi} \right)^{1/2} \exp i \left( 2\psi - \arctg \frac{\sin \psi}{\cos 2\omega + Z_s} \right)$$

(в полосе пропускания)

$$= - \left( \frac{1 + Z_s^2/Z^2}{1 + Z_s^2 Z^2} \right)^{1/2} \exp i [\arctg 1/(Z_s Z) - \arctg (Z/Z_s)]$$

(в полосе непрозрачности),

(3.13.7)

где  $Z_s = 1/(0,548 n_s) = 1,2$  для  $n_s = 1,52$ . Величина  $r_1$  дается аналогичным выражением, нужно лишь  $Z_s$  заменить на  $Z_1 = 1,82$  при  $n_1 = 1$ .

Отражательную способность  $R$  можно вычислить с помощью (3.12.16). В частности, в центре полосы непрозрачности коэффициент отражения  $r$  определяется выражением (3.13.2), откуда получаем  $r = 1 - 4,66 \cdot 10^{-5}$ ,  $R = |r|^2 = 1 - 0,93 \cdot 10^{-4}$ . С помощью формул (3.12.17) нетрудно найти огибающие спектра отражения.

### 3.13.1. Отражение при наклонном падении

В некоторых случаях, например в кольцевых лазерах или системах с многопроходными кюветами (лазеры на красителях, системы полного вывода из резонаторов и др.), диэлектрические зеркала располагаются под наклонным углом падения. При этом покрытия изготавливаются несколько более толстыми, чем для обычных лазерных зеркал. Это нужно для того, чтобы компенсировать множитель  $\cos \theta$ , входящий в условие резонанса  $4nd \cos \theta = \lambda_0$ . Из-за различия величин  $Z^{(h)}$  и  $Z^{(e)}$  отражение волн с s- и p-поляризацией различно. При этом у стоп с одинаковой фазовой толщиной величины  $V_s$  и  $V_p$  в центре полосы непрозрачности даются соответственно выражениями

$$V_s(\theta) = \left( \frac{n_B^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}{n_H^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)^m \frac{n_1 \cos \theta}{(n_S^2 - n_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$
(3.13.8a)

$$V_p(\theta) = \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{4m} \frac{n_1^2}{n_S^2} \frac{1}{V_s(\theta)},$$
(3.13.8б)

где  $\theta$  — угол падения. Следовательно  $V_s > 1 (n_B > n_H)$  и  $V_s > V_p$ ,  $R_s > R_p$ . Этим и объясняется тот факт, что для большинства кольцевых лазеров излучение имеет s-поляризацию. Аналогично, из уравнения (3.14.4) мы имеем  $\Delta \bar{Q}_s > \Delta \bar{Q}_p$ . На рис. 3.20 показаны спектры отражения для зеркала при угле падения  $33,5^\circ$ . Различие между полосами непрозрачности для двух поляризаций очевидно. В то же время различие пиковой отражательной способности нельзя заметить, не изменив шкалы  $R$ .

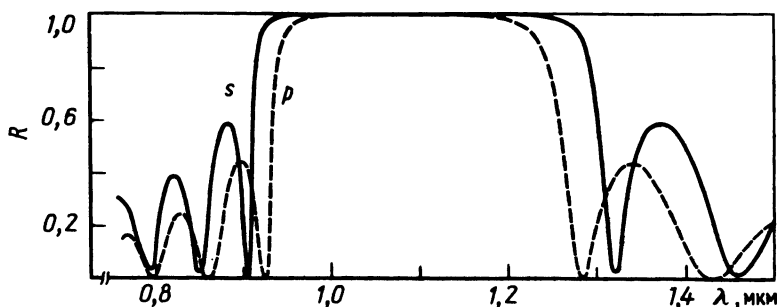


Рис. 3.20. Вычисленная отражательная способность диэлектрического зеркала  $(\text{ВН})^8 \text{ В}$  — стекло разработанного для  $\lambda_0 = 1,06$  (Nd-лазер) и используемого при угле падения  $33,5^\circ$ . (С любезного разрешения Ч. Мизиано, Selenia Industrie Elettroniche.)

Если зеркала, изготовленные для отражения нормально падающей волны, используются в случае наклонного падения волны (вплоть до углов около  $30^\circ$ ), то во многих случаях отклик претерпевает несущественные изменения. Вообще говоря, увеличение угла падения приводит к небольшому сдвигу всей спектральной кривой отражательной способности в сторону более коротких длин волн. Такое поведение проявляется и у некоторых реально существующих в природе периодических структур, например в оперении павлина или на крыльях бабочек.

### 3.13.2. Поляризационные светоделители

Различие в отражении  $p$ - и  $s$ -волн можно использовать для создания поляризованных светоделителей [26], которые широко применяются во многих электрооптических устройствах. Наиболее широко распространенную схему таких поляризаторов предложил в 1946 г. Мак-Нейл, а позднее разрабатывал Баннинг. Само устройство состоит из мультислойной стопы, расположенной по гипотенузе призмы Порро, которая склеивается с такой же призмой и образует в результате склеенный куб (рис. 3.21).

Первоначально использованная [27, 28] мультислойная структура была устроена таким образом, чтобы обеспечить наибольшее отражение для  $s$ -компоненты и наибольшее пропускание для  $p$ -компоненты. При этом, для того чтобы можно было использовать расходящиеся пучки, требуется и определенный допуск на углы падения. Поскольку фазовая толщина каждого слоя равна  $\lambda_0/2$ , любая из структур типа  $(\text{ВН})^m$ ,  $(\text{В}/2, \text{Н}, \text{В}/2)^m$ ,  $(\text{Н}/2, \text{В}, \text{Н}/2)^m$  удовлетворяет указанным здесь условиям. Обычно такие системы конструируются для работы при угле падения  $45^\circ$ .

Из выражений (3.13.8) следует, что отсутствие отражения для

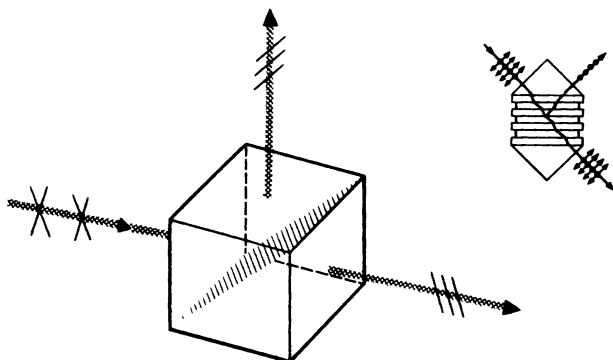


Рис. 3.21. Схема поляризационного делителя Мак-Нейла. Многослойную прокладку можно рассматривать как предельный случай поляризатора из пластин, показанного на рис. 3.13.

компоненты при  $\theta = \pi/4$  [ $V_p(\pi/4) = 1$ ] требует выполнения условия  $V_s(\pi/4) = V_s^2(0)$ . Используя формулу (3.13.8а) при  $\theta = \pi/4$  и положив  $n_1 = n_s = n_{\text{стекло}} \equiv n_G$ , мы получаем

$$[(2n_B^2 - n_G^2)/(2n_H^2 - n_G^2)]^m = (n_B/n_H)^{4m}. \quad (3.13.9)$$

Нетрудно показать, что выражение (3.13.9) выполняется при любых  $m$  только в том случае, если показатель преломления стекла связан с  $n_B$  и  $n_H$  соотношением

$$n_G^2 = 2n_H^2 n_B^2 / (n_H^2 + n_B^2). \quad (3.13.10)$$

В первой такой системе, созданной Баннингом, использовалась комбинация сульфида цинка ( $n_B = 2,3$ ) и криолита ( $n_H = 1,25$ ). При этом показатель преломления стеклянной призмы, удовлетворяющий выражению (3.3.10), должен быть равен 1,55, что очень близко к показателю преломления большинства оптических стекол. Для улучшения физических свойств таких устройств и увеличения ширины спектральной полосы Шредер и Шлафер [29] разработали более сложные конструкции.

Если условие (3.13.10) выполняется точно, то пропускание s-волны может быть сделано крайне малым за счет увеличения  $m$  в соответствии с выражением

$$T_s = 4(n_H/n_B)^{4m}. \quad (3.13.11)$$

### 3.14. ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ

В начале 20-го века английский оптик Дэннис Тэйлор случайно обнаружил возможность искусственного старения оптического стекла при травлении линз, приводящего к уменьшению нежелательного отражения. Этот эффект был объяснен образованием переходного слоя, в ко-

тором показатель преломления плавно изменяется от  $n_{\text{стекло}}$  до  $n_{\text{воздух}}$ . В середине 1930-х годов с развитием процесса вакуумного напыления тонких пленок Смакула в Германии и Стронг в США открыли антиотражающие свойства напыленного диэлектрического слоя. Позднее в 1944 г. Вальтер Геффкен запатентовал процесс просветляющего покрытия с тремя диэлектрическими слоями. С тех пор было исследовано множество просветляющих покрытий [30, 31]. Были разработаны конкретные методики изготовления покрытий с необходимыми характеристиками [32—34]. Некоторые из них мы обсудим ниже.

Как мы уже показали, отражение от диэлектрика можно свести к нулю, а относительное пропускание увеличить до единицы, если использовать пленку толщиной  $\lambda_0/4$  с показателем преломления  $\sqrt{n_s n_1}$ . К сожалению, в большинстве практических случаев этому условию трудно удовлетворить. Например, при нанесении наиболее широко распространенного покрытия из  $\text{MgF}_2$  не удается достичь отражательной способности меньше, чем 1,26%, если окружающая среда — это воздух (рис. 3.22, *a*). Для исключения потерь на отражение необходимо использовать по крайней мере двухслойное покрытие. Действительно, если показатели преломления двух выбранных для покрытия материалов заданы, то нулевое отражение можно получить, выбирая фазовые толщины в соответствии со следующими соотношениями [30]:

$$\text{tg}^2 \phi_1 = n_1^2 \frac{(n_1 - n_s)(n_1 n_s - n_2^2)}{(n_s n_1^2 - n_1 n_2^2)(n_s n_1 - n_1^2)},$$

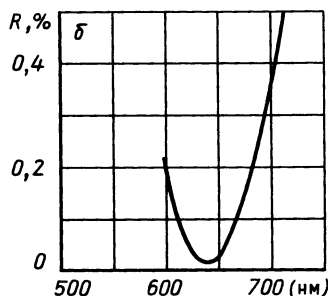
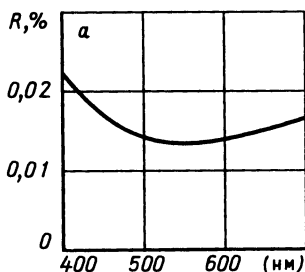
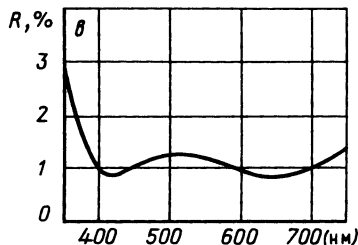


Рис. 3.22. Отражательная способность стеклянной подложки ( $n_s = 1,51$ ) для различных просветляющих покрытий, *a* — однослойное покрытие из  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1,38$ ) с оптической толщиной  $4n_c d_c = 555,4$  нм; *b* — двухслойное V-покрытие:  $n_1 = 1,38$  ( $\text{MgF}_2$ ),  $4n_1 d_1 = 633$  нм,  $n_2 = 2,3$  ( $\text{TiO}_2$ ),  $4n_2 d_2 = 633$  нм (линия He—Ne-лазера); *в* — двухслойное W-покрытие:  $n_1 = 1,38$  ( $\text{MgF}_2$ ),  $4n_1 d_1 = 510$  нм,  $n_2 = 1,6$  ( $\text{CeF}_3$ ),  $4n_2 d_2 = 1020$  нм. (ИЗ работы [30]).





$$\operatorname{tg}^2 \phi_2 = n_2^2 \frac{(n_1 - n_s)(n_1 n_s - n_1^2)}{(n_s n_1^2 - n_1 n_2^2)(n_s n_1 - n_2^2)}. \quad (3.14.1)$$

В частности, если  $n_1^2 n_s = n_2^2 n_1$ , то  $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ . Такое покрытие называют *двойным четвертьволновым*. Заметим, что в такой системе изменение  $R$  с частотой (рис. 3.22, б) имеет вид типичной V-образной зависимости, что и привело к появлению названия «V-покрытие».

В случае когда необходимо иметь слабое отражение в более широком частотном интервале, предпочтительно использовать так называемые *четвертьполуволновые* покрытия, состоящие из полуволновой (прилегающей к подложке) и четвертьволновой пленок. Используя выражение (3.12.8) и (3.9.8) и соотношение  $R = X/(1 + X)$ , нетрудно показать, что для произвольной частоты, для которой  $\phi = \phi_1 = \phi_2/2$ , имеем

$$X = \frac{n_s}{4n_1} \left\{ \left( \frac{n_1}{n_1} - \frac{n_1}{n_s} \right)^2 + \left[ \left( \frac{n_1}{n_s} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{n_2}{n_1} \right)^2 + \left( 1 + 2 \frac{n_1}{n_2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{n_1}{n_1} \right)^2 \left( 5 + 4 \frac{n_1}{n_2} \right) - \left( \frac{n_1}{n_s} \right)^2 \left( 5 + 4 \frac{n_2}{n_1} \right) \right] \cos^2 \phi + \right. \\ \left. + A_4 \cos^4 \phi + A_6 \cos^6 \phi \right\}. \quad (3.14.2)$$

Здесь  $A_4$  и  $A_6$  — коэффициенты, которые зависят от показателей преломления [30]. Для  $\phi = \pi/2$  получаем

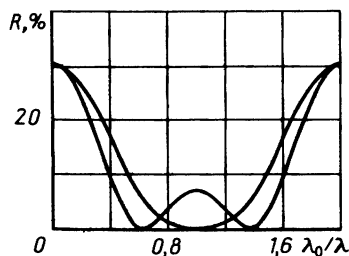
$$R = [(n_1 n_s - n_1^2)/(n_1 n_s + n_1)]^2. \quad (3.14.3)$$

Спектральные зависимости отражательной способности имеют при этом типичный вид с двумя минимумами. Поэтому такие покрытия называют «W-покрытиями» (рис. 3.22, в).

Другие двухслойные просветляющие покрытия используются для подложек с большим показателем преломления [например,  $n_{\text{Si}} = 3,45$  и  $n_{\text{Ge}} = 4$ ]. При этом должны быть выполнены условия  $\phi_1 = \phi_2$  и  $n_2 = n_1 \sqrt{n_s/n_1}$  (так называемые *покрытия I-типа*) или  $\phi_1 = \phi_2$  и  $n_2 = n_s n_1/n_1$  (*покрытия II-типа*). В первом случае  $R$  имеет единственный широкий минимум, причем  $R = 0$  при  $\phi = \pi/2$  (рис. 3.23). Во втором случае отражательная способность характеризуется небольшим максимумом  $R_0$  при  $\phi = \pi/2$  и достигает нулевого значения в двух точках, в которых  $\phi = \operatorname{arctg}(R_{\text{бп}}/R_0)^{1/4}$ , где  $R_{\text{бп}}$  — отражательная способность образца без покрытия.

Используются и трехслойные покрытия. При этом также выделяют покрытия типа I и II, причем фазы  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\phi_3$  выбирают оди-

Рис. 3.23. Отражательная способность двухслойных покрытий типа I (один минимум) и типа II (два минимума) на кремниевой подложке ( $n_S = 3,45$ ),  $n_1 = 1,56$ ,  $n_2 = 2,896$  (один минимум),  $2,21$  (два минимума) ( $n_1 d_1 = n_2 d_2$ ). (Из работы [30]).



наковыми, а показатели преломления находят из следующих соотношений:  $n_2 = \sqrt{n_S n_1}$ ,  $n_3 = n_1 \sqrt{n_S / n_1}$  для типа I и  $n_2 = \sqrt{n_S n_1}$ ,  $n_3 = n_S n_1 / n_1$  для типа II. Частотные зависимости отражательной способности таких покрытий имеют соответственно 2 и 3 нулевых минимума.

Из-за отсутствия материалов с достаточно малым показателем преломления такие покрытия нельзя использовать на стеклянных подложках. Однако при этом можно использовать комбинацию  $n_2 = n_1 \sqrt{n_D / n_1}$ ,  $n_3 = \sqrt{n_D n_S}$ , где  $n_D$  — показатель преломления произвольного очень тонкого фиктивного слоя, расположенного между пленками 2 и 3. Такая комбинация показателей преломления позволяет достичь 100%-ного пропускания в подсистемах «воздух — слой 1 — слой 2 — фиктивный слой» и «фиктивный слой — слой 3 — подложка». Приведенные соотношения показателей преломления получаются из условий, что первая подсистема является двухслойным покрытием типа I, а вторая удовлетворяет  $\lambda_0/4$ -условию.

Операцию, аналогичную описанной выше, можно обобщить на четырехслойные покрытия, которые можно изготовить из двух покрытий типа II. При этом показатели преломления должны быть выбраны так, чтобы  $n_1 n_2 = n_1 n_D$  и  $n_3 n_4 = n_D n_S$ . Если же потребовать равенства нулю отражательной способности при некоторой длине волны  $\lambda_0$ , то эти соотношения необходимо дополнить еще одним, а именно  $n_1 n_3 / n_2 n_4 = \sqrt{n_1 / n_S}$ .

Читателя, интересующегося более сложными структурами, мы отсылаем к работам Ниттла [1], Мак-Леода [16], Массета и Телена [30], Кокса и Хасса [31], а также Добровольского [35].

### 3.15. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Свойства интерференционных фильтров определяются их действием на интерференцию оптических пучков, многократно отраженных в

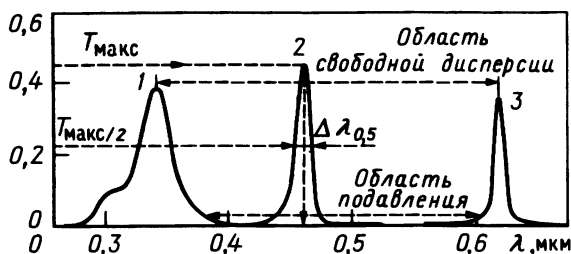


Рис. 3.24. Типичный спектр пропускания узкополосного фильтра Фабри—Перо. 1 — четвертый порядок; 2 — третий порядок; 3 — второй порядок.

многослойной системе. Простейший фильтр, изобретенный Гэффенком в Германии в 1939 г., представляет собой трехслойное покрытие, которое состоит из диэлектрического *промежуточного слоя* (показатель преломления  $n_{sp}$ ), окруженного двумя полупрозрачными металлическими пленками. Заменяя металлическую пленку диэлектрическим мультислоем, можно (приближенно) получить любые необходимые спектральные характеристики пропускания [35].

Типичный спектр пропускания интерференционного фильтра изображен на рис. 3.24. Почти во всем диапазоне, за исключением некоторых выделенных длин волн, пропускание  $T$  очень мало. Значения  $\lambda$ , для которых пропускание максимально, образуют последовательность  $\bar{\lambda}_0/q$ , где  $q = 1, 2, \dots$ , а  $\bar{\lambda}_0 = 2 \cos \theta dn_{sp}$  (здесь  $\theta$  — угол преломления внутри промежуточного слоя толщиной  $d$ ).

В соответствии с этим, изменяя угол падения, можно сдвигать и максимум пропускания. Величина  $q\pi$  — это фазовая толщина, соответствующая  $q$ -му максимуму пропускания, и  $q$  называют *порядком промежуточного слоя*. При очень больших  $q$  ( $> 10^3$ ) отношение поперечного размера к толщине пленки является важным параметром, которым определяется пропускание. Принцип действия таких устройств легче всего понять, рассматривая их как оптические резонаторы; соответствующая теория будет рассмотрена в гл. 7. При малых  $q$  влияние апертуры не существенно и всю систему можно считать бесконечной в направлении, перпендикулярном оси расслоения. В дальнейшем нашем рассмотрении мы будем пользоваться именно этим предположением.

Спектр пропускания можно характеризовать величинами  $T_{\max}$ ,  $T_{\min}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\Delta\lambda_{0,5}$  и *областью свободной дисперсии*. Здесь  $T_{\max}$  — пропускание в максимуме полосы прозрачности,  $T_{\min}$  — пропускание в области подавления, а  $\Delta\lambda_{0,5}$  — полуширина линии пропускания с центром в  $\lambda_0$ . Расстояние между соседними с главным максимумами пропускания называют областью свободной дисперсии. Как будет видно ниже, все эти величины связаны между собой.

В разд. 3.12 мы уже приводили формулу суммирования Эйри [выражение (3.12.10)], позволяющую вычислять пропускание системы  $F_1 DF_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — покрытия с двух сторон диэлектрического слоя  $D$ . Пленки покрытия могут быть как металлическими, так и диэлектрическими, а в некоторых особых случаях — просто окружающей средой. Если  $R_1$  и  $R_2$  — отражающие способности на границах раздела  $F_1 - D$  и  $F_2 - D$ , то выражение (3.12.10) дает

$$T = T_{\text{макс}} / (1 + F^2 \sin^2 \theta). \quad (3.15.1)$$

Здесь  $F$  (*резкость*) определяется выражением

$$F = 2(R_1 R_2)^{1/4} / (1 - \sqrt{R_1 R_2}), \quad (3.15.2)$$

а

$$\theta = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 - 2\phi). \quad (3.15.3)$$

Для фильтров Фабри — Перо весьма существенную роль играют малые потери  $A$  на поглощение. Симметричная структура характеризуется максимальным пропусканием  $T_{\text{макс}} = 1/(1 + A/T)^2$ , где  $T = T_1 = T_2$ . Поскольку  $T$  обычно весьма мало, отношение  $A/T$  практически равно единице и при этом  $T_{\text{макс}} \sim 25\%$ .

Если  $\lambda_0$  — длина волны, для которой  $T = T_{\text{макс}}$ , а именно

$$\psi_1(\lambda_0) + \psi_2(\lambda_0) - 2\phi(\lambda_0) = -2\pi q, \quad (3.15.4)$$

то с учетом равенства  $\phi(\lambda) = 2\pi n_{\text{сп}} \cos \theta / \lambda$  при  $\lambda \cong \lambda_0$  мы имеем

$$\psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda) - 2\phi(\lambda) = -2\pi q + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\psi_1 + \psi_2)|_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) + 2 \frac{\phi(\lambda_0)}{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) \equiv$$

$$\equiv -2\pi q + \alpha(\lambda - \lambda_0) \quad (3.15.5)$$

и

$$T(\lambda) = \frac{T_{\text{макс}}}{1 + 4(\lambda - \lambda_0)^2 / \Delta\lambda_{0,5}^2}, \quad (3.15.6)$$

где

$$\Delta\lambda_{0,5} = \frac{1}{(\partial/\partial\lambda)(\psi_1 + \psi_2) + 2\phi(\lambda_0)/\lambda_0} \frac{4}{F}. \quad (3.15.7)$$

Величина  $\Delta\lambda_{0,5}$  есть полуширина полосы пропускания, а  $F = \pi R_g^{1/2} / (1 - R_g)$  — резкость интерференционного фильтра [см. выражение (3.15.2)]. В соответствии с выражением (3.15.6) фильтр Фабри — Перо имеет *лоренцеву форму линии*. В частности, ширина на уровне  $1/100$  (так называемая *ширина по основанию*)  $\Delta\lambda_{0,01}$  равна приблизительно  $10\Delta\lambda_{0,5}$ . Отношение  $\Delta\lambda_{0,01} / \Delta\lambda_{0,5}$  называют *фактором формы*. Он показывает, насколько полоса пропускания близка к прямоугольной. Для фильтра Фабри — Перо (лоренцева форма линии) этот фактор равен 10, а для гауссовой формы линии он равен 2,57.

При больших отклонениях от  $\lambda_0$  отклик фильтра Фабри — Перо определяется спектрами отражательных способностей  $R_1$  и  $R_2$ . Зна-

чения  $R_1$  и  $R_2$  промежуточного слоя, окруженного металлическими пленками, практически не изменяются с частотой в видимом и ИК-диапазонах. При этом, как мы уже указывали, пропускание является периодической функцией величины  $\lambda^{-1}$ . Когда  $\bar{\lambda}_0$  соответствует толщине промежутка  $\phi = \pi + (\psi_1 + \psi_2)/2$ , спектральные максимумы  $T$  расположены при  $\lambda = \bar{\lambda}_0 [q + (\psi_1 + \psi_2)/2\pi]^{-1}$ , где  $q$  — порядок максимума пропускания. Поэтому область свободной дисперсии, т. е. максимальная возможная спектральная ширина пучка, из которого еще можно выделить узкую линию данного порядка, равна  $2\bar{\lambda}_0^{-1}$ . Обычно используется первый или второй интерференционный порядки полосы пропускания. При этом максимальное пропускание имеет значения в интервале 20—40%. Поскольку фазовая дисперсия коэффициента отражения металлических пленок пренебрежимо мала, полуширина  $\Delta\lambda_{0,5}$  при  $(\psi_1 + \psi_2)/2\pi \ll 1$  определяется выражением

$$\Delta\lambda_{0,5} = (2/F)(\lambda_0/q\pi) = [(1 - R_g)/R_g^{1/2}](\bar{\lambda}_0/q\pi), \quad (3.15.8)$$

в то время как  $T_{\text{мин}}/T_{\text{макс}}$  связано с полушириной  $\Delta\lambda_{0,5}$  соотношением:

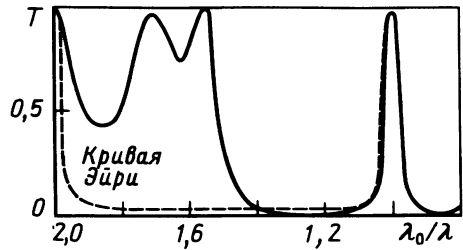
$$\frac{T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}} = \frac{1}{1 + F^2} = \frac{1}{1 + [2\bar{\lambda}_0/(q\pi\Delta\lambda_{0,5})]^2}. \quad (3.15.9)$$

Последние две величины зависят как от порядка промежуточного слоя, так и от отражательной способности покрытия. Обычно  $\Delta\lambda_{0,5}/\lambda_0 = (1 - 8)\%$  при  $q = 1$ .

Если необходимо уменьшить ширину линии фильтра, мы должны увеличить отражательную способность металлической пленки. Это можно сделать, увеличивая ее толщину. К сожалению, это приводит также к возрастанию потерь за счет поглощения, т. е. за счет уменьшения  $T_{\text{макс}}$ . Для создания фильтров с полуширинами меньше чем 1% необходимо использовать диэлектрические зеркала, покрывая обе поверхности промежуточного слоя соответствующими мультислоями. При этом за счет резонансных свойств таких структур коэффициенты отражения  $R_1$  и  $R_2$  сильно зависят от частоты [36], за счет чего результирующее пропускание фильтра с высокочастотной стороны от пика первого порядка сильно отличается от простого профиля Эйри [37] (рис. 3.25). Несмотря на потерю периодичности, диэлектрические мультислои часто используются в УФ-диапазоне, в котором металлы практически прозрачны. Примером таких структур может быть  $(\text{ВН})^m \text{ВВ}(\text{НВ})^m = [(\text{ВН})^m \text{В}]^2$ .

Если в одну и ту же многослойную структуру ввести два фильтра Фабри — Перо, то полученная структура будет иметь вид  $(\text{ВН})^m \text{ВВ}(\text{НВ})^m \text{С}(\text{ВН})^m \text{ВВ}(\text{НВ})^m$ , где С — связующий слой [37]. При этом связь между двумя резонансами приведет к расщеплению двух

Рис. 3.25. Форма полосы интерферометра Фабри—Перо, полученная из формулы сумм Эйри (штриховая кривая), и пропускание, вычисленное для фильтра ВНВВВ (сплошная кривая). (Из работы [37].)



пиков, так что на кривой относительного пропускания появится небольшой провал при  $\lambda = \bar{\lambda}_0$ . Если увеличивать количество фильтров Фабри — Перо, то можно получить более резкий переход от полосы непрозрачности к полосе пропускания и более гладкий максимум. При этом для систем из двух, трех и четырех резонаторов факторы формы  $\Delta\lambda_{0,01}/\Delta\lambda_{0,5}$  приблизительно равны 3,5; 2 и 1,5 соответственно. Кроме того, можно независимо варьировать полуширину и отношение  $T_{\text{мин}}/T_{\text{макс}}$ . В общем такие структуры более предпочтительны по сравнению с металлическими фильтрами Фабри — Перо, так как обеспечивают более высокое пропускание и более резкие границы полосы пропускания.

### 3.16. АНИЗОТРОПНЫЕ СЛОИСТЫЕ СРЕДЫ

Если многослойная среда характеризуется тензорной диэлектрической проницаемостью, то вычисление поля, образуемого при падении плоской волны, становится невероятно громоздким. Причину этой трудности нетрудно понять, если вспомнить, что в каждом направлении плоская волна может распространяться только с вполне определенной ориентацией вектора электрического поля. Кроме того, если фиксировать два из четырех параметров  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ , от которых зависят нормальные моды, то два других параметра должны определяться из дисперсионного уровня  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$ .

Для того чтобы пояснить сделанные замечания, рассмотрим многослойную среду, изображенную на рис. 3.8. Предположим, что решение для поля зависит от поперечных координат  $x$ ,  $y$  в виде простой экспоненты  $\exp(-ikx)$ . Это означает, что для каждого слоя могут существовать две различные нормальные волны, для которых волновой вектор  $k_z(\omega; k_x)$  принимает одно из двух значений, определяемых дисперсионным уравнением.

#### 3.16.1. Метод характеристической матрицы $4 \times 4$

В разд. 3.7 мы показали, что уравнения для ТЕ- и ТМ-волн в изотропной среде разделяются. Для анизотропных сред это не выполняется, и

причины такого различия мы уже обсудили. Для однородного слоя уравнение (3.7.3) нужно заменить следующим векторным уравнением [20]:

$$\left(\frac{i}{k_0}\right) \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \\ V_h \\ I_h \end{bmatrix} = \Delta \cdot \begin{bmatrix} V_e \\ I_e \\ V_h \\ I_h \end{bmatrix} \equiv \Delta \cdot \Psi, \quad (3.16.1)$$

где  $\Psi$  — четырехкомпонентный вектор-столбец, а  $\Delta$  — матрица, которая в среде со скалярной проницаемостью  $\zeta_0$  имеет вид:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \zeta_0 \Delta_{12} & \Delta_{13} & 0 \\ \Delta_{21}/\zeta_0 & \Delta_{11} & \Delta_{23}/\zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_0 \\ \Delta_{23}/\zeta_0 & \Delta_{13} & \Delta_{43}/\zeta_0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.16.)$$

здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -(k_x/k_0)\varepsilon_{xz}/\varepsilon_{zz}, & \Delta_{12} &= 1 - (k_x^2/k_0^2)\varepsilon_0/\varepsilon_{zz}, \\ \Delta_{13} &= (k_x/k_0)\varepsilon_{yz}/\varepsilon_{zz}, & & \\ \Delta_{21} &= (\varepsilon_{xx}/\varepsilon_0) - \varepsilon_{xz}^2/(\varepsilon_0\varepsilon_{zz}), & \Delta_{23} &= -\varepsilon_{xy}/\varepsilon_0 + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}/(\varepsilon_0\varepsilon_{zz}), \\ \Delta_{43} &= \varepsilon_{yy}/\varepsilon_0 - \varepsilon_{yz}^2/(\varepsilon_0\varepsilon_{zz}) - k_x^2/k_0^2. \end{aligned} \quad (3.16.)$$

Компоненты матрицы  $\Delta_{ij}$  для сред более общего вида приведены в работе [20]. Обозначим через  $k_{z(j)}$  четыре собственных значения матрицы  $k_0\Delta$ . Их можно получить, решая алгебраическое уравнение 4-го порядка  $\det(k_0\Delta - k_z) = 0$ . С физической точки зрения величины  $k_{z(j)}$  соответствуют  $z$ -составляющим четырех нормальных волн, которые могут распространяться в кристалле при равных нулю величинах  $k_x$  и  $k_y$ . Для одноосного кристалла это соответствует двум обыкновенным волнам и двум необыкновенным, и мы имеем следующие выражения

$$k_z = \begin{cases} (n_0^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} \equiv k_{z(1)}, \\ -(n_0^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} \equiv k_{z(2)}, \\ (n_{e1}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} \equiv k_{z(3)}, \\ -(n_{e2}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} \equiv k_{z(4)}, \end{cases} \quad (3.16.4)$$

где  $n_0$  — показатель преломления обыкновенной волны, а  $n_{e1}$  и  $n_{e2}$  — показатели преломления необыкновенных волн, для которых величина  $k_z$  соответственно положительна и отрицательна. Кроме того, нетрудно показать, что  $k_{z(3)}$  и  $k_{z(4)}$  являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{aligned} k_z^2 [1 + c_z^2 (n_e^2 - n_0^2)/n_0^2] + 2k_z k_x c_x c_z (n_e^2 - n_0^2)/n_0^2 + \\ + k_x^2 [1 + c_x^2 (n_e^2 - n_0^2)/n_0^2] - n_e^2 k_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.16.5)$$

где  $c_x$  и  $c_z$  — направляющие косинусы оптической оси. В большинстве практических важных случаев  $n_c$  мало отличается от  $n_o$ .

Определив четыре собственных значения  $k_{z(j)}$ , можно вычислить правые и левые собственные векторы  $\Psi_j$  и  $\tilde{\Psi}_j$  матрицы  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} k_0 \Delta \cdot \Psi_j &= k_{z(j)} \Psi_j, \\ k_0 \tilde{\Psi}_j \cdot \Delta &= k_{z(j)} \tilde{\Psi}_j, \end{aligned} \quad (3.16.6)$$

где  $\Psi_j = (\Psi_{j,1}, \Psi_{j,2}, \Psi_{j,3}, \Psi_{j,4})$  — это четырехкомпонентный вектор-столбец. Следуя затем стандартной процедуре (см. разд. 3.9), можно представить  $k_0 \Delta$  в виде следующего разложения:

$$k_0 \Delta = \sum_j \frac{k_{z(j)}}{\tilde{\Psi}_j \cdot \Psi_j} \Psi_j \tilde{\Psi}_j \equiv \sum_j k_{z(j)} \mathbf{O}_j, \quad (3.16.7)$$

где  $\mathbf{O}_j$  — проекционные операторы (т. е.  $\mathbf{O}_j^2 = \mathbf{O}_j$ ;  $\mathbf{O}_j \cdot \mathbf{O}_{j'} = 0$  при  $j \neq j'$ ). Для однородного слоя, используя представление  $\Delta$  в виде (3.16.7), уравнение (3.16.1) можно проинтегрировать. При этом получаем

$$\Psi(z) = \left[ \sum_{j=1}^4 e^{-ik_{z(j)}(z-z')} \mathbf{O}_j \right] \cdot \Psi(z') \equiv \mathbf{M}(z-z') \cdot \Psi(z'); \quad (3.16.8)$$

здесь  $\mathbf{M}$  представляет собой  $4 \times 4$ -аналог характеристической матрицы слоя. Ее используют таким же образом, как и рассмотренную выше матрицу  $2 \times 2$ .

### 3.16.2. Коэффициенты отражения и пропускания мультислоя

Рассмотрим мультислой, расположенный между некоторой подложкой (справа от мультислоя) и бесконечно протяженной окружающей средой (слева). Пусть мультислой описывается характеристической  $\mathbf{M}$ -матрицей  $4 \times 4$ , а падающая на границу раздела  $2^1$  волна — четырехмерным вектором  $\Psi^{(i)}$ . Тогда обратно в окружающую среду отражается волна  $\Psi^{(r)}$ , а волна  $\Psi^{(t)}$  проникает в подложку. При этом  $\Psi^{(r)}$  является суперпозицией двух собственных векторов среды, описывающих волны, бегущие справа налево. В соответствии с уже принятыми обозначениями (3.16.4) эти волны будем отмечать индексами 2 и 4, а бегущие слева направо — индексами 1 и 3. Это упорядочение остается справедливым не только для одноосных кристаллов, но и для двухосных. Поэтому векторы  $\Psi^{(i)}$ ,  $\Psi^{(r)}$  и  $\Psi^{(t)}$  можно записать в виде

$$\Psi^{(i)} = A_1^{(i)} \Psi_1^{(i)} + A_3^{(i)} \Psi_3^{(i)},$$

<sup>1)</sup> См. порядок нумерации границ в разд. 3.7. — *Прим. перев.*



$$\Psi^{(r)} = A_2^{(l)} \Psi_2^{(l)} + A_4^{(l)} \Psi_4^{(l)}, \quad (3.16.9)$$

$$\Psi^{(i)} = A_1^{(s)} \Psi_1^{(s)} + A_3^{(s)} \Psi_3^{(s)},$$

где векторы  $\Psi^{(l)}$  и  $\Psi^{(s)}$  относятся соответственно к окружающей среде, из которой приходит волна, и к подложке.

Используя  $\mathbf{M}$ -матрицу, напишем соотношение между  $\Psi^{(l)}$ ,  $\Psi^{(i)}$  и  $\Psi^{(r)}$ :

$$\Psi^{(i)} + \Psi^{(r)} = \mathbf{M} \cdot \Psi^{(l)}. \quad (3.16.10)$$

Учитывая ортогональность собственных векторов, легко получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_{11} A_1^{(s)} + T_{13} A_3^{(s)} &= F_1, \\ T_{31} A_1^{(s)} + T_{33} A_3^{(s)} &= F_3, \\ R_{22} A_2^{(l)} + R_{24} A_4^{(l)} &= F_2, \\ R_{42} A_2^{(l)} + R_{44} A_4^{(l)} &= F_4, \end{aligned} \quad (3.16.11)$$

где  $T_{ij} = \tilde{\Psi}_i^{(l)} \cdot \mathbf{M} \cdot \Psi_j^{(s)}$ ,  $R_{ij} = \tilde{\Psi}_i^{(s)} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \Psi_j^{(l)}$ ,  $F_{1,3} = \tilde{\Psi}_{1,3}^{(l)} \cdot \Psi^{(i)}$  и  $F_{2,4} = \tilde{\Psi}_{2,4}^{(s)} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \Psi^{(i)}$ . Решение системы уравнений (3.16.11) позволяет

вычислить отраженную и прошедшую волны.

Интересна ситуация, когда слой имеет бесконечно малую толщину и подложка непосредственно граничит с окружающей средой. При этом  $\mathbf{M}$  сводится к единичной матрице, а коэффициенты в системе уравнений (3.16.11) имеют вид  $T_{ij} = \tilde{\Psi}_i^{(l)} \cdot \Psi_j^{(s)}$ ;  $R_{ij} = \tilde{\Psi}_i^{(s)} \cdot \Psi_j^{(l)}$ ;  $F_{1,3} = \tilde{\Psi}_{1,3}^{(l)} \cdot \Psi^{(i)}$ ,  $F_{2,4} = -\tilde{\Psi}_{2,4}^{(s)} \cdot \Psi^{(i)}$ . В частности, если среда, из которой приходит волна, изотропна, то в качестве векторов  $\Psi_1^{(l)}$  и  $\Psi_3^{(l)}$  можно выбрать  $\Psi_p^{(+)}$  (р-волна) и  $\Psi_s^{(+)}$  (s-волна). Аналогично можно поступить и с векторами  $\Psi_2^{(l)}$  ( $= \Psi_p^{(-)}$ ) и  $\Psi_4^{(l)}$  ( $= \Psi_s^{(-)}$ ). Тогда для падающей р-волны  $\Psi^{(l)} = \Psi_p^{(+)}$  получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_2^{(s)} \cdot \Psi_p^{(-)} A_p^{(-)} + \tilde{\Psi}_2^{(s)} \cdot \Psi_s^{(-)} A_s^{(-)} &= -\tilde{\Psi}_2^{(s)} \cdot \Psi_p^{(+)}, \\ \tilde{\Psi}_4^{(s)} \cdot \Psi_p^{(-)} A_p^{(-)} + \tilde{\Psi}_4^{(s)} \cdot \Psi_s^{(-)} A_s^{(-)} &= -\tilde{\Psi}_4^{(s)} \cdot \Psi_p^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.16.12)$$

Поскольку в общем случае коэффициент  $A_s^{(-)}$  не равен нулю, отраженная волна является суперпозицией р- и s-волн, хотя падающее поле имеет вид чистой р-волны. Аналогичный результат нетрудно получить и для случая падения s-волны.

Если определить векторы  $\Psi_p^{(\pm)}$  и  $\Psi_s^{(\pm)}$  таким образом, чтобы соответствующие электрические поля имели единичные амплитуды, то коэффициенты  $A_{p,s}^{(-)}$  в приведенной выше системе уравнений будут равны коэффициентам отражения анизотропной среды. Систему уравнений (3.16.12) и уравнение (3.16.5) можно использовать для вычисления следующих коэффициентов отражения одноосных кристаллов, которые

первоначально были получены Друде для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости падения:

$$r_s = \frac{n \cos \theta - (n_e^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{n \cos \theta + (n_e^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

$$r_p = \frac{n_o^2 \cos \theta - n(n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{n_o^2 \cos \theta + n(n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (3.16.13)$$

Если же оптическая ось параллельна плоскости падения и образует угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности, то мы имеем следующие выражения:

$$r_s = \frac{n \cos \theta - (n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{n \cos \theta + (n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

$$r_p = \frac{n_o n_e \cos \theta - n(n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \sin^2 \alpha - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{n_o n_e \cos \theta + n(n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \sin^2 \alpha - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (3.16.14)$$

Здесь  $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн в подложке, а  $n$  — показатель преломления окружающей среды,  $\theta$  — угол падения.

### 3.17. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В голографии [38], интегральной оптике [39] и полупроводниковых лазерах часто приходится сталкиваться с примерами распространения волн через среды, показатель преломления которых имеет вид

$$n^2(z) = n_o^2 \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cos \left( \frac{2\pi}{\Lambda} m z \right) \right]. \quad (3.17.1)$$

Например, если толщина материала, используемого для записи голограмм, превышает размеры записываемой дифракционной картины, то голограмма приобретает свойства трехмерной дифракционной решетки. При этом дифракцию следует описывать через брэгговские углы отражения, аналогично дифракции рентгеновских лучей на кристаллах. Свойства этих систем, т. е. чувствительность реконструированного изображения к углу падения и длине волны считывающего голограмму пучка, можно исследовать на примере синусоидальной пространственной решетки, типа решетки, получаемой при экспонировании эмульсии в интерференционном поле от двух произвольных плоских волн. В этом случае профиль показателя преломления определяется выражением (3.17.1), причем ось  $z$  параллельна разности векторов  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ , где  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  — волновые векторы двух плоских волн.

Успехи микроэлектроники и тонкопленочной технологии позволили создать гофрированные тонкопленочные волноводы. Они широко ис-

пользуются в различных оптических устройствах интегральной оптики и в полупроводниковых лазерах. В качестве примеров можно назвать лазеры с распределенной обратной связью, в частности с распределенной обратной связью на брэгговском отражении, частотные фильтры, устройства ввода — вывода пучков и направленные ответвители. Общим для всех таких систем является распространение волны по тонкой диэлектрической пленке, толщина которой изменяется периодически. Это приводит примерно к такой же периодической модуляции поперечной компоненты волнового вектора  $k_x$ . Поскольку продольная компонента  $k_z$  связана с  $k_x$  соотношением  $k_z^2 + k_x^2 = k_0^2 n_f^2$ ,

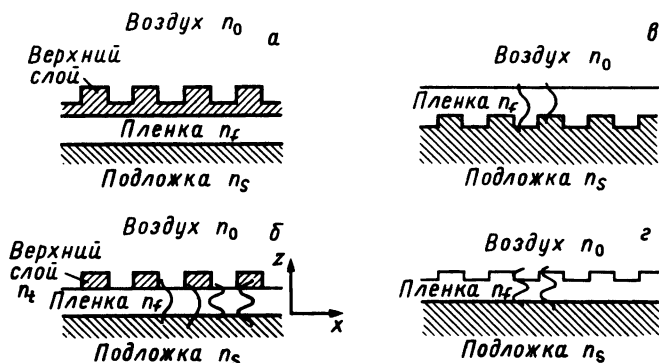


Рис. 3.26. Периодические волноводы для лазеров с распределенной обратной связью. а и б — периодическое изменение толщины верхнего диэлектрического слоя; в и г — периодические изменения толщины пленки. (Из работы [39а] © 1974 IEEE)

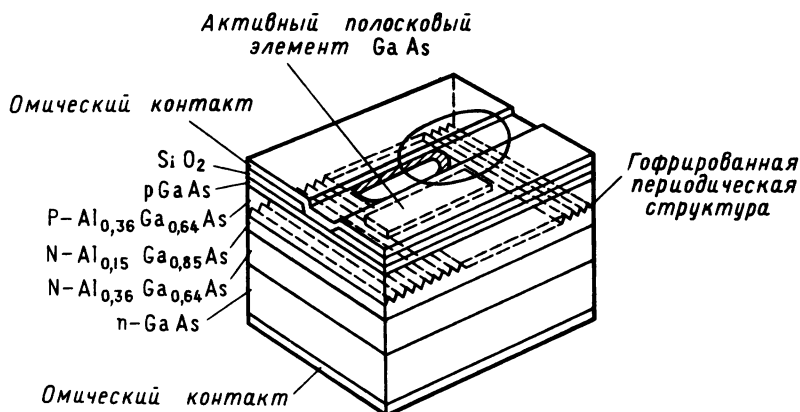


Рис. 3.27. Схематическое представление полоскового гетероструктурного лазера с двухсторонней распределенной обратной связью на брэгговских отражателях. (Из работы [39б] © 1979 IEEE.)

где  $n_f$  — показатель преломления пленки, периодическое изменение  $k_x$  приводит к такой же вариации  $k_z$ . Поэтому распространение волны в продольном направлении практически происходит в периодической многослойной вдоль  $z$  среде (рис. 3.26 и 3.27).

Амплитуда ТЕ-волны, распространяющейся в среде, показатель преломления которой определяется выражением (3.17.1), удовлетворяет уравнению Хилла [40]:

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left( \theta_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos 2m\zeta \right) u = 0, \quad (3.17.2)$$

где  $\zeta = \pi z / \Lambda$ ,  $\theta_0 = (2\Lambda/\lambda)^2$ ,  $\theta_m = X_m \theta_0$ .

### 3.17.1. Теорема Флоке

Обозначим через  $u_1(\zeta)$  и  $u_2(\zeta)$  два линейно-независимых решения уравнения (3.17.2). Тогда за счет периодичности функции, входящей в это уравнение сомножителем перед  $u$ , функции  $u_1(\zeta + \pi)$  и  $u_2(\zeta + \pi)$  также должны быть решениями. Это означает, что можно найти четыре таких коэффициента  $a_{ij}$ , что

$$\begin{aligned} u_1(\zeta + \pi) &= a_{11}u_1(\zeta) + a_{12}u_2(\zeta), \\ u_2(\zeta + \pi) &= a_{21}u_1(\zeta) + a_{22}u_2(\zeta). \end{aligned} \quad (3.17.3)$$

Найдем теперь два частных решения  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$  уравнения (3.17.2), имеющие следующее свойство:

$$V^{(\pm)}(\zeta + \pi) = \lambda_{\pm} V^{(\pm)}(\zeta). \quad (3.17.4)$$

Если переписать их в виде  $V^{(\pm)} = V_1^{(\pm)} u_1 + V_2^{(\pm)} u_2$  и учесть разложения (3.17.3), то  $V^{(\pm)}(\zeta + \pi)$  совпадает с  $\lambda_{\pm} V^{(\pm)}(\zeta)$ , если выполнены равенства

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_{\pm})V_1^{(\pm)} + a_{12}V_2^{(\pm)} &= 0, \\ a_{21}V_1^{(\pm)} + (a_{22} - \lambda_{\pm})V_2^{(\pm)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17.5)$$

В соответствии с этим два собственных значения  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  можно вычислить, потребовав равенства нулю детерминанта однородной системы уравнений (3.17.5).

Рассмотрим вронсиан  $W$  функций  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$ :

$$W(\zeta) = V^{(+)}(\zeta) dV^{(-)}/d\zeta - V^{(-)}(\zeta) dV^{(+)}/d\zeta. \quad (3.17.6)$$

С помощью соотношения (3.17.4) нетрудно показать, что  $W(\zeta + \pi) = \lambda_+ \lambda_- W(\zeta)$ . Так как вронсиан двух решений волнового уравнения (3.17.2) не зависит от  $\zeta$ , мы имеем

$$\lambda_+ \lambda_- = 1. \quad (3.17.7)$$

Для завершения доказательства теоремы Флоке представим  $\lambda_+$  как

$e^{-i\delta}$ . Тогда два линейно-независимых решения  $V^{(\pm)}$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} V^{(+)}(\zeta) &= e^{-i\delta\zeta/\pi} f^{(+)}(\zeta), \\ V^{(-)}(\zeta) &= e^{i\delta\zeta/\pi} f^{(-)}(\zeta), \end{aligned} \quad (3.17.8)$$

где  $f^{(\pm)}$  — периодические функции.

В частности, поскольку в рассматриваемом нами случае  $n(\zeta) = n(-\zeta)$ , то функция  $f^{(+)}(-\zeta) e^{i\delta\zeta/\pi}$  является линейно-независимым по отношению к  $V^{(+)}(\zeta)$  решением уравнения (3.17.2) и удовлетворяет условию периодичности (3.17.4). Следовательно, она должна совпадать с  $V^{(-)}(\zeta)$ . Таким образом доказана *теорема Флоке*: любое решение уравнения (3.17.2) можно представить в виде

$$u(\zeta) = Ae^{-i\delta\zeta/\pi} f(\zeta) + Be^{i\delta\zeta/\pi} f(-\zeta), \quad (3.17.9)$$

где  $\delta$  — некоторая постоянная.

### 3.17.2. Детерминант Хилла

Функция  $f(\zeta)$ , входящая в разложение (3.17.9), является периодической с периодом  $\pi$  и, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$u(\zeta) = Ae^{-i\delta\zeta/\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{2mi\zeta} + Be^{i\delta\zeta/\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-2mi\zeta}. \quad (3.17.10)$$

Подставляя выражение из правой части (3.17.10) в уравнение (3.17.2), получаем тригонометрический ряд, который должен быть тождественно равен нулю. В соответствии с этим мы имеем

$$\frac{1}{\theta_0 - 4n^2} \left[ \left( 2n - \frac{\delta}{\pi} \right)^2 f_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m f_{n-m} \right] \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} f_m = 0, \quad (3.17.11)$$

где  $\theta_{-m} = \theta_m$ . Если обозначить через  $\Delta(\delta)$  детерминант этой системы уравнений (называемый также *детерминантом Хилла*), то характеристический показатель экспоненты  $\delta$  определяется соотношением

$$\Delta(\delta) = 0. \quad (3.17.12)$$

Хилл доказал, что корни этого уравнения являются и корнями уравнения

$$\sin(\delta/2) = \pm \sqrt{\Delta(0)} \sin[(\pi/2) \sqrt{\theta_0}], \quad (3.17.13)$$

которое представляет собой обобщение уравнения (3.9.15), полученного ранее для кусочно-постоянной периодической среды, на случай произвольного профиля показателя преломления, симметричного относительно начала координат.

Если модуль правой части (3.17.13) меньше единицы, то  $\delta$  — вещественное число. В противном случае  $\delta = (2q + 1)\pi + i \operatorname{Im} \delta$ . В важном частном случае первого брэгговского резонанса  $q = 0$ . В общем случае мы сталкиваемся с необходимостью вычисления при

$\delta = 0$  детерминанта матрицы бесконечной размерности:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{[(\delta/\pi + 2)^2 - \theta_0]}{(4 - \theta_0)} & \frac{-\theta_1}{(4 - \theta_0)} & \frac{-\theta_2}{(4 - \theta_0)} & \dots \\ \dots & \frac{\theta_1}{\theta_0} & \frac{(\theta_0 - \delta^2/\pi^2)}{\theta_0} & \frac{\theta_1}{\theta_0} & \dots \\ \dots & \frac{-\theta_2}{(4 - \theta_0)} & \frac{-\theta_1}{(4 - \theta_0)} & \frac{[(\delta/\pi - 2)^2 - \theta_0]}{(4 - \theta_0)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.17.14)$$

При  $\theta_0 \approx 1$  уравнение (3.17.13) можно записать приближенно в виде

$$\operatorname{ch} \operatorname{Im} \delta/2 = [\Delta_0(0)]^{1/2} \sin(\theta_0^{1/2}\pi/2), \quad (3.17.15)$$

где  $\Delta_0(0)$  вычисляется при  $\theta_0 = 1$ . В соответствии с этим если  $\Delta_0(0)$  чуть больше единицы, то  $\operatorname{Im} \delta \neq 0$  при  $|\theta_0^{1/2} - 1| < 2\{[\Delta_0(0)]^{1/2} - 1\}/\pi$ ; иными словами, периодическая среда ведет себя как *брэгговский отражатель* при  $|\lambda - \lambda_0| < \{[\Delta_0(0)]^{1/2} - 1\}\lambda_0 2/\pi$ .

### 3.17.3. Теория связанных мод

Если найдено  $\delta$ , то коэффициенты  $f_m$  ряда Фурье для  $f(\zeta)$  можно вычислить, решив однородную систему уравнений (3.17.11). Если  $\theta_0 \cong 1$  и  $|\theta_{1,\dots}| \ll 1$ , то можно показать, что все коэффициенты  $f_m$  пренебрежимо малы по сравнению с  $f_0$  и  $f_1$ . В качестве упражнения читатель может проверить это на примере выражения для  $f(\zeta)$  в среде с кусочно-постоянным показателем преломления (задача 14) или аппроксимировать бесконечную матрицу (3.17.14) матрицей  $3 \times 3$ . Вместе с равенством  $\delta = \pi + i \operatorname{Im} \delta$ , справедливым вблизи брэгговского резонанса, это позволяет записать разложение (3.17.10) в виде

$$\begin{aligned} u(\zeta) &\simeq Ae^{-i\zeta} e^{\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi} (f_0 + f_1 e^{2i\zeta}) + Be^{i\zeta} e^{-\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi} (f_0 + f_1 e^{-2i\zeta}) = \\ &= e^{-i\zeta} (Af_0 e^{\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi} + Bf_1 e^{-\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi}) + e^{i\zeta} (Af_1 e^{\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi} + Bf_0 e^{\operatorname{Im} \delta \zeta/\pi}) \equiv \\ &\equiv e^{-i\zeta} R(\zeta) + e^{i\zeta} S(\zeta). \end{aligned} \quad (3.17.16)$$

Использование предположения  $|\operatorname{Im} \delta| \ll 1$  означает, что  $R(\zeta)$  и  $S(\zeta)$  являются медленно меняющимися функциями от  $\zeta$ .

Хотя мы получили разложение (3.17.16), исходя из свойств решений Флоке, его можно использовать лишь вблизи брэгговского резонанса. Если подставить последнее выражение из (3.17.16) в уравнение (3.17.2), пренебечь вторыми производными величин  $S$  и  $R$  и удерживать лишь члены  $\theta_0$  и  $\theta_1$ , то можно получить следующую систему

уравнений:

$$dR/d\zeta - i(\theta_0 - 1)R = -i\theta_1 S, \quad dS/d\zeta + i(\theta_0 - 1)S = i\theta_1 R. \quad (3.17.17)$$

Этот метод называют *теорией связанных мод* и его нетрудно обобщить на случаи, когда среда характеризуется поглощением или усилением. Важные приложения этой теории мы рассмотрим в гл. 8.

### 3.18. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Для многослойной области с кусочно-постоянным показателем преломления коэффициент отражения  $r(z)$  в любом сечении определяется различными постоянными распространения  $\beta_q = (n_q^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}$ , зависящими от конкретного слоя [см. выражение (3.7.17)]. Каждая величина  $\beta_q$ , если ее рассматривать как функцию комплексной переменной  $k_x$ , имеет две точки ветвления  $k_x = \pm n_q k_0$ , где  $\partial\beta_q/\partial k_x$  и все производные высших порядков сингулярны.

Двузначная функция  $\beta = (\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}$  может быть определена как однозначная, если в комплексной плоскости  $k_x$  провести разрезы, такие, что (рис. 3.28, б):

$$\begin{aligned} \text{Im}(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2) &= -2k_0^2 \text{Im} k_x \text{Re} k_x = 0, \\ \text{Re}(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2) &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.18.1)$$

Две кривые, определяемые уравнениями (3.18.1), являются участками гиперболы, проходящей из точек ветвления к вещественной оси в  $k_x$ -плоскости. При  $k = 0$  они вырождаются в две полупрямые, как по-

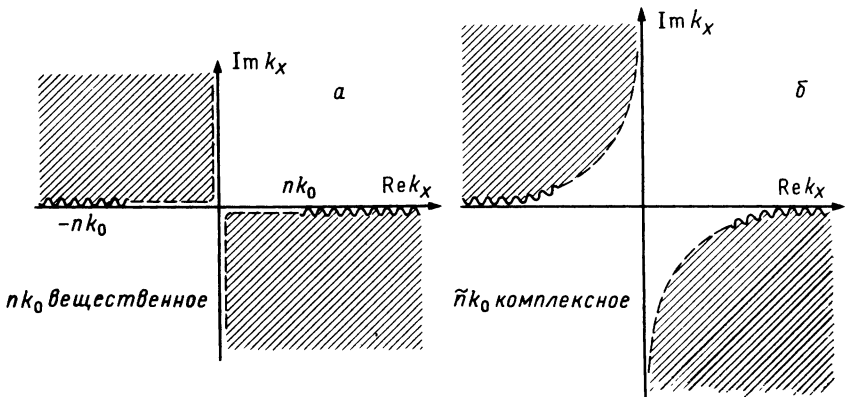


Рис. 3.28. Разрезы в комплексной плоскости  $k_x$ , используемые для однозначного определения зависимости коэффициента отражения от  $k_x$  для вещественного (а) и комплексного (б) показателей преломления.

казано на рис. 3.28, а. Поскольку выполненные разрезы определяют все точки, для которых  $\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2$  является неположительной вещественной величиной, функция  $\operatorname{Re}[(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}]$  всегда положительна (или отрицательна) на всей остальной части плоскости. Это свойство весьма полезно для качественной интерпретации происходящих физических процессов. Действительно, так как падающая волна, для которой справедливо выражение (3.7.17), проходит слева ( $z = -\infty$ ) направо ( $z = +\infty$ ), величина  $\operatorname{Re} \beta = \operatorname{Re}[(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}]$  должна быть положительной. Таким образом, мы установили взаимно-однозначное соответствие между распространяющимися в прямом направлении волнами и теми величинами  $\beta$ , которые определяются на римановом листе, задаваемом указанными выше разрезами. Если рассмотреть всю гиперболу, определяемую первым выражением (3.18.1), то нетрудно показать, что положительность  $\operatorname{Re} \beta$  означает выполнение неравенства  $\operatorname{Im}[(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}] < 0$  в незаштрихованных областях и  $\operatorname{Im}[(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}] > 0$  в заштрихованных областях на рис. 3.28. Более кратко это можно записать следующим образом:

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im}(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2} = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(\tilde{n}^2 k_0^2 - k_x^2). \quad (3.18.2)$$

Рассмотрим коэффициент отражения  $r(k_x)$  в данном сечении мультислоя как функцию поперечной компоненты  $k_x$  волнового вектора падающей волны и воспользуемся выражением (3.7.18). При этом мы видим, что функция  $r(k_x)$  имеет *полюсные сингулярности* в нулях функции  $(\vec{Z} + \hat{Z})$  и *точки ветвления*, совпадающие с точками ветвления функций  $\vec{Z}$  и  $\hat{Z}$  [7]. Точки ветвления функции  $\vec{Z}(z)$  удобно исследовать, переписав выражение (3.17.16) в виде

$$\vec{Z}(z_2) = \frac{\hat{Z}(z_1) - i\hat{Z} \operatorname{tg} [\beta(z_2 - z_1)]}{1 - i\vec{Z}(z_1) \operatorname{tg} [\beta(z_2 - z_1)]/\hat{Z}}. \quad (3.18.3)$$

Поскольку как  $\hat{Z} \operatorname{tg}[\beta(z_2 - z_1)]$ , так и  $\operatorname{tg}[\beta(z_2 - z_1)]/\hat{Z}$  являются нечетными функциями величины  $\beta$ , они же являются регулярными функциями постоянной распространения  $k_x$  при  $\beta = 0$ . Следовательно, точками ветвления функции  $\vec{Z}(z_2)$  являются только точки ветвления функции  $\vec{Z}(z_1)$ . Применяя последовательно выражение (3.18.3) для различных слоев, можно сделать вывод о том, что точки ветвления импеданса в данном направлении не зависят от локального положения оси расслоения. В частности, эти особые точки совпадают с точками ветвления в последней справа среде (при ориентации импеданса слева направо) или в последней слева среде (в противоположном случае). Следовательно, функция  $r(k_x)$  для подложки, покрытой некоторым диэлектрическим мультислоем, имеет четыре точки ветвления



при  $k_x = \pm n_S k_0$  и  $k_x = \pm n_1 k_0$ , где  $n_1$  — показатель преломления окружающей среды.

В частности, в ограниченной области комплексной  $k_x$ -плоскости коэффициент отражения  $r(k_x)$  можно записать в виде рациональной дроби

$$r(k_x) = \frac{(k_x^2 - k_1'^2)(k_x^2 - k_2'^2) \cdots}{(k_x^2 - k_1^2)(k_x^2 - k_2^2) \cdots}. \quad (3.18.4)$$

При этом выполняется очевидное условие четности функции  $r(k_x)$ . Полюсы коэффициента рассеяния  $r$  многослойной системы совпадают с резонансными поперечными волновыми числами и дают все возможные решения уравнений Максвелла в пространстве без источников. С интуитивной точки зрения поскольку  $|r| \rightarrow \infty$  при приближении к полюсу, амплитуда падающей волны может стремиться к нулю, но по-прежнему она будет возбуждать отраженную волну конечной амплитуды.

Можно ожидать, что рассматриваемые полюсы будут соответствовать векторам  $\mathbf{k}$ , имеющим и мнимую составляющую, когда мы имеем дело с волнами, распространяющимися по волноводу (световодные моды). Действительно, как станет ясно при рассмотрении задачи о распространении волн в оптических волокнах, передающиеся вдоль диэлектрической структуры моды затухают в направлении, *поперечном* направлению распространения волны. Подчеркнем тот факт, что в плоскостойкой среде моды будут распространяться параллельно поверхности слоев и экспоненциально затухать в направлении расслоения  $z$ .

В среде без потерь корни уравнения

$$\hat{Z}_{\text{вх}}(k_x) + \hat{Z}_1(k_x) = 0 \quad (3.18.5)$$

являются полюсами коэффициента отражения, соответствующими *распространяющимся модам* (вдоль оси  $x$ ) структуры. Остальные комплексные корни соответствуют дискретному набору немодовых решений уравнений Максвелла в пространстве без источников. Строго говоря, эти решения нельзя назвать «модами», так как по определению модового решения величины  $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$  не должны зависеть от  $x$ . Такая независимость имеет место лишь при вещественных  $k_x$  [см. (13.7.1)]. Поэтому о решениях с мнимыми  $k_x$  говорят как о «*волнах утечки*», или «*затухающих резонансах*». Несмотря на их физически неприемлемое поведение в далекой области (где амплитуда стремится к бесконечности), такие решения можно использовать как хорошее приближение для истинных полей, передающихся вдоль оси  $x$  с одновременной сильной утечкой энергии в направлении оси  $z$ .

Из проведенного выше рассмотрения следует, что полюсами функ-

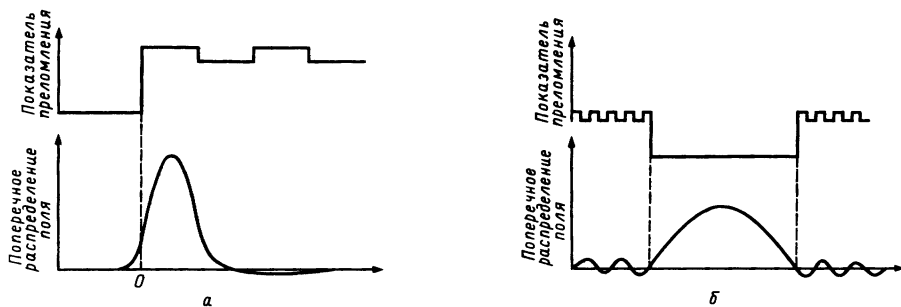


Рис. 3.29. *a* — профиль поверхностной волны, распространяющейся перпендикулярно оси расслоения в отражателе Брэгга; *б* — поверхностная волна в щели между двумя отражателями Брэгга. (Из работы [41].)

ции  $r(k_x)$  являются комплексные значения  $\beta - i\alpha$  величины  $k_x$ . В дальнейшем мы покажем, что этим полюсам соответствует либо *поверхностная волна* ( $\alpha \rightarrow 0$ , оставаясь отрицательной величиной), либо *волна утечки* ( $\alpha > 0$ ), которые могут передаваться в плоском слое.

В гл. 8 мы увидим, что для цилиндрических оптических волокон (у которых ось симметрии совпадает с осью  $z$ ) поверхностная волна соответствует *световодным модам*, а волны утечки — *затухающим модам*. Аналитическое описание здесь и в гл. 8 различно. Однако заметим, что для случая цилиндрического волновода нужно рассматривать волны, попадающие в волновод при  $z = -\infty$  и распространяющиеся в положительном направлении оси  $z$ . В планарных же волноводах волна входит ортогонально оси  $z$  и распространяется как поверхностная или затухающая волна вдоль самой оси  $z$ .

Используя аналогию между оптикой тонких пленок и электронной зонной теорией твердого тела, нетрудно показать существование мод, локализованных вблизи границ раздела многослойной и однородной сред. Аналогично тому, как поверхностные состояния описывают примеси вблизи границ твердого тела, особые волны могут быть возбуждены и вблизи границ раздела мультислоя. Свойства этих волн можно изучать [41], отыскивая вещественные корни уравнения (3.18.5) и получая распределение поля с помощью рассмотренной выше теории электрических цепей. На рис. 3.29, *a* показано поперечное распределение поля для типичной основной поверхностной моды, направляемой периодической структурой.

### 3.18.1. Условие поперечного резонанса

Условие резонанса (3.18.5) было получено для мультислоя, граничащего с однородной бесконечной окружающей средой (при наших обозна-

чениях — неограниченной в направлении  $z = -\infty$ ). Обозначим теперь через  $\tilde{Z}(z)$  и  $\bar{Z}(z)$  импедансы, вычисленные относительно произвольного сечения мультислоя для левого и правого направления соответственно. Тогда, последовательно преобразуя с помощью (3.7.15)  $\tilde{Z}$  и  $\bar{Z}$ , нетрудно доказать, что условие (3.18.5) справедливо и для любого сечения многослойной среды, а именно

$$\tilde{Z}(z, k_x, k_0) + \bar{Z}(z, k_x, k_0) = 0. \quad (3.18.6)$$

Это соотношение, называемое *условием поперечного резонанса*, позволяет найти величины  $k_x$  и  $k_0$ , соответствующие свободным колебаниям системы. При этом импедансы  $\tilde{Z}$  и  $\bar{Z}$  можно вычислить в наиболее удобных сечениях мультислоя. Например, для симметричной относительно начала координат системы на рис. 3.29, б имеем  $\tilde{Z}(0, k_x, k_0) = \bar{Z}(0, k_x, k_0)$ . Поэтому распространяющиеся моды легко найти, определив нули функции  $\tilde{Z}(0, k_x, k_0)$ .

### 3.19. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЗАТУХАЮЩИХ ВОЛН ПО ТОНКИМ ПЛЕНКАМ

Во введении мы уже отмечали, что многослойные структуры могут обеспечивать возможность распространения определенных волн, а именно поверхностных волн и волн утечки. В качестве простейшего примера рассмотрим идеальную металлическую подложку ( $\kappa_s \gg 1$ ), покрытую единичным диэлектрическим слоем (*заземленный диэлектрический экран*; рис. 3.30). В этом случае коэффициент отражения  $r_p$ , определяемый выражением (3.12.19), принимает простой вид:

$$r_p = \frac{-\cos \theta_1 + (i \cos \theta_c / n) \operatorname{tg} [\omega n_c d_c (\cos \theta_c) / c]}{\cos \theta_1 + (i \cos \theta_c / n) \operatorname{tg} [\omega n_c d_c (\cos \theta_c) / c]}, \quad (3.19.1)$$

где  $n = n_c / n_1$ , а индекс «с» используется для величин, относящихся к покрытию. Пусть в выражении (3.19.1)  $n_1 = 1$  и  $\cos \theta_c = \sqrt{1 - k_x^2 c^2 / \omega^2 n^2}$ . Тогда сразу получаем, что полюсы и нули функции  $r_p(k_x)$  можно определить из следующего уравнения на собственные значения (случай ТЕ-волн рассмотрен в [41]):

$$(k_0^2 n^2 - k_x^2)^{1/2} \operatorname{tg} [d_c (k_0^2 n^2 - k_x^2)^{1/2}] = \pm i n^2 (k_0^2 - k_x^2)^{1/2}, \quad (3.19.2)$$

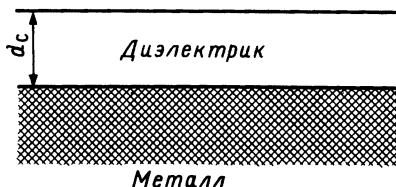


Рис. 3.30. Заземленный диэлектрический волновод.

в котором знаки плюс и минус относятся к полюсам и нулям соответственно. При этом для каждой частоты коэффициент отражения  $r_p$  обращается в нуль или расходится, когда поперечный волновой вектор  $k_x$  удовлетворяет уравнению (3.19.2). При фиксированных значениях  $k$ ,  $n$  и  $d_c$ , если  $k_x^{(p)}$  — корень уравнения (3.19.2) со знаком  $+$ , то  $k_x^{(p)*}$  — корень того же уравнения со знаком  $-$ . Этот факт является следствием того, что при вещественных  $n$  изменение  $k_x^{(p)}$  на  $k_x^{(p)*}$  означает и замену функций  $(k_0^2 n^2 - k_x^2)^{1/2}$  и  $(k_0^2 - k_x^2)^{1/2}$  на их комплексно-сопряженные. Таким образом, нули функции  $r_p(k_x)$  совпадают с комплексно-сопряженными значениями полюсов.

Для нахождения полюсов перепишем уравнение (3.19.2) в виде

$$u \operatorname{tg} u = n^2 v, \quad u^2 + v^2 = V^2, \quad (3.19.3)$$

где  $V$  (в теории оптических волокон — *нормированная частота*),  $v$  и  $u$  определяются следующим образом:

$$V = (n^2 - 1)^{1/2} k_0 d_c, \quad v = i d_c (k_0^2 - k_x^2)^{1/2}, \quad u = d_c (k_0^2 n^2 - k_x^2)^{1/2}. \quad (3.19.4)$$

Поскольку  $\operatorname{sgn} \operatorname{Im}(k_0^2 - k_x^2)^{1/2} = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} k_x$ , то для вещественных  $n$  и при  $\operatorname{Re} k_x > 0$  имеем  $\operatorname{sgn} \operatorname{Re} v = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} k_x$ .

Заметим между прочим, что магнитное поле падающей и отраженной волн можно выразить через  $v$ :

$$H_{yi} \propto e^{-ik_{xx} - vz/d_c}, \quad H_{yr} \propto e^{-ik_{xx} + vz/d_c}. \quad (3.19.5)$$

Уравнения (3.19.3) имеют бесконечно много комплексных корней, каждый из которых можно рассматривать как функцию от  $V$ . В частности, для  $V \rightarrow \infty$  сразу получаем, что  $u(V) \rightarrow (q - 1/2)\pi$ , где  $q$  — целое число. Поэтому каждый корень можно пометить индексом  $q$ , соответствующим его асимптотическому значению, т. е.  $u \rightarrow u_q$ .

В случае когда  $u$  и  $v$  вещественны, уравнения (3.19.3) можно решить графически, как показано на рис. 3.31, *а*. При этом корень  $u_q$  определяется пересечением кривой  $(u \operatorname{tg} u)/n^2$  с окружностью радиусом  $V$ . Если мы уменьшим величину  $V$ , то  $u$  и  $v$  сдвинутся влево относительно соответствующих вещественных осей, в то время как  $k_x$  (рис. 3.31, *б*) сначала сдвинется влево от точки  $nk$  (мы предположили, что  $n > 1$ ), а затем, достигнув точки ветвления  $k$ , возвратится направо, в нижний квадрант правой комплексной полуплоскости  $k_x$ . Если  $V$  станет меньше *критической величины*  $V_m$ , при которой окружность касается кривой  $(u \operatorname{tg} u)/n^2$ , то корень  $u_q$  становится комплексным.

Для вычисления вещественной и мнимой частей корня  $u_q = u'_q + i u''_q$  возведем уравнения (3.19.3) в квадрат. Затем после простых алгебраических выкладок получим

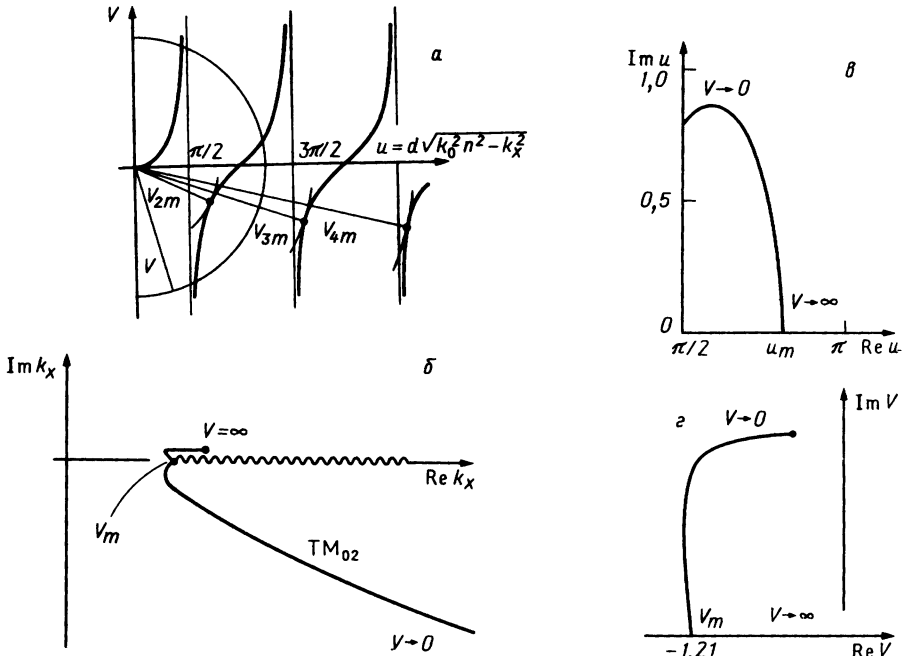


Рис. 3.31. *a* — графическое определение собственных значений уравнения (3.19.3); толстые кривые — график функции  $v = utg(u)/n^2$ , окружность —  $v^2 = u^2 + v^2$ . Геометрические места точек решений для  $\text{TM}_{02}$ -моды заземленного диэлектрического световода на комплексной плоскости  $k_x$  (*б*); на плоскости  $u$  (*в*); на плоскости  $v$  (*г*). Волнистая линия на рис. *б* — разрез функции  $(k_0^2 - k_x^2)^{1/2}$ . Значения  $k_x(V_m)$  лежат на нижнем берегу разреза справа от  $k_0$ . Геометрическое место точек  $k_x$  имеет точку возврата при  $k_x(V_m)$  и при  $V < V_m$  изменяется по верхнему берегу разреза, достигая минимального значения меньшего, чем  $k_0$ .

$$\frac{[\sin^2(2u') - \text{sh}^2(2u'')](u'^2 - u''^2) - 4u'u'' \sin(2u') \text{sh}(2u'')}{n^4[\cos(2u') + \text{ch}(2u'')]^2} + u'^2 - u''^2 = V^2, \quad (3.19.6a)$$

$$\frac{\sin(2u') \text{sh}(2u'')}{2 + [\cos(2u') + \text{ch}(2u'')]^2(n^4 - 1) + 2\cos(2u') \text{ch}(2u'')} + \frac{u'u''}{u'^2 - u''^2} = 0 \quad (3.19.6б)$$

Уравнение (3.19.6б) устанавливает связь между  $u''$  и  $u'$ , а уравнение (3.19.6а) позволяет определить соответствующее значение  $V$ . При  $u'' = 0$  для  $V$  имеем следующее уравнение:

$$u'^2 \text{tg}^2 u' + n^4 u'^2 = n^4 V^2. \quad (3.19.7)$$

Минимально возможное значение  $V$ , совпадающее с критической

величиной  $V_m$ , определенной выше, достигается при  $u \equiv u_m$ , где

$$\operatorname{tg}^2 u_m + (u_m \operatorname{tg} u_m) / \cos^2 u_m = -n^4. \quad (3.19.8)$$

При  $V < V_m$  величина  $u$  становится комплексной. На рис. 3.31, *в* изображена зависимость  $u''$  от  $u'$  для случая  $q = 2$ . Используя уравнение (3.19.3а), можно построить график зависимости  $v''$  от  $v'$  (рис. 3.31, *г*). Из физических соображений величина  $v''$  должна быть положительной, если  $H_{y1}$  в выражении (3.19.5) представляет собой волну, падающую на диэлектрик и распространяющуюся от  $z = -\infty$  к  $z = +\infty$ . В частности, из рис. 3.31, *в* видно, что значение  $u_2''$  тождественно равно нулю при  $3\pi/2 > u_2' > u_m = 2,52$ , а при меньших  $\operatorname{Re} u$  быстро растет и достигает максимума при  $V \equiv 0$ . Такое поведение легко подтвердить, используя уравнение (3.19.3а) и условие  $v = \pm iu$ . Отсюда следует, что  $u_q(V = 0)$  можно получить, решая уравнение  $\operatorname{tg} u_q = \pm in^2$ . Таким образом, если записать  $u_q(0) = (q - 3/2)\pi + iu_q''(0)$ , то сразу находим, что  $u_q''(0)$  не зависит от модового индекса  $q$  и определяется выражением

$$u''(0) = \ln[(n^2 - 1)^{1/2} / (n^2 + 1)^{1/2}]. \quad (3.19.9)$$

На рис. 3.32 показано, как изменяются величины  $\beta$  и  $\alpha$  ( $k_x \equiv \beta - i\alpha$ ) с ростом  $V$  от нуля до  $\infty$ . В тех случаях когда  $k_x$  лежит в первом квадранте комплексной  $k_x$ -плоскости непосредственно над разрезом, волна в окружающей среде бежит параллельно поверхности раздела и затухает в перпендикулярном ей направлении (поверхностная волна; рис. 3.33, *а*).

Интересен случай, когда  $k_x$  лежит в четвертом квадранте. При этом внешнее поле представляет собой неоднородную волну, движущуюся

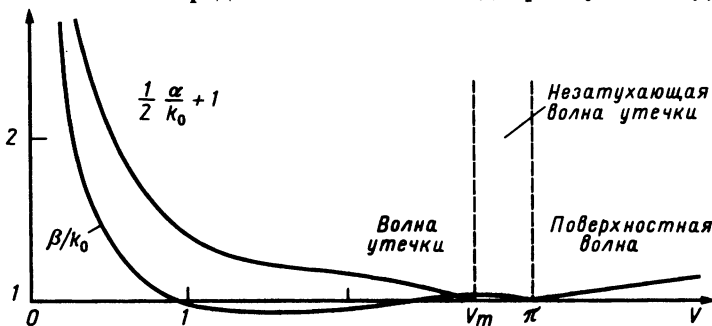


Рис. 3.32. Постоянные затухания ( $\alpha$ ) и распространения ( $\beta$ ) для  $TM_{02}$ -моды, распространяющейся по тонкой пленке ( $n^2 = 1,5$ ) на металлической подложке. Если нормализованная частота  $V$  больше, чем  $\pi$ , то распространяется поверхностная волна. При  $V_m < V < \pi$   $TM_{02}$ -модой является незатухающая волна утечки. При  $V < V_m$  постоянная затухания  $\alpha$  волны утечки быстро становится сравнимой с  $k$ . При  $V \rightarrow \infty$  имеем  $\beta - nk_0$  (см. рис. 8.11).

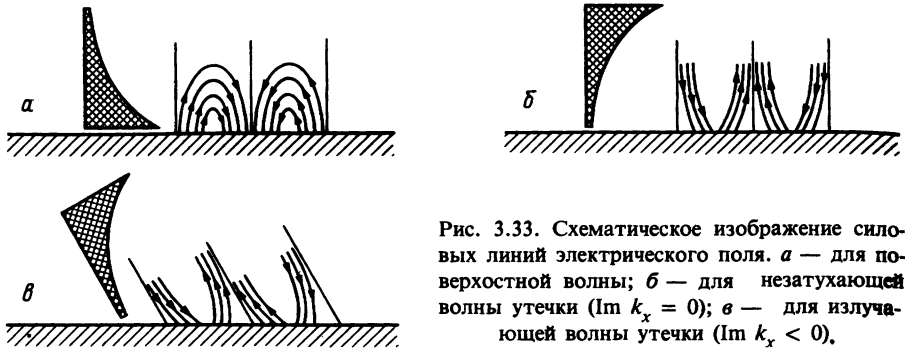


Рис. 3.33. Схематическое изображение силовых линий электрического поля. *а* — для поверхностной волны; *б* — для незатухающей волны утечки ( $\text{Im } k_x = 0$ ); *в* — для излучающей волны утечки ( $\text{Im } k_x < 0$ ).

щуюся от плоскопараллельного слоя. Вследствие этого энергия, переносимая распространяющейся внутри слоя модой, постепенно теряется за счет непрерывной утечки на излучение во внешнюю среду. Это в свою очередь приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды моды в направлении распространения (т. е. параллельно слою). Именно этот эффект утечки используется в диэлектрических антеннах, в которых распространяющаяся внутри диэлектрического стержня волна приводит к появлению поля излучения во внешней области.

Казалось бы, что растущая амплитуда волн утечки вне слоя должна привести к физическому парадоксу, а именно к бесконечной амплитуде поля на бесконечном расстоянии от слоя. Этот парадокс легко объяснить, замечая, что мы рассматривали слой бесконечной протяженности. Это означает, что амплитуда поля должна быть бесконечной в той области, откуда приходит волна. Поскольку внешне поле на бесконечном расстоянии от слоя вызвано этими удаленными источниками, оно должно обращаться в бесконечность.

Поверхностные волны и волны утечки, распространяющиеся по диэлектрическому слою, окруженному средой с иным показателем преломления, исследовали Су и Тамир (см. библиографию к данной главе).

### 3.20. ОСВЕЩЕНИЕ ПОД УГЛОМ, БОЛЬШИМ КРИТИЧЕСКОГО

При  $\mu = n/n' < 1$  закон Снеллиуса определяет действительный угол преломления, меньший  $\pi/2$ . Если  $\mu > 1$  и угол падения  $\theta$  больше критического угла

$$\theta_c = \arcsin(1/\mu), \quad (3.20.1)$$

то  $\sin \theta'$  больше единицы и угол преломления  $\theta' = \pi/2 + i\theta''$  является комплексным. Его мнимая часть определяется соотношением

$$\text{ch } \theta'' = \mu \sin \theta. \quad (3.20.2)$$

Таким образом, поле, возникающее в результате преломления, можно связать с *комплексным* преломленным лучом, направление распространения которого  $\hat{s}'$  можно получить из выражений (2.11.9) и (2.11.11):

$$\hat{s}' = (\hat{s} + \hat{n} \cos \theta) + i \hat{n} \operatorname{sh} \theta^{(n)} = \mu \hat{n} \times \hat{s} \times \hat{n} + i \hat{n} \operatorname{sh} \theta^{(n)}. \quad (3.20.3)$$

Здесь  $\hat{s}$  и  $\hat{n}$  — соответственно направление падающего луча и нормаль к границе раздела (ориентированная в сторону среды, из которой приходит луч). Благодаря комплексности величины  $\hat{s}'$  преломленное поле представляет собой затухающую волну

$$u(r) \propto \exp[-ik_0 n (\hat{n} \times \hat{s} \times \hat{n}) \cdot \hat{r} + n' k_0 \hat{n} \cdot \hat{r} \operatorname{sh} \theta^{(n)}], \quad (3.20.4)$$

амплитуда которой экспоненциально убывает по нормали к границе. Рассмотрим векторную составляющую  $\mathbf{H}$  затухающего ТЕ-поля. Для нее выполнено общее свойство затухающих волн (разд. 2.7), а именно то, что магнитные линии в менее плотной среде начинаются от поверхности и заканчиваются на ней, в то время как в более плотной среде магнитные линии могут быть замкнутыми или соединять две точки на поверхности (рис. 3.34).

Используя выражения (3.8.2) и (3.20.2), получаем

$$r_s = \frac{\mu \cos \theta + i \operatorname{sh} \theta^{(n)}}{\mu \cos \theta - i \operatorname{sh} \theta^{(n)}} = e^{2i\phi_s}, \quad (3.20.5)$$

Здесь (рис. 3.35)

$$\phi_s = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{sh} \theta^{(n)}}{\mu \cos \theta} \right) = \operatorname{arctg} [(\mu^2 \sin^2 \theta - 1)/(\mu^2 \cos^2 \theta)]^{1/2}, \quad (3.20.6)$$

$$r_p = e^{2i\phi_s + 2i\phi(\theta)} \equiv e^{2i\phi_p}, \quad (3.20.7)$$

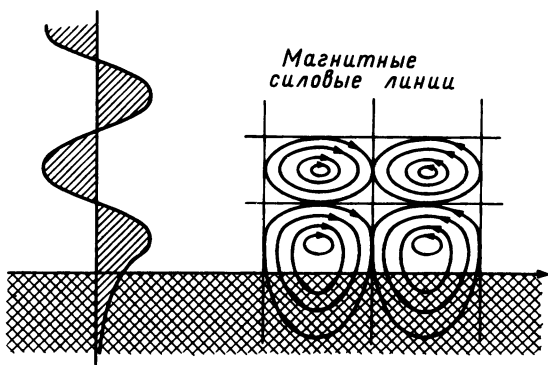


Рис. 3.34. Слева показана амплитуда электрического поля по нормали к границе раздела двух сред, освещаемых плоской волной под углом падения, большим критического. Справа — магнитные силовые линии.



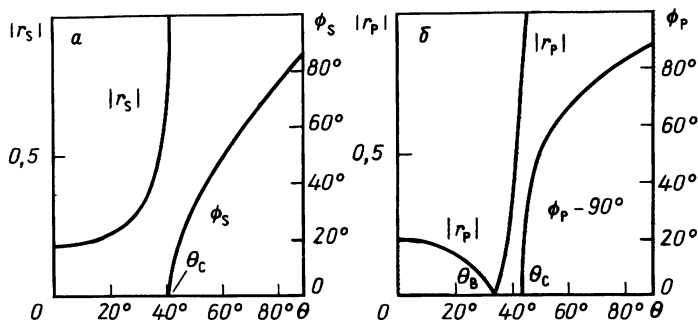


Рис. 3.35. Коэффициент отражения и фазовый сдвиг в зависимости от угла падения. *a* — *s*-волна; *b* — *p*-волна;  $n_1 = 1,5$ ;  $n_2 = 1,0$ ;  $\phi_s = -90^\circ$  при  $\theta < \theta_c$  и  $\phi_p = -90^\circ$  при  $\theta < \theta_B$ ;  $\phi_p = 0^\circ$  при  $\theta_B < \theta < \theta_c$ .

$$2\phi(\theta) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\cos \theta (\mu^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}}{\mu \sin^2 \theta} \right]. \quad (3.20.8)$$

Отсюда имеем  $|r_p| = |r_s| = 1$ , что является очевидным следствием закона сохранения энергии, так как преломленная затухающая волна энергии не переносит.

Разность  $2\phi(\theta)$  между изменениями фазы ТМ- и ТЕ-волн можно использовать для преобразования состояния поляризации поля. Точнее говоря,  $\phi = \pi/2$  для скользящего падения ( $\theta = \pi/2$ ) и для падения под критическим углом, а максимальное значение  $\phi_{\max}$  достигается, когда

$$\sin^2 \theta = 2/(1 + \mu^2) \quad (3.20.9)$$

и равно

$$\phi_{\max} = \operatorname{arctg} [(\mu^2 - 1)/2\mu] + \pi/2. \quad (3.20.10)$$

Например, если использовать стекло с показателем преломления 1,51 (окружающая среда — вакуум), то значение  $\phi_{\max} = 45^\circ 16'$  достигается при угле падения  $\theta = 51^\circ 20'$ . Таким образом, после одного полного отражения разность фаз равна приблизительно  $90^\circ$ , что соответствует преобразованию линейной поляризации в круговую. После двух полных отражений результирующая поляризация совпадает с начальной. Этот эффект используется в так называемом *ромбе Френеля*, который аналогично четвертьволновым пластинкам преобразует линейную поляризацию волны в круговую.

Рассмотрим теперь волну, проходящую из среды с определенной плотностью в более плотную среду. При этом  $\mu < 1$  и соотношение (3.20.1), определяющее критический угол, выполняется при комплексном значении  $\theta_c$ :

$$\theta_c = \pi/2 - i\theta'', \quad (3.20.11)$$

причем  $\operatorname{ch} \theta_c'' = 1/\mu$ . В соответствии с этим полное отражение может быть получено только для затухающих волн, распространяющихся па-

параллельно поверхности. Для более точного описания этого случая применим формальное определение полного отражения, считая полностью отраженными затухающие волны, распространяющиеся под углом падения  $\theta = \pi/2 - i\theta''$ , где  $\theta'' < \theta_c''$ . При этом с помощью закона Снеллиуса сразу получаем угол преломления

$$\theta' = \arcsin(\operatorname{ch}\theta''/\operatorname{ch}\theta_c''), \quad (3.20.12)$$

который является вещественной величиной и соответствует вещественному преломленному лучу. Таким образом, мы имеем два возможных случая: если  $n/n' > 1$ , то полное отражение соответствует вещественным падающим и отраженным волнам и затухающей преломленной волне, а если  $n/n' < 1$ , то полное отражение имеет место для затухающих падающих и отраженных волн и вещественных преломленных.

### 3.20.1. Нарушенное полное отражение

Для контроля мощности, передаваемой между двумя элементами в устройствах интегральной оптики, стало привычным вводить в качестве темного барьера между элементами менее плотную среду (разд. 3.3.3). Оптическая толщина щели, разделяющей два связанных между собой элемента, представляет собой параметр, который позволяет управлять связью. Точнее говоря (рис. 3.6), волна попадает на границу раздела между первой средой ( $n = n_1$ ) и щелью ( $n = n_g < n_1$ ) под углом  $\theta$ , большим критического угла  $\theta_c = \arcsin(n_g/n_1)$ . Ширина щели до подложки ( $n = n_g > n_g$ ) равна  $d_g$ .

Если пренебречь наличием подложки, то поле, проникающее в щель, в ней же и затухает. На самом же деле из-за конечности толщины щели  $d_g$  между средой, на которую падает волна, и подложкой хвост затухающей волны может достичь подложки и привести к туннелированию энергии через щель. При этом наличие второй границы раздела приводит к появлению второй затухающей волны, распространяющейся уже в обратном направлении, к первой границе раздела и т. д. Эта бесконечная последовательность отражений порождает результирующее распределение поля, состоящее из двух затухающих волн в щели, прошедшей волны в подложке и отраженной волны в первой среде. Амплитуды соответствующих полей можно найти с помощью характеристических **M**-матриц. Нужно лишь при определении импеданса и фазовой толщины учитывать тот факт, что угол  $\theta_g$  является комплексным:  $\theta_g = \pi/2 + i\theta_g''$ , т. е.  $\phi_g = n_g d_g k_0 \cos \theta_g = -in_g d_g k_0 \operatorname{sh} \theta_g''$ . Применим, например, выражение (3.12.19) для вы-

числения коэффициента отражения р-волны. Для простоты предположим, что показатели преломления подложки и первой среды одинаковы. Тогда из (3.12.19) имеем

$$r_p = \frac{\mu^2 - 1 - (\mu^4 - 1) \sin^2 \theta}{\mu^2 + 1 - (\mu^4 + 1) \sin^2 \theta - 2i\mu \cos \theta \operatorname{sh} \theta'_g \operatorname{cth} (d_g n_g k_o \operatorname{sh} \theta'_g)}, \quad (3.20.13)$$

где  $\mu = n_s/n_g$  и, как того требует закон Снеллиуса,  $\operatorname{sh} \theta'_g = (\mu^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}$ . При  $d_g \rightarrow \infty$  коэффициент отражения  $r_p$  становится равным коэффициенту Френеля  $\exp(2i\phi_p)$  [см. выражение (3.20.7)], а при  $d_g \rightarrow 0$  величина  $r_p$  обращается в нуль. В общем случае  $|r_p| < 1$  (*нарушенное полное отражение*). При этом следствием закона сохранения энергии для щели без потерь является равенство  $|t_p| = 1 - |r_p|$ .

### 3.21. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ДИЭЛЕКТРИКОМ И СРЕДОЙ С ПОТЕРЯМИ

Угол преломления для волны, падающей из вакуума на среду с потерями, является комплексной величиной, которую легко определить, используя закон Снеллиуса:

$$\theta' = \theta^{(')} + i\theta^{(''')} = \operatorname{arcsin}[\sin \theta / (n - i\kappa)], \quad (3.21.1)$$

(В дальнейшем все соотношения нетрудно обобщить на случай, когда волна приходит из диэлектрической среды без потерь, а не из вакуума.) Если выразить  $\cos \theta'$  через вещественные параметры  $q$  и  $\gamma$  ( $\cos \theta' = qe^{-i\gamma}$ ) и предположить, что волна распространяется в плоскости  $xz$ , причем ось  $z$  перпендикулярна плоской границе раздела, то волновой вектор преломленной волны  $\mathbf{k}'$  можно записать в виде

$$\mathbf{k}' = k_o[\hat{x} \sin \theta + \hat{z}(n - i\kappa)qe^{-i\gamma}] \equiv \mathbf{k}^{(')} - i\mathbf{k}^{(''')}, \quad (3.21.2)$$

где мы использовали постоянство величины  $k_x$  после преломления [см. (3.7.1)] и обозначили угол падения через  $\theta$ . Вещественная и мнимая части вектора  $\mathbf{k}'$  записываются соответственно в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(')} &= k_o[\hat{x} \sin \theta + \hat{z}q(n \cos \gamma - \kappa \sin \gamma)], \\ \mathbf{k}^{(''')} &= k_o\hat{z}q(\kappa \cos \gamma + n \sin \gamma). \end{aligned} \quad (3.21.3)$$

Из этих соотношений видно, что *плоскости равной фазы* (перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}^{(')}$ ) и *плоскости равной амплитуды* (перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}^{(''')}$ , т. е. вектору  $\hat{z}$ ) не являются взаимно ортогональными. В этом состоит отличительная особенность рассматриваемого здесь случая по сравнению с затухающими полями в средах с вещественным показателем преломления (см. разд. 2.7).

Для комплексного показателя преломления можно определить и

комплексный угол Брюстера. Действительно, из (3.8.3) следует, что

$$\operatorname{tg} \theta_B \equiv \operatorname{tg} (\theta'_B - i\theta''_B) = n - ik. \quad (3.21.4)$$

Для хорошего проводника ( $\kappa \gg n$ ) это условие удовлетворяется при значении угла  $\theta_B$ , равном

$$\theta_B \cong \pi/2 - i \operatorname{arctg} (1/\kappa) \cong \pi/2 - i/\kappa \cong \pi/2. \quad (3.21.5)$$

Вблизи плазменной частоты металла неравенство  $\kappa \gg n$  уже не выполнено, так что в этом случае величиной  $n$  нельзя пренебрегать по сравнению с  $i\kappa$  и угол Брюстера существенно отличен от  $\pi/2$  (т. е. от угла скользкого падения).

Выясним теперь основные особенности отражения на плоской границе раздела между диэлектриком и средой с потерями. Для этого воспользуемся формулами Френеля [43, 44] и заметим, что выражения (3.8.2а) и (3.8.2б), а также закон Снеллиуса приводят к следующему соотношению:

$$\frac{r_p - r_s}{r_p + r_s} = \frac{-\sin \theta \operatorname{tg} \theta}{(\tilde{n}^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}} \cong \frac{-\sin \theta \operatorname{tg} \theta}{\tilde{n}}, \quad (3.21.6)$$

где мы пренебрегли величиной  $\sin^2 \theta$  по сравнению с  $\tilde{n}^2$ . Предположим, что

$$r_s/r_p = \operatorname{tg} (\delta) e^{-2i\phi}, \quad (3.21.7)$$

Тогда мы получим

$$n = \frac{-\sin \theta \operatorname{tg} \theta \cos(2\delta)}{1 - \sin(2\delta) \cos(2\phi)}, \quad (3.21.8a)$$

$$\kappa = \operatorname{tg} (2\delta) \sin(2\phi) n. \quad (3.21.8b)$$

С помощью (3.21.8) вычисляют значения  $n$  и  $\kappa$  по результатам поляризационных измерений. В частности, при  $\theta = 0$  имеем  $\delta = \pi/4$ ,  $\phi = 0$  и  $r_s/r_p = 1$ , а это означает, что при нормальном падении ТЕ- и ТМ-волны эквивалентны друг другу.

Определим теперь *вещественный* угол падения  $\bar{\theta}$ , для которого отношение  $|r_s/r_p|$  принимает максимальное значение. Из (3.21.8б) получаем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-\sin(2\phi) + [\sin^2(2\phi) + \kappa^2/n^2]^{1/2}}{\kappa/n}, \quad (3.21.9)$$

т. е.

$$|r_s/r_p|_{\max} = \operatorname{tg} \delta_{\max} = \frac{1 + (1 + \kappa^2/n^2)^{1/2}}{\kappa/n}, \quad (3.21.10)$$

при  $2\phi = -\pi/2$ . Теперь угол  $\bar{\theta}$  нетрудно вычислить из соотношений (3.21.8а) и (3.21.10):

$$\sin \bar{\theta} \operatorname{tg} \bar{\theta} = (n^2 + \kappa^2)^{1/2} = |\tilde{n}|. \quad (3.21.11)$$

Благодаря тому обстоятельству, что максимальное значение ( $< \infty$ ) отношения  $|r_s/r_p|$  при вещественных углах падения достигается при  $\theta = \bar{\theta}$ , угол  $\bar{\theta}$  называют *псевдобрюстеровским углом*. Этот угол иног-

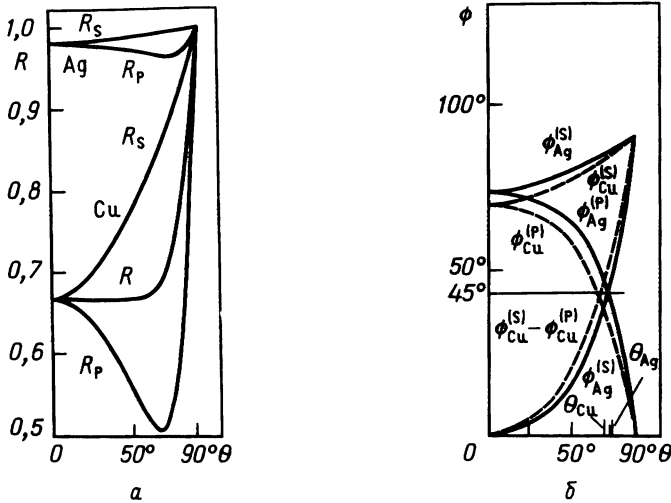


Рис. 3.36. *a* — коэффициент отражения Ag ( $n = 0,055$ ;  $\kappa = 3,32$ ) и Cu ( $n = 0,76$ ;  $\kappa = 2,42$ ) в зависимости от угла падения для зеленой линии ртути ( $\lambda = 5450 \text{ \AA}$ ). Величина  $R = (R_p + R_s)/2$  относится к неполяризованному свету; *b* — фазовый сдвиг коэффициента отражения  $r = R^{1/2} \exp(2i\phi)$  в зависимости от угла падения для тех же металлов.  $\theta_{Cu}$  и  $\theta_{Ag}$  — псевдобрюстеровские углы, соответствующие  $2\phi_s - 2\phi_p = \pi/2$ . (Из работы [43], © North-Holland Physics Publishing, Amsterdam, 1972.)

да называют также *главным углом падения*. При падении под углом  $\bar{\theta}$  фазовый сдвиг отраженной волны равен  $90^\circ$  (рис. 3.36).

### 3.21.1. Отражение и преломление при скольльзящем падении

Поскольку  $\theta_B \cong \pi/2$ , интенсивность отраженной волны, получаемой при скольльзящем падении, сильно зависит от поляризации падающего поля. Действительно, из выражений (3.8.2) имеем

$$r_s = \frac{-1 + \cos \theta / \{\tilde{n}^2 - \sin^2 \theta\}^{1/2}}{1 + \cos \theta / \{\tilde{n}^2 - \sin^2 \theta\}^{1/2}} \cong -1 + \frac{2 \cos \theta}{(\tilde{n}^2 - 1)^{1/2}}. \quad (3.21.12)$$

Отсюда находим следующее выражение для коэффициента поглощения  $A_s = 1 - R_s$ :

$$A_s \cong 4 \cos \theta \operatorname{Re} [1/(\tilde{n}^2 - 1)^{1/2}] \cong 4n \cos \theta / (n^2 + \kappa^2), \quad (3.21.13)$$

которое справедливо при  $|\tilde{n}| \gg 1$ . Аналогично получаем

$$A_p \cong 4 \cos \theta \operatorname{Re} [\tilde{n}^2 / (\tilde{n}^2 - 1)^{1/2}] \cong 4n \cos \theta. \quad (3.21.14)$$

Таким образом, при скольльзящем падении на металлическую поверхность коэффициент поглощения для ТМ (р)-волны примерно в  $|\tilde{n}|^2 (10^3 - 10^4)$  раз больше, чем коэффициент поглощения для ТЕ

(s)-волны. Очевидно, что этот эффект непосредственно связан с существованием брюстеровского угла падения.

### 3.21.2. Отражение и преломление при нормальном падении

При нормальном падении  $R = R_s = R_p$  и коэффициент поглощения  $A = A_s = A_p = 1 - R$  дается выражением

$$A = \frac{4n}{n^2 + \kappa^2 + 1 + 2n}. \quad (3.21.15)$$

Как  $R$ , так и  $A$  сильно зависят от длины волны в видимой области спектра (рис. 3.14 и 3.15).

Амплитудный коэффициент отражения  $r_s(\theta = 0) = r_p(\theta = 0) = r$  легко получить, используя выражения (3.8.2) и закон Снеллиуса:

$$r = R^{1/2} e^{i\phi} = (1 - \tilde{n}) / (1 + \tilde{n}). \quad (3.21.16)$$

Величины  $n$  и  $\kappa$  и, следовательно,  $R$  и  $\phi$  зависят от угловой частоты  $\omega$ . В частности, с помощью дисперсионных уравнений Крамерса—Кронига можно показать, что угол  $\phi(\omega)$  связан с  $R(\omega)$  интегральным соотношением

$$\phi(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\ln R(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' + \text{const}. \quad (3.21.17)$$

Это соотношение используется в методе Робинсона—Прайса, который позволяет измерить зависимость показателя преломления вещества от частоты в области сильного поглощения. В этом методе прежде всего измеряют отражательную способность в возможно более широком диапазоне частот, а затем, используя (3.12.17), вычисляют фазу  $\phi(\omega)$  амплитудного коэффициента отражения. Если  $R(\omega)$  и  $\phi(\omega)$  известны, то с помощью выражения (3.12.16) нетрудно вычислить  $n(\omega)$  и  $\kappa(\omega)$ . Полное описание различных методов определения оптических констант см. в книге Белла [45].

### 3.21.3. Отражение при произвольном угле падения

Для произвольного угла падения коэффициенты отражения  $R_p$  и  $R_s$  легко вычисляются с помощью выражений (3.8.2) и закона Снеллиуса. Если  $|\tilde{n}| \gg 1$ , то

$$R_p = |r_p|^2 = \frac{1 + (n^2 + \kappa^2) \cos^2 \theta - 2n \cos \theta}{1 + (n^2 + \kappa^2) \cos^2 \theta + 2n \cos \theta}. \quad (3.21.18)$$

Заменяя в этом выражении  $\cos \theta$  на  $1/\cos \theta$ , получаем аналогичное выражение для  $R_s$ .

### 3.22. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Изучим теперь поверхностные волны, возникающие на границе раздела между диэлектриком и средой с комплексным показателем преломления, когда падающая волна распространяется под углом Брюстера.

Для этого сделаем несколько предварительных замечаний о связи между углом Брюстера и положением нулей и полюсов функции  $r_p(k_x)$ . Действительно, если мы имеем дело со средой, у которой показатель преломления комплексный, и пытаемся продолжить коэффициент отражения  $r_p$ , определяемый выражением (3.8.1), в комплексную область, мы сразу обнаруживаем, что функция  $r_p(k_x)$  может иметь два определения, т. е. угол Брюстера может быть неоднозначной величиной. Заметим прежде всего, что при замене в (3.8.1) направления распространения падающей волны на направление отраженной величина  $r_p$  преобразуется в обратную ей величину. Это легко доказать, заменяя  $k_z^{(2)}$  на  $-k_z^{(2)}$  (напомним, что индекс «2» относится к первой среде). Таким образом, при брюстеровском угле падения  $r_p$  может быть либо нулем, либо бесконечностью в зависимости от того, как мы определили  $k_z^{(2)}$ . В соответствии с нашей договоренностью  $|r_p| = 0$ , если  $\text{Re } k_z^{(2)} > 0$ , и  $|r_p| = \infty$ , если  $\text{Re } k_z^{(2)} < 0$ . Однако во многих задачах удобнее выразить  $r_p$  как функцию величины  $k_x$ . При этом  $r_p$  является двузначной функцией от  $k_x$ , причем эти значения являются взаимно обратными. Действительно, если предположить для простоты, что среда 2 — это вакуум, и использовать выражение (3.8.1) и закон Снеллиуса, то мы можем записать

$$r_p(k_x) = \frac{(\tilde{n}^2 - k_x^2/k_0^2)^{1/2} - \tilde{n}^2(1 - k_x^2/k_0^2)^{1/2}}{(\tilde{n}^2 - k_x^2/k_0^2)^{1/2} + \tilde{n}^2(1 - k_x^2/k_0^2)^{1/2}}. \quad (3.22.1)$$

Квадратные корни можно вычислить однозначно, если провести разрезы в комплексной  $k_x$ -плоскости. При этом когда мы находим угол Брюстера, необходимо иметь в виду, что он соответствует либо нулю, либо полюсу функции  $r_p(k_x)$ , в зависимости от того, как мы определяем сам коэффициент отражения  $r_p$ . Таким образом, если при некотором  $k_x$  величина  $r_p$  равна нулю, то определенная другим образом функция  $r_p(k_x)$  в этой же точке расходится. Следовательно, нули и полюсы двузначной функции  $r_p(k_x)$  совпадают. С физической точки зрения это связано с тем, что угол Брюстера, соответствующий «отсутствию отражения», при замене падающей волны на отраженную и обратно может быть, очевидно, обусловлен бесконечным отливом на исчезающе малое возмущение. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением лишь случая  $r_p(k_x) = 0$ , что соответствует погло-

щению излучения во второй среде, которая в общем случае является многослойной.

В случае когда волны в подложке (т. е. в крайнем полупространстве многослойной среды) уходят в направлении оси  $z$ , перпендикулярном границе раздела первой и второй сред, без ослабления ( $k_x$  в подложке вещественно), вся падающая энергия переносится к точке  $z = +\infty$ . В противном случае возмущение поля удерживается у плоскости раздела, образуя поверхностную волну или волну утечки (см. также разд. 3.18). Точнее говоря, если мнимая часть волнового числа  $k_x$  не равна нулю, то возникает волна утечки, а если величина  $k_x$  вещественна, то мы имеем дело с поверхностной волной. В то время как в последнем случае поле распространяется вдоль границы раздела в направлении  $x$  без затухания, волна утечки теряет свою энергию при распространении вдоль оси  $x$ . Различие между этими двумя случаями (волны утечки и поверхностные волны) особенно важно в случае, когда на границу раздела падает пучок конечного сечения. При этом только поверхностная волна обеспечивает эффективный перенос энергии на большие расстояния в направлении, перпендикулярном оси расщеления.

Выберем обычную систему координат, когда ось  $z$  направлена перпендикулярно плоской границе раздела, а ось  $x$  располагается в плоскости падения луча. Пусть для простоты первой средой (индекс 2) является вакуум. Тогда составляющая  $k_z$  волнового вектора ТМ-волны, распространяющейся под углом Брюстера [выражение (3.8.3)], запишется в виде

$$k_z^{(2)} \equiv k_z'^{(2)} - ik_z''^{(2)} = k_0 \cos \theta_B = \frac{k_0}{(1 + \tilde{n}^2)^{1/2}} = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \tilde{\epsilon}} \right)^{1/2}, \quad (3.22.2)$$

где  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \tilde{n}^2$  — диэлектрическая проницаемость второй среды. После преломления по закону Снеллиуса имеем

$$k_z^{(1)} \equiv k_z'^{(1)} - ik_z''^{(1)} = k_0 \frac{\tilde{n}^2}{(1 + \tilde{n}^2)^{1/2}} = \frac{\omega}{c} \frac{\tilde{\epsilon}}{(\epsilon_0 + \tilde{\epsilon})^{1/2} \epsilon_0^{1/2}}, \quad (3.22.3)$$

а компонента  $k_x$  остается без изменения.

### 3.22.1. Поверхностные волны в металлах

В хороших проводниках при частотах, много меньших плазменной (видимый или ИК-диапазон), коэффициент экстинкции  $\kappa$  значительно больше единицы и приведенные выше выражения в хорошем приближении можно записать следующим образом:

$$k_z^{(2)} \cong k_0(n/\kappa^2 + i/\kappa), \quad k_z^{(1)} \cong k_0(n - i\kappa). \quad (3.22.4)$$



Здесь мы ограничились как для вещественной, так и для мнимой частей лишь главными членами разложения по параметру малости  $1/\kappa$ . Таким образом, хотя в первой среде плоскости постоянной фазы и амплитуды ортогональны друг другу ( $\mathbf{k}'^{(2)} \cdot \mathbf{k}''^{(2)} = k'_x k''_x + k'_z k''_z = 0$ ), во второй среде это уже не так, что обусловлено комплексностью показателя преломления.

Волновые векторы (3.22.4) соответствуют полю, достигающему максимального значения на границе раздела и затухающему по обе стороны от нее. Затухание вдоль направления  $\hat{\mathbf{x}}$  (параллельно границе) гораздо слабее, чем в перпендикулярном направлении. Действительно, нетрудно показать, что

$$-k_z''^{(2)}/k_x'' = \kappa^2/n \gg 1, \quad k_z''^{(1)}/k_x'' = \kappa^4/n \gg 1. \quad (3.22.5)$$

Поскольку длина затухания вдоль поверхности значительно больше оптической длины волны, поле распространяется как поверхностная волна, обусловленная собственными колебательными модами электронного газа металла (*поверхностные плазмоны*) [10, 46]. Однако длина проникновения внутрь металла  $(k_0 \kappa)^{-1}$  достаточно велика, т. е. характеристики поверхностной волны определяются главным образом диэлектрической проницаемостью металла в целом. Но вместе с тем существенное влияние на поверхностную волну могут оказать и возмущения на поверхности, например слои адсорбированного газа.

При  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_L [1 - \omega_p^2 / \omega(\omega - i\Gamma)]$  [см. выражение (1.2.47) и подпись к рис. 1.5] соотношение (3.22.2) позволяет представить вещественную часть величины  $k_x$  в виде

$$k'_x = \begin{cases} \frac{\omega}{c} \left( \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0 + \varepsilon_L} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \varepsilon_L \omega_p^2 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)} \right)^{1/2} \left[ \frac{\omega}{\omega_p} < \left( \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0 + \varepsilon_L} \right)^{1/2}, \frac{\omega}{\omega_p} > 1 \right], \\ 0 & \left[ \left( \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0 + \varepsilon_L} \right)^{1/2} < \frac{\omega}{\omega_p} < 1 \right], \end{cases} \quad (3.22.6)$$

где мы пренебрегли частотой столкновений  $\Gamma$ . В соответствии с этим результатом поверхностная волна не может распространяться при частотах  $\omega$ , лежащих в диапазоне между  $\omega_p \varepsilon_L^{1/2} / (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^{1/2}$  и  $\omega_p$ . Это обстоятельство обычно связывают с существованием *запрещенной зоны* (рис. 3.37). Для конечных значений  $\Gamma$  дисперсионная кривая непрерывна. При этом функция  $k'_x$  уже не расходится при  $\omega = \omega_p \varepsilon_L^{1/2} / (\varepsilon_0 + \varepsilon_L)^{1/2}$ , но достигает при этом своего максимума, а при больших  $\omega$  резко уменьшается и принимает минимальное значение при некотором  $\omega/\omega_p$ , зависящем от  $\Gamma$ . Таким образом, с ростом  $\Gamma$  запрещенная зона исчезает. Заметим, что при  $\omega > \omega_p$  среда становится про-

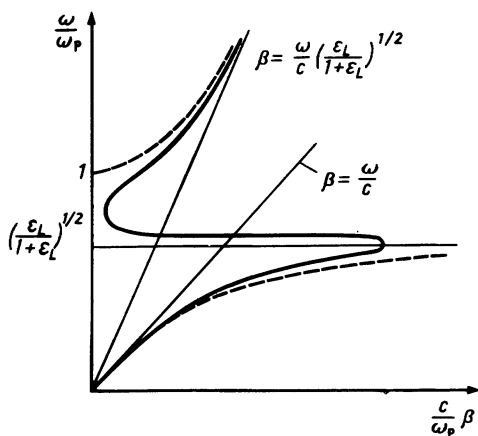


Рис. 3.37. Схематическое представление дисперсионной кривой поверхностной волны, распространяющейся на границе металл — диэлектрик. Штриховые кривые — идеальный металл без затухания, диэлектрическая функция которого та же, что для бесстолкновительной плазмы.  $\omega_p$  — плазменная частота металла.

зрачной, так что поле, соответствующее (3.22.6а), не связано уже с поверхностными плазмонами.

Поскольку поверхностная электромагнитная волна удерживается вблизи границы раздела, она будет преобразовываться в излучательную волну утечки лишь при наличии возмущений или неоднородности на поверхности. Кроме того, поверхностную волну невозможно и возбудить, освещая непосредственно гладкую поверхность световым пучком. Для изучения свойств поверхностных волн были разработаны различные методы их возбуждения и регистрации, а именно методы линейного или нелинейного оптического возбуждения и регистрации на неоднородностях поверхности. Кроме того, используются призмы, расположенные с небольшим (порядка длины волны) зазором над поверхностью (см. рис. 3.6 и разд. 3.3.3). Последний метод известен как *ослабленное полное отражение*. При этом для возбуждения поверхностной волны используется затухающая волна, возникающая на границе раздела «среда — воздух» в том случае, когда луч света в среде испытывает полное внутреннее отражение. Поглощение отраженной волны и приводит к ослабленному полному отражению. Первая из таких систем была предложена Отто. Она состоит из призмы (P), отделенной от толстого образца среды (M) небольшим воздушным или вакуумным слоем (A) [так называемая конфигурация PAM ATR, показанная на рис. 3.38, а]. Если воздушный слой достаточно тонкий, то затухающая в этом слое волна, вызванная полным внутренним отра-

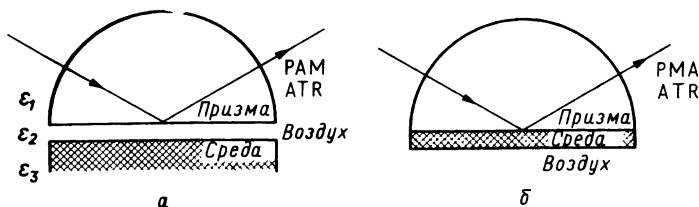


Рис. 3.38. Применение цилиндрических призм для возбуждения поверхностных плазмонов. Конфигурации *a* и *б* называются системами соответственно Отто и Кретчманна. Возбуждением в призме, может достигнуть границы раздела «воздух — среда» и возбудить поверхностный плазмон.

В системе «призма — среда — воздух» (конфигурация РМА, метод Кретчманна) слой активного вещества нанесен непосредственно на основание призмы. При этом затухающая волна образуется на границе раздела «призма — среда», проникает внутрь слоя активного вещества и возбуждает поверхностную волну на границе «среда — воздух» (рис. 3.38, б).

Возбуждение поверхностной волны можно зафиксировать по резкому ослаблению интенсивности отраженной ТМ-волны. Измеряя угол, при котором такой минимум наблюдается, можно сразу определить компоненту волнового вектора  $k'_x$  возбужденной поверхностной волны. Изменяя частоту, можно последовательно восстановить вид дисперсионной кривой, схематически представленной на рис. 3.37.

### 3.23. ИМПЕДАНСНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Учитывая затухание поля вдали от границы раздела, можно определить граничные условия на поверхности металла. Рассмотрим плоскую ТЕ-волну, падающую из вакуума на металл. Амплитуду прошедшего поля можно записать в виде

$$u'(x, z) = \exp[-ik_0 \tilde{n}(z \cos \theta' + x \sin \theta')], \quad (3.23.1)$$

где ось  $z$  перпендикулярна плоской границе раздела и направлена внутрь металла, а  $xz$  — плоскость падения. Поскольку для металла  $|\tilde{n}| \gg 1$ , из закона Снеллиуса получаем, что угол преломления  $\theta' \cong 0$  и

$$u'(x, z) \cong e^{-ik_0(nz + x \sin \theta)} e^{-k_0 x z}. \quad (3.23.2)$$

В соответствии с этим глубина проникновения волны в металл примерно равна  $(k_0 \kappa)^{-1}$ . Если  $u$  — это компонента электрического вектора  $E_y$ , параллельная поверхности, то  $u(x, z)$  непрерывна на границе раздела. Кроме того, производная  $\partial u / \partial z$  пропорциональна магнитной компоненте  $H_x$ , которая является также непрерывной. Поэтому в

вакууме вблизи границы раздела справедливо соотношение

$$\hat{n} \cdot \nabla u \equiv iuk_0 \tilde{n} \quad (\text{ТЕ-волны}), \quad (3.23.3)$$

где  $\hat{n}$  — нормаль к поверхности, направленная в сторону от металла. Выражение (3.23.3) представляет собой следствие формулы (3.23.2) и непрерывности составляющих  $E_y$  и  $H_x$ .

Те же рассуждения, что и выше, можно повторить для ТМ-волн, если  $u$  совпадает с  $H_y$ . В этом случае непрерывными величинами на границе раздела являются величины  $u$  и  $(1/n^2)\partial u/\partial z$  (пропорциональная  $E_x$ ), а выражение (3.23.3) принимает вид

$$\hat{n} \cdot \nabla u = iuk_0/\tilde{n} \quad (\text{ТМ-волны}). \quad (3.23.4)$$

Приведенные выше формулы, связывающие  $u$  и  $\partial u/\partial z$  непосредственно над поверхностью металла, называют *импедансными граничными условиями Леонтовича* [47] для неидеально проводящих поверхностей. Используя выражения (3.23.3) и (3.23.4), поверхности можно охарактеризовать величиной

$$Z_s \equiv (i\zeta_0/k_0 u)(\partial u/\partial z), \quad (3.23.5)$$

где  $Z_{s, s} = \zeta_0 \tilde{u}$  для ТЕ-волн и  $Z_{s, p} = \zeta_0/\tilde{n}$  для ТМ-волн.

## ЗАДАЧИ

### Раздел 3.3

1. Покажите, что формулы (3.3.9) и (3.3.11), пригодные в окрестности или вдали от точки поворота, можно заменить универсальной формулой Лангера, которая справедлива при любых  $z$ :

$$u(z) \propto S_0^{1/6}(z)[n^2(z) - n_0^2 \sin^2 \theta]^{-1/4} \text{Ai} \left\{ \left[ \frac{3}{2} k_0 S_0(z) \right]^{2/3} \right\}.$$

Здесь

$$S_0(z) = \int_{z_a}^z [n^2(z') - n_0^2 \sin^2 \theta]^{1/2} dz'.$$

2. Вычислите коэффициент пропускания канала  $t_d$ .

### Раздел 3.8

3. Докажите, что для угла падения  $45^\circ$  коэффициенты отражения Френеля удовлетворяют так называемому *соотношению Абеля*:  $R_s^2 = R_p$  и  $2\psi_s = \psi_p$ , где  $\psi_s$  и  $\psi_p$  — абсолютные изменения фазы при отражении для s- и p-волн.

4. Пусть в пластине, на которую падает пучок, нет потерь, и волна в ней многократно некогерентно отражается. Покажите, что пропускание такой пластины можно вычислить по формуле  $T_{s, p} = (1 - R_{s, p})/(1 + R_{s, p})$ . Вычислите *отношение экстинкции*  $T_s/T_p$  как функцию угла падения.

5. Рассмотрите поляризатор, состоящий из стопы пропускающих пластинок (рис. 3.13). Вычислите полное пропускание p- и s-волн, предполагая, что внутри каждой из пластин происходит многократное некогерентное отражение, а между пластинами

свет не отражается. Покажите, что

$$T_{s,p} = [(1 - R_{s,p})^{2m} e^{-mad}] / [(1 + R_{s,p}^2 e^{-2ad})^m],$$

где  $m$  — число пластин,  $\alpha = 4\pi\kappa/(\lambda \cos \theta')$ ,  $\kappa$  — коэффициент экстинкции (см. разд. 3.17),  $\theta'$  — угол преломления и  $d$  — толщина пластины.

6. Используя формулу из задачи 3.5, покажите, что достижимая в поляризаторе (рис. 3.13) степень поляризации записывается в виде

$$\frac{T_p - T_s}{T_p + T_s} = \frac{1 - \cos^{4m}(\theta - \theta')(1 - R_p^2 e^{-2ad})^m / (1 - R_s^2 e^{-2ad})^m}{1 + \cos^{4m}(\theta - \theta')(1 - R_p^2 e^{-2ad})^m / (1 - R_s^2 e^{-2ad})^m},$$

где  $\theta$  и  $\theta'$  — углы падения и преломления соответственно.

### Раздел 3.9

7. Представьте характеристическую матрицу  $\mathbf{M}_{ba}$  двойного слоя в виде следующей суммы:

$$\mathbf{M}_{ba} = a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3,$$

где

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

— спиновые матрицы Паули и  $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1$ . Затем, используя соотношение  $A + D = 2 \cos \delta$  и свойства матрицы Пауля, покажите, что

$$\mathbf{M}_{ba}^m = \frac{1}{\sin \delta} \begin{bmatrix} A \sin(m\delta) - \sin[(m-1)\delta] & B \sin(m\delta) \\ C \sin(m\delta) & D \sin(m\delta) - \sin[(m-1)\delta] \end{bmatrix}.$$

8. Покажите, что

$$\mathbf{M}_b \cdot \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_a \cdot \mathbf{M}_b = [-(Z_b/Z_a) + (Z_a/Z_b)] \sin \phi_a \sin \phi_b \sigma_3,$$

где

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Используя  $\mathbf{M}$ -матрицу для системы  $(\text{ВН})^p$  (задача 7), вычислите матрицу для симметризованной системы  $(\text{ВН})^p \text{В}$ . Кроме того, вычислите показатель преломления и фазовую толщину эквивалентного единичного слоя (см. задачу 10).

10. Покажите, что любая комбинация тонких пленок при некоторой длине волны эквивалентна определенной двухпленочной системе (теорема Херпина). Подсказка. Покажите, что представление (3.9.27) возможно для  $\mathbf{M}$ -матриц более общего вида.

11. Рассмотрите трехпленочную систему  $aba$ , у которой внешние слои имеют одинаковую толщину и показатель преломления. Покажите, что

$$A = D = \cos 2\phi_a \cos \phi_b - (1/2)(n_a/n_b + n_b/n_a) \sin 2\phi_a \sin \phi_b,$$

$$B = (i/n_a)[\sin 2\phi_a \cos \phi_b + (1/2)(n_a/n_b + n_b/n_a) \cos 2\phi_a \sin \phi_b + \\ + (1/2)(n_b/n_a - n_a/n_b) \sin \phi_b].$$

12. Исследуйте изменение матрицы  $\mathbf{M}_{ba}$  в зависимости от угла падения. Вычислите, в частности,  $\partial \mathbf{M} / \partial \theta$  при  $\theta = 0$ . Подсказка. Используйте представление (3.9.27) и равенство  $\partial \phi_b / \partial \phi_a = (d_b/d_a)^2 \phi_a / \phi_b$ .

### Раздел 3.10

13. Рассмотрите четвертьволновую стопу  $(\text{ВН})^m$ . Покажите, что при выполнении условия брэгговского резонанса (т. е. при  $\lambda = \lambda_0$ ) напряжение в эквивалентной линии

передачи пропорционально величине

$$V(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( V_0 - \frac{V'_0}{k_0 n_B} \right) \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{q(z)-q(0)} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^\varepsilon \cos \left( \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( V_0 + \frac{V'_0}{k_0 n_B} \right) \left( \frac{n_H}{n_B} \right)^{q(z)-q(0)} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \phi \right).$$

Здесь  $q(z)$  — функция, принимающая целочисленные значения, равные номеру двойного слоя, в котором лежит точка  $z$ ;  $\varepsilon = 0$  или 1, если  $z$  принадлежит соответственно

слою В или Н;  $\phi \equiv k_0 \int_0^z n(z') dz'$ . Начало координат принадлежит плоскости, проходящей через середину слоя с более высоким показателем преломления [ $V_0 = V(-\frac{1}{2} d_B)$ ,  $V'_0 = dV/dz$ ].

14. Для системы, рассмотренной в предыдущей задаче, покажите, что *блховская* функция  $V^{(+)}(z)$  записывается в виде  $f(z) \exp(-i\delta z/\Lambda)$ , где  $\Lambda = d_B + d_H$  и

$$e^{-i\delta z/\Lambda} = e^{-i\pi z/\Lambda} (n_L/n_H)^{z/\Lambda},$$

$$f(z) = |\cos[(\pi/4) - \phi]| (n_H/n_L)^{z/\Lambda} e^{i\pi z/\Lambda} \quad (-d_H/2 < z < (d_H/2) + d_L).$$

Кроме того, покажите, что  $V^{(-)}(z) \propto V^{(+)}(-z)$ .

15. Рассмотрите среду, состоящую из бесконечного числа чередующихся диэлектрических слоев а и б без потерь. Вычислите фазовый множитель  $\delta$  при  $\lambda \gg d_a, d_b$ . Покажите, что для s- и p-волн имеют место следующие выражения:

$$\delta^2 + (d_a + d_b)^2 (\beta_x^2 + \beta_y^2) = n_a^2 d_a^2 + n_b^2 d_b^2 + (n_a^2 + n_b^2) d_a d_b \quad (\text{s-волна}),$$

$$\delta^2 + (d_a + d_b)^2 + (n_a/n_b + n_b/n_a - 2) d_a d_b (\beta_x^2 + \beta_y^2) = \\ = n_a^2 d_a^2 + n_b^2 d_b^2 + (n_a^2 + n_b^2) d_a d_b \quad (\text{p-волна}).$$

Обратите внимание на то, что поле можно сравнить с плоской волной, волновой вектор которой имеет составляющие  $\beta_x$  и  $\beta_y$  с фазовым множителем  $\delta/(d_a + d_b)$ . Таким образом, многослойная среда в пределе больших длин волн аналогична однородной одноосной анизотропной среде, у которой показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн записываются соответственно в виде

$$n_o = \frac{n_a^2 d_a^2 + n_b^2 d_b^2 + (n_a^2 + n_b^2) d_a d_b}{(d_a + d_b)^2},$$

$$n_e = \frac{n_a^2 d_a^2 + n_b^2 d_b^2 + (n_a^2 + n_b^2) d_a d_b}{d_a^2 + d_b^2 + (n_a^2/n_b^2 + n_b^2/n_a^2) d_a d_b}.$$

*Подсказка.* Используя приближение  $\cos \phi = 1 - \phi^2/2$ , вычислите характеристическую матрицу. Кроме того, примените подстановку  $\cos \theta_{a,b} = (n_{a,b}^2 k_0^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2)^{1/2} / (n_{a,b} k_0)$ . (См. книгу [48].)

16. Покажите, что в центре полосы пропускания ( $\delta = 2l\pi$ ,  $\phi = n\pi$ ) имеет место равенство:  $\partial\delta/\partial\phi = (2 + n_B/n_H + n_H/n_B)^{1/2}$ .

### Раздел 3.11

17. Получите выражение (3.11.9). *Подсказка.* Используйте для этого выражения

(3.10.8) и (3.9.27), положив  $\phi_a = \phi_b$ , и вспомните определение угла  $\phi_i$  с помощью (3.10.6).

18. Покажите, что на краях полосы пропускания мультислоя с чередующимися показателями преломления фаза величины  $Z^+$  становится равной  $\pi/2$ , а амплитуда дается выражением

$$Z^{(+)} = Z_{\text{сб}} \left( 1 + \frac{3}{2 + n_a/n_b + n_b/n_a} \right)^{-1/2}.$$

### Раздел 3.12

19. Докажите, что входной импеданс  $Z_{\text{вх}}$  подложки с многослойным покрытием можно записать в виде

$$\vec{Z}_{\text{вх}} = (AZ_S + B)/(CZ_S + D),$$

где параметры  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  относятся к мультислою.

20. Покажите, что входной импеданс системы “(ВН)<sup>p</sup> — стекло” можно записать в виде

$$\vec{Z}_{\text{вх}} = \frac{Z_g [A \sin p\delta - \sin(p-1)\delta] + B \sin p\delta}{Z_g C \sin p\delta + D \sin p\delta - \sin(p-1)\delta}.$$

*Подсказка.* См. задачу 7.

21. Используя соотношение (3.12.6) и определения (3.12.7), выведите выражение (3.12.8).

22. Пусть два объема, в которых не происходит потерь энергии, разделены мультислоем. Используя второй закон термодинамики, докажите, что пропускание мультислоя одинаково для любого направления распространения плоской волны. Обратите внимание на то, что отражательные способности каждого слоя одинаковы только в том случае, когда на диафрагме нет потерь.

23. Используя выражение (3.12.16), покажите, что отражательная способность однослойного покрытия дается выражением

$$R = \frac{R_1 + R_S + 2\sqrt{R_1 R_S} \cos(2n_c d_c k_0 \cos \theta_c)}{1 + R_1 R_S + 2\sqrt{R_1 R_S} \cos(2n_c d_c k_0 \cos \theta_c)},$$

где  $R_1$  и  $R_S$  — френелевские коэффициенты отражения для границ раздела “окружающая среда — покрытие” и “покрытие — подложка” соответственно [см. выражение (3.8.8)].

### Раздел 3.13

24. Рассмотрите тонкую пленку без потерь, нанесенную на металлическую подложку, оптические постоянные которой равны  $n_S$  и  $\kappa_S$ . Докажите, что отражательная способность  $R$  дается выражением

$$R = \frac{1 + \sqrt{R_1} \cos 2\phi_c + b_1 \sin 2\phi_c + R_1(a_1^2 + b_1^2)}{R_1 + 2\sqrt{R_1} (a_1 \cos 2\phi_c + b_1 \sin 2\phi_c) + a_1^2 + b_1^2},$$

где  $R_1$  — френелевский коэффициент отражения на границе “пленка — окружающая среда”,  $\phi_c = n_c d_c k_0$  — фазовая толщина покрытия и

$$a_1 = \frac{n_c^2 - n_S^2 - \kappa_S^2}{(n_c + n_S)^2 + \kappa_S^2}, \quad b_1 = \frac{2n_c \kappa_S}{(n_c + n_S)^2 + \kappa_S^2}.$$

25. Рассмотрите нормальное падение волны на диэлектрическую пластину без потерь. Считая, что между двумя поверхностями пластины луч претерпевает некогерент-

ное отражение, покажите, что амплитуда электрического поля вблизи поверхности в  $2/(n+1)$  раз меньше, чем амплитуда исходного поля. И наоборот, интерференция между падающей и отраженной от выходной поверхности волны приводит к увеличению  $E$  на границе в  $2n/(n+1)$  раз. Обратите внимание на то, что различное изменение  $E$  объясняет, почему именно выходная поверхность пластинки более часто подвергается оптическому разрушению.

26. Рассмотрите металлическую подложку с нанесенным двойным покрытием  $L_1, L_2$ , каждое из которых имеет одинаковую фазовую толщину  $\phi$ . Покажите, что отражательная способность дается выражением

$$R = \frac{R_S + R_1 - 2\sqrt{R_S R_1} \cos(2\phi - \delta)}{1 + R_S R_1 - 2\sqrt{R_S R_1} \cos(2\phi - \delta)},$$

где  $R_S$  — френелевский коэффициент для поверхности раздела “металл — диэлектрик 2”,  $\delta$  — относительный фазовый сдвиг:

$$\delta = \arctg [2n_2 \kappa_S / (n^2 - n_S^2 - \kappa_S^2)],$$

$R_1$  — френелевский коэффициент для системы “окружающая среда — диэлектрик 1”, а  $n_S$  и  $\kappa_S$  — вещественная и мнимая части показателя преломления металла.

27. Рассмотрим четвертьволновой диэлектрический отражатель типа “стекло — (ВН)”<sup>р</sup>. Обозначим через  $n_B - i\kappa_B$  и  $n_H - i\kappa_H$  комплексные показатели преломления чередующихся слоев. Докажите, что при  $p \rightarrow \infty$  отражательная способность имеет предел

$$R = 1 - 2\pi[(\kappa_B + \kappa_H)/(n_B^2 - n_H^2)]n_1$$

(см. работу [49]).

28. Покажите, что спектр отражения однослойного просветляющего покрытия ( $n_c = n_1 n_S$ ) имеет вид

$$R(\lambda, \theta) = \frac{R_1(\theta) + R_S(\theta_c) + 2\sqrt{R_1(\theta)R_S(\theta_c)} \cos[\pi(\lambda_0/\lambda) \cos \theta_c]}{1 + R_1(\theta)R_S(\theta_c) + 2\sqrt{R_1(\theta)R_S(\theta_c)} \cos[\pi(\lambda_0/\lambda) \cos \theta_c]}.$$

Здесь  $\theta$  — угол падения,  $\theta_c$  — угол отражения в покрытии и  $\lambda_0 = (1/4)n_c d_c$  (индекс “с” относится к покрытию).

29. Постройте зависимости отражательной способности от  $\lambda$  и  $\theta$  для s- и p-волн в системе “стекло ( $n = 1,51$ ) — покрытие из  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1,38$ )”.

30. Представьте отражательную способность в виде  $R = X/(1 + X)$  и вычислите  $X$  для двухслойных просветляющих покрытий типа I и II (см. выражения (18) и (19) в работе [30]).

31. Вычислите отражательную способность трехслойного просветляющего покрытия типа I при  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ ,  $n_2 = \sqrt{n_S n_1}$ ,  $n_3 = n_1 \sqrt{n_S/n_1}$ . Покажите, что у этого покрытия есть две точки нулевого отражения, а отражательная способность в центре ( $\phi = \pi/2$ ) равна

$$R_{\max} \simeq (n_S/4n_1)[(n_1/n_1)^2 - n_1^2/n_1 n_S]^2.$$

*Подсказка.* Используйте выражение (3.12.10). См. также выражение (25) в работе [30].

32. Вычислите отражательную способность трехслойного просветляющего покрытия типа II ( $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi$ ,  $n_2 = \sqrt{n_S n_1}$ ,  $n_3 = n_S n_1/n_1$ ). Покажите, что у этого покрытия имеются три точки нулевого отражения, одна из которых расположена в центре ( $\phi = \pi/2$ ). *Подсказка.* Используйте (3.12.10). См. также выражение (28) в работе [30].

### Раздел 3.15

33. Вычислите эквивалентный показатель преломления и фазовую толщину симме



тричной системы аба. Определите интервал частот, в котором  $\phi_{\text{экв}}$  — комплексная величина. *Подсказка.* См. задачу 11.

34. Вычислите пропускание двойного полуволнового фильтра  $(\text{ВН})^n \text{ВВ}(\text{НВ})^m \text{В}(\text{ВН})^n \text{ВВ}(\text{НВ})^m$ . *Подсказка.* Используйте соотношения (3.12.8) — (3.12.10), а также результаты предыдущей задачи.

35. Постройте график зависимости эквивалентного показателя преломления и фазовой толщины симметричной тонкопленочной системы  $\text{pqr}$  от величины  $2\phi_p + \phi_q$ . (См. работу [50]).

36. Рассмотрите два симметричных мультислоя, таких, что показатель преломления каждого слоя в первой системе является обратной величиной к показателю преломления соответствующего слоя во второй системе. Кроме того, предположите, что фазовые толщины соответствующих друг другу слоев у двух систем одинаковы. Покажите, что эквивалентный показатель преломления первой системы равен обратному эквивалентному показателю преломления второй системы. (См. работу [51].)

### Раздел 3.19

37. Вычислите постоянную затухания  $\alpha$  поверхностной волны, распространяющейся вблизи тонкой пленки без потерь, нанесенной на металл, в котором потери велики. *Подсказка.* Вычислите входной импеданс подсистемы “тонкая пленка — металл” в мультислое “вакуум — тонкая пленка — металл” и найдите комплексный волновой вектор  $k_x = \beta - i\alpha$ , для которого вещественная и мнимая части импеданса удовлетворяют условию резонанса.

### Раздел 3.20

38. Рассмотрите полый волновод, состоящий из двух диэлектрических пластин без потерь, расстояние между которыми  $d \gg \lambda$ . Вычислите постоянную распространения и коэффициент затухания  $\alpha$  для распространяющейся в волноводе моды. Покажите, что для ТЕ- и ТМ-волн относительно диэлектрических поверхностей величина  $\alpha$  дается приблизительно выражениями

$$\alpha_{\text{ТЕ}} = \lambda^2/8d^3 \sqrt{n^2 - 1}, \quad \alpha_{\text{ТМ}} = n^2 \lambda^2/8d^3 \sqrt{n^2 - 1},$$

где  $n$  — показатель преломления диэлектрика. *Подсказка.* Представьте моду в промежутке между диэлектриками в виде суперпозиции двух затухающих плоских волн, претерпевающих полное отражение на диэлектрических поверхностях и преобразующихся одна в другую за счет таких отражений. (См. книгу [52]).

39. Пусть диэлектрическая пластина без потерь покрыта тонким слоем вещества, показатель преломления которого меньше единицы (например, металлом вблизи плазменной частоты  $\omega_p$  или диэлектриком в окрестности узкого и ярко выраженного резонанса), а коэффициент экстинкции мал. Вычислите отражательную способность как функцию угла падения и длины волны. Покажите, что критический угол покрытия  $\theta_c = \arcsin n$  с хорошей точностью совпадает с углом  $\theta_m$ , при котором зависимость  $R(\theta)$  имеет максимальный наклон. Кроме того, рассмотрите эффекты, возникающие при многократных отражениях внутри покрытия. (См. работу [53]).

40. Покажите, что магнитные силовые линии поля s-волны, падающей под углом, который больше критического, описываются в более плотной среде уравнением

$$\sin(\omega t + kx \sin \theta) \sin(ky \cos \theta) = \text{const.}$$

### Раздел 3.21

41. Вычислите постоянную затухания  $\alpha$  ТЕ- и ТМ-волн, распространяющихся по планарному волноводу с боковыми стенками, изготовленными из металла с большими

потерями. Предполагая, что расстояние между стенками  $d$  гораздо больше  $\lambda$ , покажите, что

$$\alpha = m\lambda A(\theta)/2d^2,$$

где  $\theta = \pi/2 - m\lambda/2d$  — угол падения плоских волн, представляющих собой  $m$ -ю моду. Используя выражения (3.21.14) и (3.21.15), докажите, что

$$\alpha_m^{\text{TE}} = (m^2 \lambda^2 / d^3) \operatorname{Re}(1/\tilde{n}), \quad \alpha_m^{\text{TM}} = (m^2 \lambda^2 / d^3) \operatorname{Re} \tilde{n}.$$

(См. работу [54].)

42. Нарисуйте график зависимости псевдобрюстеровского угла от величины  $(n^2 + \kappa^2)^{1/2}$ .

43. Вычислите комплексный показатель преломления металла, если известны его отражательная способность при нормальном падении и псевдобрюстеровский угол  $\bar{\theta}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Knittl Z.*, Optics of Thin Films, Wiley, New York, 1976.
2. *Hass G.*, J. Opt. Soc. Am., **72**, 27 (1982).
3. *Spiller E.*, Appl. Opt., **15**, 2333 (1976).
4. *Rosenbluth A. E., Foresyth J. M.*, Reflecting Properties of X-Ray Multilayer Devices, Inst. Opt., Univ. of Rochester, New York, 1982.
5. *Leith E. H., Kozma A., Upatnieks J., Marks J., Maney N.*, Appl. Opt., **5**, 1303 (1966).
6. *George N., Matheus J. W.*, Appl. Phys. Lett., **9**, 212 (1966).
7. *Brekovskikh L. M.*, Waves in Layered Media, Academic Press, New York, 1960.
8. *Wait J. R.*, Electromagnetic Waves in Stratified Media, Macmillan, New York, 1962.
9. *Tien P.*, Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1977).
10. *Agranovich V. M., Mills D. L.*, Surface polaritons, North-Holland Publ., Amsterdam, 1982.
11. *Bender C. M., Orszag S. A.*, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York, 1978.
12. *Jacobsson R.*, Prog. Opt., **5**, 247 — 286 (1966).
13. *Alexopoulos N. G., Uslenghi P. L.*, J. Opt. Soc. Am., **71**, 1508 (1981).
14. *Tyras G.*, Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves, Academic Press, New York, 1969.
15. *Brillouin L.*, Wave Propagation in Periodic Structures, 2nd ed., Dover, New York, 1953.
16. *MacLeod H. A.*, Thin Film Optical Filters, Am. Elsevier, New York, 1969.
17. *Vasicek A.*, Optics of Thin Films, North-Holland Publ., Amsterdam, 1960.
18. Physics of Thin Films, v. 1, (ed. G. Hass), Academic Press, New York, 1963.
19. *Abelès A.*, Ann. Phys. (Paris), **5**, 596; 706 (1950).
20. *Berreman D. W.*, J. Opt. Soc. Am., **65**, 502 (1972).
21. *Collin R. E.*, Foundations for Microwave Engineering, McGraw-Hill, New York, 1965.
22. *Stone J. M.*, Radiation and Optics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- 22a. *Baumeister P.*, A Survey of Optical Interference Coatings, Inst. Opt., Univ. of Rochester, Roshester, New York, 1977.
23. *Arndt J., Baumeister P.*, J. Opt. Soc. Am., **56**, 1760 (1966).
24. *Hass G.*, J. Opt. Soc. Am., **45**, 945 (1955).
25. *Baumeister R., Arnon O.*, Appl. Opt., **16**, 439 (1977).

26. *Thelen A.*, J. Opt. Soc. Am., **61**, 365 (1971).
27. *Clapham P. B., Downs M. J., King R. J.*, Appl. Opt., **8**, 1965 (1969).
28. *Bennet J. M., Bennet H. E.*, — In: Handbook of Optics (eds. W.G. Driscoll, W. Vaughan), McGraw-Hill, New York, 1978, p. 10. 1—10. 100.
29. *Schroder H., Schlafer R.*, Zs. Naturforsch., **49**, 576 (1949).
30. *Musset A., Thelen A.*, Prog. Opt., **8**, 201 — 237 (1970).
31. *Cox J. T., Hass G.* — In: Physics of Thin Films (eds. G. Hass, R.E. Thun), v. 2, Academic Press, New York, 1964, p. 239—303.
32. *Кард П.* Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. — Таллин: Валгус, 1971, с. 79—91.
33. *Delano E., Pegis R. J.*, Prog. Opt., **7**, 67 —137 (1969).
34. *Baumeister P., Moore R., Walsh K.*, J. Opt. Soc. Am., **67**, 1039 (1977).
35. *Dobrowolski J. A.* — In: Handbook of Optics (eds. W.G. Driscoll, W. Vaughan), McGraw-Hill, New York, 1978, p. 8.1 — 8.117.
36. *Seeley J. S.*, J. Opt. Soc. Am., **54**, 342 (1964).
37. *Smith S. D.*, J. Opt. Soc. Am., **48**, 43 (1958).
38. *Kogelnik H.*, Bell Syst. Tech. J., **48**, 2909 (1969).
39. Integrated Optics (ed. T. Tamir), Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975. [Имеется перевод: Интегральная оптика / Под ред. Т. Тамира. — М.: Мир, 1978.]
- 39a. *Wang S.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-10**, 413 (1974).
- 39b. *Tsang W. T., Logan R. A., Johnson L. F. J., Hartman R. L., Koszi L. A.*, J. Quantum Electron., **QE-15**, 1091 (1979).
40. *Magnus W., Winkler S.*, Hill's Equation, Wiley, New York, 1966.
41. *Yen P., Yariv A., Hong C-S.*, J. Opt. Soc. Am., **67**, 423 (1977).
42. *Collin R. E.*, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
43. Optical Properties of Solids (ed. F. Abeles), North-Holland Publ., Amsterdam, 1972.
44. *Abeles F.* — In: Advanced Optical Techniques (ed. A.C.S. van Heel), North-Holland Publ., Amsterdam, 1963, p. 143—188.
45. *Bell E. E.* — In: Handbuch der Physik, v. XXV-2A (ed. S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin, New York, 1967, p. 1—57.
46. Polaritons, (eds. E. Burstein, F. De Martini), Pergamon, New York, 1974.
47. *Senior B. A.*, Appl. Sci. Res., Sect. B, **8**, 437 (1960).
48. *Yariv A., Yeh P.*, J. Opt. Soc. Am., **67**, 438 (1977).
49. *Koppelman G.*, Ann. Phys. (Paris), **5**, 388 (1950).
50. *Epstein I. I.*, J. Opt. Soc. Am., **42**, 806 (1952).
51. *Thelen A.*, J. Opt. Soc. Am., **56**, 1533 (1966).
52. *Marcuse D.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-8**, 661 (1972).
53. *Hunter W. R.*, J. Opt. Soc. Am., **54**, 15 (1964).
54. *Carmire E., McMahon T. M., Bass M.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-16**, 23 (1980).

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Surface Excitations (eds. V.M. Agranovich, R. Loudon), North-Holland Publ., Amsterdam, 1984.
- Azzam R. M. A., Bashara N. M.*, Ellipsometry and Polarized Light, North-Holland Publ., Amsterdam, 1977. [Имеется перевод: *Аззам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. — М.: Мир, 1981.]
- Beckman P., Spizzichino A.*, The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces, Pergamon, Oxford, 1963.

- Hsue C. W., Tamir T.*, J. Opt. Soc. Am., **A2**, 923 (1985).  
*Hunderi O.*, Surf. Sci., **96**, 1 (1980).  
*Jacobsen R. T.*, J. Opt. Soc. Am., **54**, 1170 (1964).  
Handbook of Synchrotron Radiation, v. 1. (ed. E.E. Koch), North-Holland Publ., Amsterdam, 1983.  
*Kortum G. F.*, Reflectance Spectroscopy, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1969.  
*Rovard P., Bousquet P.* — In: Progress in Optics, v. IV (ed. E. Wolf), North-Holland Publ., Amsterdam, 1965, p. 145—197.  
*Tamir T., Wang H. C., Oliver A. A.*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-12**, 323 (1964).  
*Yeh P.*, J. Opt. Soc. Am., **69**, 742 (1979).  
*Yeh P.*, Surf. Sci., **96**, 41 (1980).

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

## 4.1. ВВЕДЕНИЕ

## 4.1.1. История вопроса

Волновая теория в том виде, в котором она теперь существует, является результатом длительной и интересной эволюции взглядов, берущих свое начало в идеях, высказанных в 1690 г. Христианом Гюйгенсом в знаменитом “Трактате о свете”<sup>1)</sup>. В первой главе своей книги Гюйгенс написал, что он был поражен тем фактом, что

“...волнообразное движение, производимое столь малыми движениями и тельцами, может распространяться на огромные расстояния, как, например, расстояния от Солнца или от звезд до нас. Действительно, сила этих волн должна ослабевать по мере их удаления от своего источника, так что каждая из них в отдельности, несомненно, теряет способность воздействовать на наше зрение. Но это перестает быть удивительным, если принять во внимание, что бесконечное число волн, исходящих, правда, из различных точек светящегося тела, на большом расстоянии от него соединяются для нашего ощущения только в одну волну, которая, следовательно, и должна обладать достаточной силой, чтобы быть воспринятой. Таким образом, то бесконечное число волн, которые одновременно нарождаются во всех точках неподвижной звезды, быть может такой же большой, как и Солнце, для ощущения представляется только одной волной, которая вполне может быть достаточно сильной, чтобы вызвать впечатление в наших глазах...”

Это описание волнового распространения известно как *принцип Гюйгенса*.

Большая заслуга Томаса Юнга состоит в том, что он, следуя Ньютону, снова привлек идеи волнового распространения для объяснения корпускулярной теории оптических явлений. Действительно, в трех бейкеровских лекциях, прочитанных им в Королевском Обществе в 1801—1803 годах, он ввел *принцип интерференции*, который применительно к волнам, сопутствующим постулированным Ньютоном кор-

<sup>1)</sup> Есть русское издание этого труда: *Христиан Гюйгенс. Трактат о свете.* — М.—Л.: Объединенное научно-техническое изд-во НКПТ СССР, 1935. — *Прим. перев.*

пускулам света, позволил объяснить появление колец, наблюдаемых при соединении изогнутой стороны выпуклой линзы с плоской оптической поверхностью.

Благодаря этому принципу Юнг смог впервые вычислить длины волн для разного цвета. К сожалению, из-за господства корпускулярной теории остальные ученые не приняли его идеи.

Позднее, 15 октября 1815 г., Огюстен Жан Френель представил Французской академии знаменитый трактат “Дифракция света”, в котором, развивая идеи Гюйгенса и Юнга, изложил систематическое описание интерференционных полос, наблюдаемых на темной стороне препятствия, освещаемого небольшим источником света. Френель смог показать, что измеренные расстояния между полосами совпадают с результатами вычислений, основанных на волновой теории. Кроме того, Френель придумал более строгую форму принципу Гюйгенса, подчеркнув важную роль фаз отдельных вкладов от излучателей. Действительно, Гюйгенс еще не знал ни о поперечных колебаниях, ни о принципе интерференции, ни о существовании упорядоченной последовательности волн в цуге. В июле 1819 г. Французская академия наградила Френеля специальной премией, отметив таким образом окончательную победу волновой теории над корпускулярными представлениями Ньютона.

Другой выдающийся успех волновой теории был зафиксирован в 1835 г. в связи с публикацией в “Трудах Кэмбриджского Философского общества” фундаментальной статьи сэра Джорджа Биддела Эйри (директора Кэмбриджской обсерватории), в которой он вывел свое знаменитое выражение, описывающее изображение звезды, видимой через хорошо скорректированный телескоп. Изображение состоит из яркого ядра (называемого с тех пор *диском Эйри*), окруженного слабосветящимися кольцами, из которых только первое глаз ощущает как достаточно яркое.

Вплоть до публикации Максвеллом в 1873 г. “Трактата об электричестве и магнетизме” успешное применение идей Френеля для решения большого числа задач рассеяния и дифракции основывалось на физической модели распространения через упругую среду. В частности, в 1861 г. Клебш описал дифракцию плоской волны на сферическом препятствии. Удивительно, что большинство из этих решений было подтверждено электромагнитной теорией уже в рамках уравнений Максвелла. Типичным примером являются решения Клебша для сферы. Такой успех обусловлен тем, что и электромагнитные, и упругие поля могут быть в принципе описаны скалярными функциями, удовлетворяющими скалярному волновому уравнению. Таким образом, это

уравнение можно рассматривать как единую основу для многих полей, существующих в природе. Оно же объясняет тот удивительный факт, что малое возмущение, рожденное в конечном объеме, может распространяться в физическом пространстве и восприниматься даже на астрономических расстояниях. Эта восхитительная история оптических теорий повторяется в современных попытках описать более сложные поля, которые управляют внутриядерным миром, что является областью физики высоких энергий.

Начиная с первого успеха формулы Эйри, теория дифракции приобретала все большую популярность, обеспечивая исследователей фундаментальными методами количественной оценки качества изображений и возможностей оптических систем формировать хорошо разрешенные изображения. Этот успех можно объяснить на известном примере. Размер центрального дифракционного диска в изображении точечного предмета не сильно зависит от точности установки плоскости наблюдения или от существования сферической аберрации. Например, вычисления показывают, что при дефокусировке на четверть длины волны размер диска сохраняется практически неизменным. Это означает, что в данном случае прибор может разрешить две соседние точки так же, как и в идеальной оптической системе без аберраций. Интересно, что ситуация изменяется при наблюдении протяженных предметов. В частности, для тех же отклонений системы от идеальной наблюдается уже заметная потеря контраста в тонких деталях изображения протяженного предмета. Объяснение этому следует искать в изменении всей дифракционной картины изображения. Действительно, хотя размер центрального диска остается прежним, аберрации изменяют распределение интенсивности между центральным диском и концентрическими кольцами. Вычисления показывают, что при тех же аберрациях интенсивность колец увеличивается на 17% и соответственно уменьшается яркость центрального диска.

Для того чтобы разобраться в этой сложной ситуации, в 1946 г. Дюффо предложил исследовать изображение как функцию периода при синусоидальном распределении интенсивности. В результате информация об оптической системе содержится в *оптической передаточной функции* (ОПФ), которая определяет отклик системы в зависимости от числа линий предмета на единице длины. Эту функцию можно вычислить, используя интегралы теории дифракции, в то время как функция аберраций  $W_0$  системы (см. разд. 2.15) определяется с использованием формализма геометрической оптики.

Уже в наше время с развитием идей Габора и Торальдо ди Франча оптические системы стали характеризоваться с помощью счетного

множества полей предмета, которые достоверно воспроизводятся (в том числе и для конечных зрачков, и в присутствии аберраций). Этот подход, основанный на решении интегральных уравнений Фредгольма, получаемых из стандартных дифракционных интегралов, позволяет использовать идеи теории информации для описания оптических приборов. Таким образом, квантуя информацию, заложенную в изображении, и измеряя информационную емкость оптического прибора, можно непосредственно определить пропускную способность электронных каналов связи, необходимых для передачи изображения.

#### 4.1.2. Математический аппарат

Волновая оптика рассматривает, чем отличается истинное поведение электромагнитных полей от того, что предсказывает геометрическая оптика. Результаты геометрической оптики основываются на приближении, в котором волны распространяются вдоль определенных траекторий (лучей). В действительности же электромагнитные поля подчиняются волновым уравнениям Гельмгольца, дополненным соответствующими граничными условиями. Решения краевых задач в теории электромагнитного поля ограничены и непрерывны, в то время как в геометрической оптике поля сингулярны на каустиках и разрывны при пересечении *границ тени*, образуемых препятствиями, разрушающими пучки лучей.

К сожалению, сингулярности геометрической оптики не устраняются и при рассмотрении высших порядков в рядах Луненберга—Клейна (ЛК) [выражение (2.2.5)]. Действительно, два последовательных члена этого ряда связаны рекурсивными соотношениями (2.6.2); поэтому, если первый член расходится, то последующие члены вычислить уже невозможно. Таким образом, приходится выискивать различные представления для полей, по крайней мере вблизи этих критических областей. Целью волновой оптики является устранение нефизических особенностей полей, вычисленных методами геометрической оптики, и улучшение методов вычисления полей при распространении их на очень большие расстояния.

Анализируя доступные аналитические решения уравнения Максвелла, которые в пределе  $\lambda = 0$  приводят к каустикам или границам тени, можно заметить, что вблизи критических областей амплитуда поля испытывает систематические колебания в пространстве. Иными словами, каустики и границы тени окружены чем-то вроде приграничного слоя аналогично тому, что происходит при обтекании поверхности жидкостью (рис. 4.1). Толщина и скорость изменения поля внутри



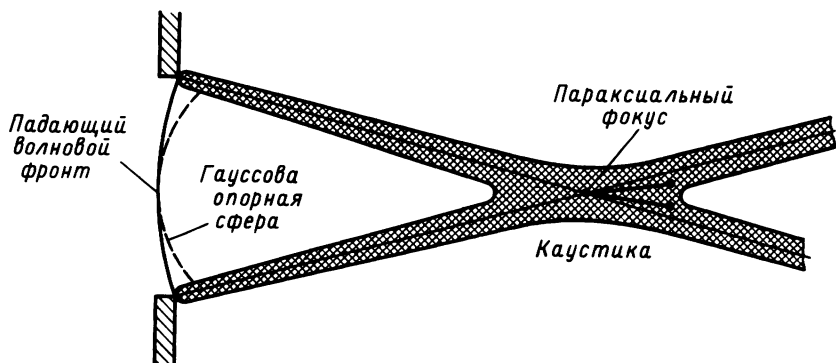


Рис. 4.1. Отверстие в плоском экране, освещаемое сферической волной с абберациями. Заштрихованные области представляют собой граничный слой, окружающий границу тени и каустику.

этого слоя зависит от волнового числа  $k$ . При  $k \rightarrow \infty$  толщина слоя стремится к нулю, а решение волнового уравнения стремится к своему предельному виду [1].

Вообще говоря, отличие истинных полей от полей, полученных в приближении геометрической оптики, тем больше, чем дальше мы отодвигаемся от источников и от препятствий, мешающих свободному распространению света. Рассмотрим в качестве примера отверстие в металлическом экране, на которое падает плоская волна. В приближении геометрической оптики распределения поля на любой плоскости, параллельной экрану, имеют одни и те же размеры и форму. Истинное же распределение интенсивностей, называемое *дифракционной картиной*, при удалении от экрана с каждым шагом все заметнее изменяется по форме и размерам. В конечном счете достигается область далекого поля, в которой с увеличением расстояния изменяются лишь размеры картины, форма же сохраняется постоянной.

Другая ситуация возникает при неоднородном распределении показателя преломления. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение несколько волн, распространяющихся в различных направлениях, причем связь между этими полями определяется неоднородностями среды. Физически это можно интерпретировать как процесс *рассеяния*: падающая волна порождает рассеянную волну, распространяющуюся в разных направлениях.

Задачи, которые решает волновая теория, можно условно разделить на три класса:

- 1) изучение распространения волн через неоднородную среду (см. гл. 3);

- 2) *вопросы дифракции* (см. данную главу) и
- 3) *изучение рассеяния на препятствиях* (см. гл. 6).

В частности, теория дифракции занимается главным образом изучением полей вблизи каустик, фокусов и границ тени, связанных с волновыми фронтами, ограниченными отверстиями (или препятствиями). В строгом смысле слова всякое препятствие можно рассматривать как область, в которой показатель преломления отличается от его величины в окружающей среде; поэтому дифракцию на отверстиях или рассеяние на препятствиях можно рассматривать как распространение через неоднородную среду. Таким образом, приведенная классификация определяется главным образом соображениями удобства.

Волновая теория использует большое число различных аналитических методов [2, 3]:

- 1) *спектральное представление полей* (разложение по плоским, цилиндрическим и сферическим волнам; пучки Эрмита — Гаусса; вытянутые сфероидальные гармоники) (см., например, гл. 4, 5 и 7);
- 2) *дифракционные интегралы* (см. данную главу);
- 3) *интегральные уравнения* (см., например, гл. 7);
- 4) *интегральные преобразования* (преобразования Лебедева — Канторовича, преобразование Ватсона) [4] (см., например, гл. 5);
- 5) *разделение переменных* (см., например, гл. 8);
- 6) *функциональный метод Винера — Хопфа — Фока* [5];
- 7) *асимптотические ВКБ-решения волнового уравнения для неоднородных сред* (см., например, гл. 3);
- 8) *вариационные методы* [6, 7];
- 9) *решения уравнений Максвелла с помощью теории возмущений* [8] *для слабо неоднородных сред (разреженная среда)* (см., например, гл. 6).

Во многих случаях решения можно выразить в виде комплексных интегралов и рядов, которые можно вычислить либо асимптотически, либо численными методами, используя

- 1) *методы перевала и стационарной фазы* (см., например, гл. 5);
- 2) *теорию приграничного слоя*;
- 3) *алгоритм двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ)* [9].

Метод перевала, который в общем случае более точен, чем метод стационарной фазы, состоит в деформации контура интегрирования в комплексной плоскости и последующего вычисления интеграла с помощью асимптотического ряда. Можно показать, что этот ряд в це-

лом совпадает с модифицированным ЛК-представлением поля, в котором главный член пропорционален дробной степени величины  $k^{-1}$ .

Аномалии на каустиках или на границе тени можно в принципе исключить, используя “растянутую” соответствующим образом систему координат, которая в хорошем приближении позволяет описать быстрые изменения поля. Такой подход обычно называют *приграничной теорией дифракции* [1].

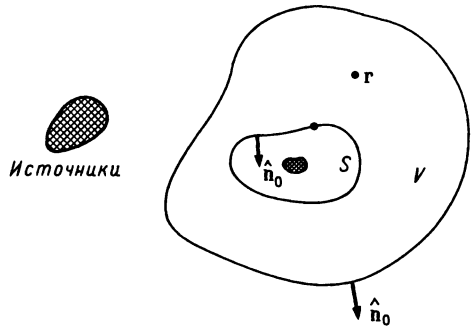
Напомним здесь, что полное знание электромагнитного поля означает определение всех скалярных компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В общем случае три компоненты поля (например,  $\mathbf{E}$ ) колеблются с общей частотой  $\omega$  и различными фазами. Как следствие, конец вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  при данном  $\mathbf{r}$  описывает за период  $T = 2\pi/\omega$  плоскую фигуру, имеющую форму эллипса. Когда эллипс вырождается в отрезок, поле называется *линейно поляризованным*. Во многих случаях при изменении  $\mathbf{r}$  поляризация также изменяется. Например, если сфокусировать линзой линейно поляризованный пучок света, то с приближением к фокусу степень его линейной поляризации становится все меньше. Эти процессы можно удовлетворительно описать лишь с помощью векторной волновой теории (см. разд. 4.13).

Важной особенностью интегрального представления поля является тот факт, что во многих случаях резонансы системы можно изучать, отыскивая полюсы подынтегрального выражения. В частности, полюсы, соответствующие вещественным значениям частоты, приводят к колебательным или распространяющимся модам системы, а комплексные частоты соответствуют модам утечки (см. разд. 3.19). Кроме того, наличие *разрезов* в плоскости определения подынтегрального выражения связано с существованием некоторых специальных волн (например, поверхностных и *боковых волн*). В общем случае существенную информацию можно получить, исследуя области аналитичности подынтегрального выражения.

## 4.2. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

### 4.2.1. Интегральная теорема Гельмгольца — Кирхгофа

Рассмотрим объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$  (в общем случае многолистной), и две произвольные функции  $u(\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — координаты точек внутри этого объема (рис. 4.2). Если обозначить производную по внешней нормали  $\hat{\mathbf{n}}_0$  к поверхности  $S$  через  $\partial/\partial n_0$ , то с помощью теоремы Гаусса можно записать следующее выражение:



ис. 4.2. Область поля, ограниченная двумя замкнутыми поверхностями.

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V [f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV = \\
 & = \iiint_V \nabla \cdot [f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV = \\
 & = \oiint_S \left[ f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n_0} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_0} \right] dS, \quad (4.2.1)
 \end{aligned}$$

где оператор  $\nabla$  действует на координату  $\mathbf{r}$ .

Для наших целей удобно ввести функцию  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , удовлетворяющую неоднородному волновому уравнению

$$[\nabla^2 + n^2(\mathbf{r})k_0^2]G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.2.2)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — трехмерная  $\delta$ -функция. Любая функция  $G$ , удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению, правая часть которого записывается так, как в (4.2.2), называется *функцией Грина* оператора, стоящего в левой части того же уравнения. Из уравнений Максвелла получаем следующее уравнение:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} + 2 \nabla [\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln n)] = i\omega\mu_0 \mathbf{J} - (i/\omega\epsilon_0) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{J}/n^2(\mathbf{r})], \quad (4.2.3)$$

которое при  $\mathbf{J} = 0$  сводится к (2.8.1). Используя приближение скалярной теории, т. е. пренебрегая третьим членом в левой части уравнения (4.2.3), имеем

$$\nabla^2 u + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) u = -h(\mathbf{r}), \quad (4.2.4)$$

здесь  $u$  — любая из декартовых компонент вектора  $\mathbf{E}$ , а функция  $h$  — соответствующая компонента вектора в правой части уравнения (4.2.3). Поскольку  $u$  линейно зависит от  $h$ , можно использовать принцип суперпозиции и записать следующее выражение:

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') h(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.2.5)$$

где  $G$  — решение уравнения (4.2.2). В частном случае, когда  $h(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$ , из (4.2.5) следует

$$u(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (4.2.6)$$

т. е. любое решение  $u(\mathbf{r})$ , порождаемое  $\delta$ -источником, расположенным в точке  $\mathbf{r}'$ , является функцией Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Уравнение (4.2.2) имеет бесконечное множество решений, каждое из которых определяется своими значениями на поверхности  $S$ . Во многих случаях, используя формальную идентичность уравнений (4.2.2) и (4.2.4), удобно рассматривать только те решения, которые связаны с источниками внутри объема  $V$ , а не вне поверхности  $S$ . Другой тип функций Грина можно получить, рассматривая внешние по отношению к  $V$  источники так, чтобы удовлетворялись соответствующие граничные условия.

Для неограниченной однородной среды (показатель преломления не зависит от  $\mathbf{r}$ ) функция Грина уравнения (4.2.2) записывается в виде (см. задачи 5 и 6 в гл. 1):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\exp(-ik_0 n |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.2.7)$$

Рассмотрим теперь компоненту  $u$  поля, удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$[\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})]u(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.2.8)$$

Умножая (4.2.8) и (4.2.2) соответственно на  $G$  и  $u$  и вычитая полученные уравнения одно из другого, находим простое соотношение:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = u(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.2.9)$$

Полагая  $G \equiv f$  и используя уравнение (4.2.9) в соотношении (4.2.1), получаем *интегральную теорему Гельмгольца — Кирхгофа* (которую называют также *теоремой Грина*):

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \oiint_S \left[ G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} - u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_0} \right] dS' = \\ &= \oiint_S [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \cdot \hat{n}_0 dS' = \\ &= \oiint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{n}_0 dS'. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Функция  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , называемая *векторным полем Гельмгольца*, определяется выражением

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (4.2.11)$$

При написании выражения (4.2.10) мы поменяли ролями  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ , так

что интеграл и производные должны вычисляться относительно координаты  $\mathbf{r}'$ , как это указывается символом  $\nabla'$ .

Следует заметить, что из (4.2.9) вытекает соотношение

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad (4.2.12)$$

справедливое всюду, кроме точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Таким образом, согласно теореме Гаусса, интеграл в правой части равенства (4.2.10), а тем самым и  $u(\mathbf{r})$  не зависят от выбора поверхности  $S$ , ограничивающей объем, включающий в себя точку наблюдения  $\mathbf{r}$ .

Если интеграл Гельмгольца — Кирхгофа берется по поверхности  $S$ , характеризуемой *поверхностным импедансом*  $Z_S$ , то величину  $du/dn_0$  можно представить как функцию только от  $u$  [см. уравнение (3.23.5)], так что уравнение (4.2.10) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = - \oint\oint_S \left[ ikZ_S(\mathbf{r}') \frac{G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\zeta} + \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n_0} \right] u(\mathbf{r}') dS', \quad (4.2.13)$$

где  $k = k_0 n$  и  $\zeta = \zeta_0/n$ .

Соотношение (4.2.13) особенно полезно при рассмотрении дифракции от металлических предметов с конечной проводимостью. В этом случае  $Z_S/\zeta_0$  совпадает или с *комплексным показателем преломления*  $n - ik$ , или с обратной ему величиной в зависимости от поляризации поля, перпендикулярной или параллельной плоскости падения [см. выражения сразу за (3.23.5)]. Для однородной среды, ограниченной поверхностью  $S$ , функция Грина определяется выражением (4.2.7), так что из (4.2.13) имеем

$$u(\mathbf{r}) = \frac{i}{2\lambda} \oint\oint_S \frac{e^{-ik_0 n R}}{R} u(\mathbf{r}') \left[ \frac{Z_S(\mathbf{r}')}{\zeta} + \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}} \left( 1 - \frac{i}{kR} \right) \right] dS', \quad (4.2.14)$$

здесь  $\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{r}' - \mathbf{r})/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ .

В соответствии с выражением (4.2.10) поле  $u(\mathbf{r})$  полностью определено, если оно задано вместе с производной по нормали на замкнутой поверхности, ограничивающей интересующий нас объем. Однако при этом мы еще не можем получить распределение поля. Действительно, чтобы воспользоваться выражением (4.2.10), должна быть известна функция Грина для конкретного закона изменения показателя преломления и конкретных граничных условий, определяемых рассеивающими объектами, диафрагмами и т. д. Формально мы можем рассматривать  $u$  и  $du/dn_0$  на поверхности  $S$  как входные данные линейной системы, отклик которой  $u(\mathbf{r})$  дается интегралом (4.2.10). Следовательно, оптическую систему можно сравнить с черным ящиком, входными параметрами которого являются  $u$  и  $du/dn_0$ , заданные на  $S$ , хотя, как мы покажем ниже, их нельзя варьировать независимо. При этом

функция Грина представляет собой аналог импульсного отклика электронного устройства.

Первый из способов определения поля, создаваемого точечным источником, т. е. функции  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , основывается на методах геометрической оптики. Если источник расположен в точке  $\mathbf{r}'$ , то можно определить траектории лучей, выходящих из  $\mathbf{r}'$ , и соответствующие волновые фронты. В общем случае из-за неоднородности среды траектории лучей являются криволинейными. Если внутри объема можно выделить поверхность, на которой показатель преломления меняется скачком, то электромагнитная волна испытывает частичное отражение и преломление. В некоторых случаях конгруэнции отраженных и падающих лучей перекрываются, что приводит к сложной дифракционной картине (рис. 4.3). Кроме того, преломленные лучи могут покинуть диэлектрик лишь в том случае, когда они попадают на ограничивающую его поверхность под углом, который меньше критического. Чтобы учесть это, нужно использовать формулы Френеля (гл. 3) для коэффициентов пропускания и отражения волн, падающих на поверхности разрыва показателя преломления  $n(\mathbf{r})$ . Как только определены траектории лучей, можно в принципе вычислить амплитуды поля  $A_m(\mathbf{r})$ , используя транспортные уравнения [см. (2.6.4)]. Структура этих уравнений такова, что пренебречь высшими членами разложения  $A_m(m > 1)$  в рядах Луненберга — Клейна нельзя, если  $A_0$  быстро изменяется в пространстве. Например, изображенные на рис. 4.3 лучи резко изменяют направление своего распространения, пересекая диэлект-

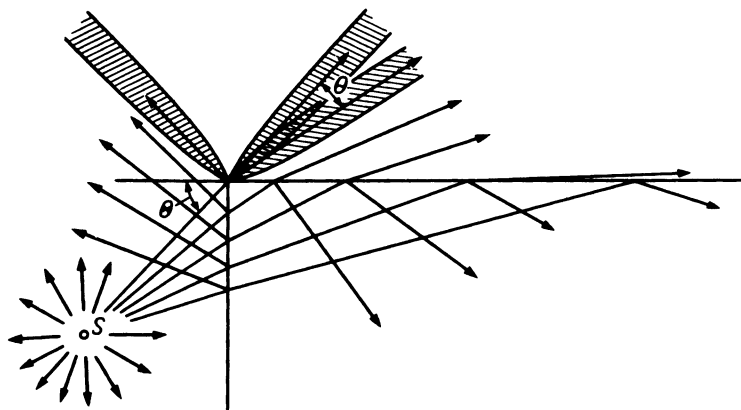


Рис. 4.3. Схематическое представление поля, дифрагированного на прямоугольном диэлектрическом клине. Прошедшие, отраженные и преломленные лучи, отходящие от клина, окружены критическими областями, где поле существенно отличается от предсказаний геометрической оптики.

рик. Дважды применяя закон Снеллиуса (2.11.8), легко показать, что угловое отклонение луча после попадания из вакуума на кромку диэлектрического клина с показателем преломления  $n$  и углом  $\pi/2$  дается выражением  $\theta = \Theta - \arcsin(1 + \sin^2\Theta - n^2)^{1/2}$ , где  $\Theta$  — угол падения. Таким образом, поле в заштрихованных на рис. 4.3 участках испытывает быстрые изменения и необходимо учитывать все амплитуды высших порядков  $A_m$ .

Функцию Грина неоднородной среды можно также вычислить, используя совсем иной метод. Он применим, например, если распределение показателя преломления обладает аксиальной симметрией и характеризуется дискретным набором волноводных мод [выражение (2.12.17)]. Как мы покажем, в этом случае функция Грина представляема в виде разложения в ряд по соответствующим модам.

В общем случае построение функции Грина основывается на последовательном переборе и учете всевозможных факторов — свободного распространения, дифракции на канонических (диафрагмы, клинья и т. п.) и других гладких препятствиях общего вида, отражения и преломления на границах разрыва  $n(\mathbf{r})$ . Во многих случаях вычисление функции Грина упрощается тем, что источник находится на бесконечности и, следовательно, поле от него можно представить плоскими волнами.

#### 4.2.2. Принцип Гюйгенса

Рассмотрим поле, распространяющееся в *однородной* среде. Объединяя уравнения (4.2.10) и (4.2.7), получаем

$$u(\mathbf{r}) = \oint_S \left[ \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} - u(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right] dS', \quad (4.2.15)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Следовательно, поле можно представить в виде суперпозиции элементарных возбудений

$$du(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left[ \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} + u(\mathbf{r}') \hat{n}_0 \cdot \mathbf{R} \left( ik + \frac{1}{R} \right) \right] dS'. \quad (4.2.16)$$

В случае когда  $Rk \gg 1$ , что обычно имеет место для оптического диапазона, уравнение (4.2.16) принимает вид

$$du(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left[ \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} + ik \hat{n}_0 \cdot \mathbf{R} u(\mathbf{r}') \right] dS'. \quad (4.2.17)$$

Для тех полей  $u$ , которые допускают представление геометрической



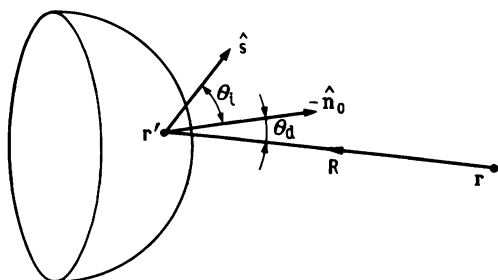


Рис. 4.4. Обозначения, используемые при рассмотрении принципа Гюйгенса.

оптики  $u = A(\mathbf{r})e^{-ikS(\mathbf{r})}$ , можно написать следующее выражение:

$$du(\mathbf{r}) = -iku(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\partial(S-R)}{\partial n_0} dS', \quad (4.2.18)$$

где мы пренебрегли медленным изменением амплитуды  $A(\mathbf{r})$ . Таким образом, величина  $du(\mathbf{r})$  пропорциональна  $u(\mathbf{r}')$  и каждая элементарная поверхность  $dS'$  дает дифрагированное поле, амплитуда которого убывает как  $1/R$  и характеризуется следующей *диаграммой направленности излучения*:

$$\begin{aligned} -\partial(S-R)/\partial n_0 &= -\hat{n}_0 \cdot \hat{s} + \hat{n}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos \theta_i + \cos \theta_d = \\ &= 2 \cos[(\theta_i + \theta_d)/2] \cos[(\theta_i - \theta_d)/2], \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

где  $\theta_i$  — угол между падающим лучом, проходящим через точку  $\mathbf{r}'$ , и внутренней нормалью  $-\hat{n}_0$  к  $S$ , а  $\theta_d$  — угол между направлением  $-\hat{\mathbf{R}}$ , вдоль которого вычисляется дифрагированное поле, и вектором  $-\hat{n}_0$  (рис. 4.4). При этом дифракционный интеграл (4.2.15) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{i}{2\lambda} \iint_S \frac{A(\mathbf{r}')}{R} e^{-ik(R+S)} (\cos \theta_i + \cos \theta_d) dS' \quad (4.2.20)$$

(здесь не следует путать эйконал  $S$  в экспоненте с обозначением поверхности  $S$ ). В частности, когда поверхность  $S$  совпадает с волновым фронтом ( $\theta_i = 0$ ), выражение  $\cos \theta_i + \cos \theta_d$  преобразуется в коэффициент наклона  $1 + \cos \theta_d$ <sup>1)</sup>. Представление поля в виде суперпозиции многих элементарных волн (2.2.17) называется *принципом Гюйгенса*. Рэлей в своей статье для Британской энциклопедии в 1889 г. сформулировал его следующим образом:

“Если изобразить вокруг источника волн идеальную замкнутую поверхность, то результирующее воздействие волн во внешней области можно представить как сложение волн от всех элементов этой поверхности. Волновое движение от каждого из элементов поверхности называется “вторичной волной”, а для находде-

<sup>1)</sup> Угол  $\theta_d$  при этом называют *углом дифракции*. — Прим. перев.

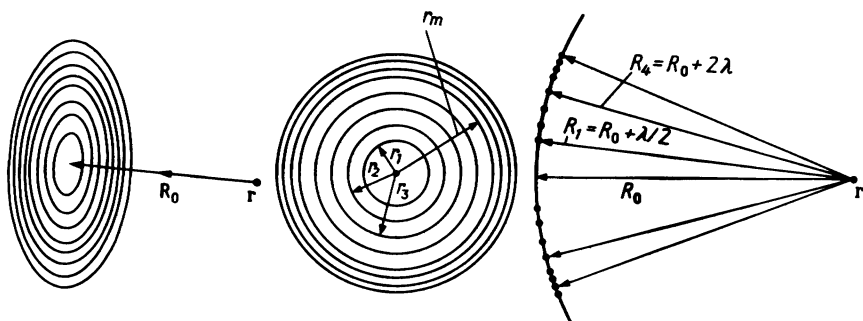


Рис. 4.5. Кольца Френеля при наблюдении из точки  $\Gamma$ , в которой определяется поле.

ния суммарного воздействия в каждой точке нужно учитывать как амплитуды, так и фазы всех компонент...”.

На самом деле можно показать, что для нахождения искомого поля нужно учитывать лишь вклады  $du(\mathbf{r})$  от вполне определенных участков фиксированного волнового фронта. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим сферический волновой фронт  $A$  с радиусом кривизны  $R$ . Его можно разбить на элементарные кольца, называемые *зонами Френеля* (или *Гюйгенса*), которые вырезаются из волнового фронта сферами с центром в точке  $\Gamma$  (рис. 4.5), в которой требуется определить поле  $u(\mathbf{r})$ . Пусть первая из этих сфер радиусом  $R_0$  касательна к поверхности  $A$ , а последующие сферы радиусами  $R_m = R_0 + m\lambda/2$  пересекают волновой фронт  $A$  по окружности радиусом  $R_m \cong [m\lambda R_0 R / (R - R_0)]^{1/2}$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны. Таким образом, волновой фронт  $A$  будет разделен последовательностью колец одинаковой площади, равной приблизительно  $\pi\lambda R_0 R / (R - R_0)$ . Если  $u_m(\mathbf{r})$  — поле от  $m$ -го кольца, то  $u(\mathbf{r})$  можно получить, просуммировав все  $u_m$ . Два последовательных члена этой суммы имеют примерно равные амплитуды, но разные знаки, так как  $e^{-ikR_m} = -e^{-ikR_{m+1}}$ . Из-за такой нейтрализации последовательных членов результирующее поле определяется главным образом слагаемыми низших порядков (малые  $m$ ). Следовательно, лишь участок волнового фронта  $A$  площадью около  $\pi\lambda R R_0 / (R - R_0)$  определяет поле в точке  $\Gamma$ . Ниже эти интуитивные соображения будут сформулированы более строго в связи с асимптотическими вычислениями дифракционных интегралов. Мы покажем также, что тот же результат имеет место и для волновых фронтов более общего вида.

В заключение можно сформулировать качественный вывод о том, что поле  $u(\mathbf{r})$  представимо в виде суперпозиции вторичных волн, приходящих из некоторых участков  $A_q$  волнового фронта, которые окру-

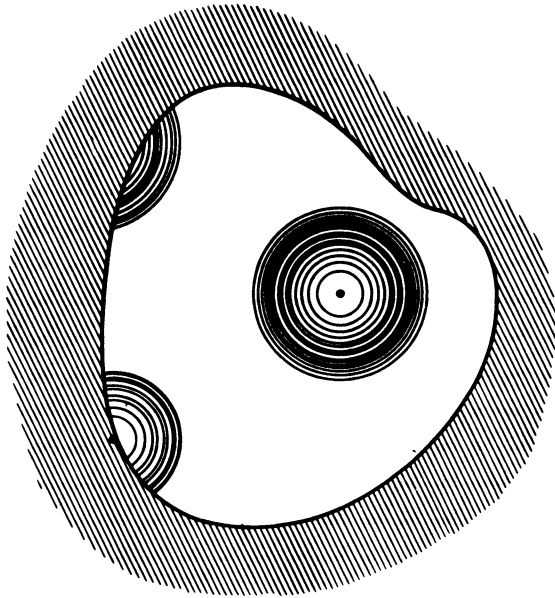


Рис. 4.6. Точки стационарной фазы волнового фронта, дающие вклад в поле. Семейства колец представляют соответствующие зоны Френеля. Конечный размер апертуры приводит либо к нейтрализации, либо к уменьшению вкладов от точек, лежащих у границы.

жают *точки стационарной фазы*  $r_q^*$ . Эти точки получаются при пересечении волнового фронта лучами, проходящими через точку  $r$  (рис. 4.6). При  $\lambda \rightarrow 0$  каждый участок  $A_q$  стягивается к соответствующей стационарной точке, так что ее вклад в  $u(r)$  в полном соответствии с геометрической оптикой оказывается пропорциональным  $u(r_q^*)$ . При конечных значениях  $\lambda$  вклад в  $u(r)$  от  $A_q$  по-прежнему пропорционален  $u(r_q^*)$  при условии, что  $u(r')$  не сильно изменяется на площади, равной приблизительно  $\pi\lambda|r' - r_q^*|$ . Это и есть точный критерий применимости приближения геометрической оптики.

### 4.3. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

#### В ФОРМУЛИРОВКЕ КИРХГОФА — КОТТЛЕРА

В областях с постоянным показателем преломления интеграл Гельмгольца — Кирхгофа может быть представлен в виде (4.2.15). Поскольку это соотношение верно для любой декартовой компоненты поля  $\mathbf{E}$ , в области без источников, окруженной замкнутой поверхностью  $S$ , мы имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_S \left[ \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{\partial n_0} - \mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right] dS'. \quad (4.3.1)$$

Этот интеграл можно записать в другом эквивалентном виде, выразив подинтегральное выражение только через величины полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . А именно, используя уравнения Максвелла и простые векторные соотношения, можно показать, что для замкнутой поверхности

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \oint_S \left[ -i\zeta k (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{E}) \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}) \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS'. \quad (4.3.2)$$

Аналогично для магнитного поля получаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = - \oint_S \left[ \frac{ik}{\zeta} (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{E}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{H}) \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS' \quad (4.3.3)$$

Эти соотношения остаются справедливыми и для многосвязных областей. Например,  $S$  может состоять из двух или более замкнутых поверхностей, расположенных внутри некоторой общей внешней поверхности (рис. 4.2).

Для вычисления поля, дифрагированного на экране, можно предположить (по аналогии с принципом Кирхгофа в скалярной теории дифракции), что истинное поле на диафрагме (отверстии) совпадает с невозмущенным падающим полем, а непосредственно за экраном поле равно нулю. В соответствии с этим можно попытаться выразить дифрагированное поле с помощью интегральных представлений (4.3.2) и (4.3.3), ограничивая область интегрирования поверхностью апертуры  $\bar{A}$  и используя в подинтегральном выражении лишь поля  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{H}_i$  падающих лучей. К сожалению, когда точка наблюдения близка к диафрагме, результат, полученный таким образом, существенно отличается от истинного дифрагированного поля. Эту несогласованность можно преодолеть, добавляя к поверхностному интегралу контурный, т. е. записывая интегралы следующим образом [10]:

$$\mathbf{E} = - \iint_{\bar{A}} \left[ -i\zeta k (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}_i) G + (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{E}_i) \times \nabla' G + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}_i) \nabla' G \right] dS' + i \frac{\zeta}{k} \int_{\partial \bar{A}} \mathbf{H}_i \cdot \hat{\mathbf{l}} \nabla' G dl, \quad (4.3.4)$$

$$\mathbf{H} = - \iint_{\bar{A}} \left[ i \frac{k}{\zeta} (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{E}_i) G + (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}_i) \times \nabla' G + (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{H}_i) \nabla' G \right] dS' - \frac{i}{k\zeta} \int_{\partial \bar{A}} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{l}} \nabla' G dl, \quad (4.3.5)$$

где  $\hat{l}$  — единичный вектор, касательный к элементу контура диафрагмы  $dl$  (край диафрагмы обозначается  $\partial\bar{A}$ ). Обход контура диафрагмы осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из точки, в которой определяется поле. Как видно из полученных соотношений, скалярная теория Кирхгофа для нахождения декартовых компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, неприменима. Однако, как мы покажем в разд. 4.13, контурным интегралом можно пренебречь, если точка наблюдения находится на расстоянии многих длин волн от края диафрагмы.

#### 4.4. УСЛОВИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА НА ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Формулируя после вывода соотношения (4.2.20) принцип Гюйгенса, мы неявно использовали одно предположение. А именно, предполагалось, что поле в точке наблюдения образуется вторичными волнами, исходящими лишь с поверхности волнового фронта. При этом мы пренебрегли вторичными источниками на бесконечно удаленной поверхности, которая вместе с волновым фронтом должна образовывать замкнутую поверхность, фигурирующую в интегральной теореме Гельмгольца — Кирхгофа. Теперь мы покажем, что для весьма общего класса полей поверхностью на бесконечности действительно можно пренебречь. С этой целью рассмотрим замкнутую поверхность, состоящую из ограниченного почти плоского участка (не обязательно совпадающего с волновым фронтом) и части сферы  $\bar{A}_S$  с центром в точке наблюдения  $\mathbf{r}$  и радиусом  $R \gg \lambda$  (рис. 4.7). Учет поверхности  $\bar{A}_S$  приводит к следующему вкладу в  $u(\mathbf{r})$  [выражение (4.2.16)]:

$$\iint_{A_S} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left[ \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} + ik\hat{n}_0 \cdot \mathbf{R}u(\mathbf{r}') \right] dS' = \frac{R}{4\pi} e^{-ikR} \iint_{A_S} \left( \frac{\partial u}{\partial R} + iku \right) d\Omega, \quad (4.4.1)$$

где  $d\Omega = dS'/(4\pi R^2)$  — элемент телесного угла.

Если источники поля находятся с противоположной по отношению к  $\bar{A}_S$  стороны плоского участка, то пределы интегрирования на по-

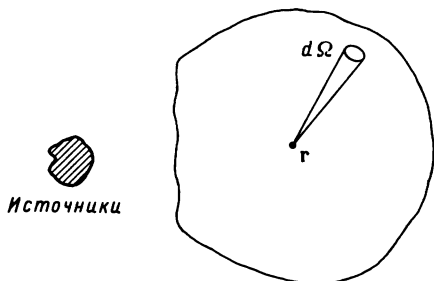


Рис. 4.7. К выводу излучательного условия Зоммерфельда.

верхности  $\bar{A}_S$  можно устремить к бесконечности. Поэтому остается оценить асимптотическое поведение интеграла (4.4.1) при  $R \rightarrow \infty$ . Этот интеграл стремится к нулю, если выполнено условие

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[(\partial u / \partial R) + iku] = 0, \quad (4.4.2)$$

которое называется *излучательным условием*, или *условием Зоммерфельда на поле излучения* [11].

Поля, удовлетворяющие условию (4.4.2), называются *полями излучения*. Для них интеграл Гельмгольца — Кирхгофа можно вычислять по бесконечной *незамкнутой* поверхности  $S$ , отделяющей точки наблюдения от источников. Условие (4.4.2) выполняется для полей, имеющих следующее асимптотическое поведение:

$$u(\mathbf{r}) \propto f(\hat{\mathbf{R}}) \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad R \rightarrow \infty, \quad (4.4.3)$$

которое соответствует расходящейся сферической волне с диаграммой направленности  $f(\hat{\mathbf{R}})$ . Однако во многих случаях довольно трудно определить из интегрального выражения, удовлетворяет ли поле условию Зоммерфельда. Можно предложить следующий практический совет, основанный на приведенном выше условии для расходящейся сферической волны. Будем считать, что поле удовлетворяет соотношению (4.4.2) при условии, что замена  $k \rightarrow k - i\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая положительная величина, приводит к равенству нулю интеграла при  $R \rightarrow \infty$ .

#### 4.5. ДИФРАКЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РЭЛЕЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость  $\Pi$  отделяет область I, содержащую источники, от однородной области II, в которой вычисляется поле. В этом случае функцию Грина  $G$  удобно выбирать в таком виде, чтобы либо  $G$ , либо  $\partial G / \partial n_0$  были равны нулю в плоскости  $\Pi$ . При этом интеграл Гельмгольца — Кирхгофа принимает более простой вид, поскольку одно из двух слагаемых подынтегрального выражения исчезает. Нетрудно построить необходимую функцию Грина, если к мнимому источнику в точке  $\mathbf{r}$  добавить другой мнимый источник той же интенсивности с тем же или с противоположным знаком, расположенный в точке  $\mathbf{r}_S$ , представляющей собой зеркальное изображение точки  $\mathbf{r}$  относительно плоскости  $\Pi$ :

$$G_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \pm \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}'|}. \quad (4.5.1)$$

Нетрудно показать, что при  $\mathbf{r}'$  на поверхности  $\Pi$

$$\partial G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / \partial n_0 = G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (4.5.2)$$

Используя функцию  $G_+$ , *дифракционный интеграл* (4.2.10) можно записать в виде

$$u(\mathbf{r}) = \iint_{\Pi} G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n_0} dx' dy' = -2 \iint_{\Pi} \frac{\partial u(x', y', z')}{\partial z'} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy', \quad (4.5.3)$$

где ось  $z'$  перпендикулярна  $\Pi$  и направлена внутрь области  $\Pi$ , а  $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ . Аналогично если использовать функцию  $G_-$ , то

$$u(\mathbf{r}) = - \iint_{\Pi} \frac{\partial G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_0} u(\mathbf{r}') dx' dy' = 2 \iint_{\Pi} \left[ u(x', y', z') \left( ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \cos \theta \right] dx' dy', \quad (4.5.4)$$

где  $\theta (< \pi/2)$  — угол между векторами  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$  и  $\hat{\mathbf{n}}_0$ . Обычно бывает удобно заменить общее выражение для  $u$  (4.2.14) либо выражением (4.5.3), либо (4.5.4).

*Пример. Отверстие в плоском экране.* В приближении геометрической оптики поле, отличное от нуля на части плоскости (на отверстии), с помощью выражения (4.5.4) можно записать в виде

$$u(\mathbf{r}) = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ P(x', y') A(x', y', z') \left( ik + \frac{1}{R} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp[-ikR - ikS(x', y', z')]}{4\pi R} \cos \theta \right] dx' dy', \quad (4.5.5)$$

где  $P(x', y')$  (*функция зрачка*) равна единице на поверхности отверстия и нулю для всех остальных  $x', y'$ . Можно показать, что главный вклад в этот интеграл дают точка  $P^*$ , в которой производная  $|\partial(S - R)/\partial n_0|$  максимальна [см. уравнение (4.2.18)], и края отверстия.

В параксиальном приближении ( $\cos \theta \approx 1$ ) из (4.5.5) следует, что поле на плоскости  $z = \text{const}$  можно сравнить с выходным сигналом линейной системы, характеризуемой *импульсным откликом*  $K(x', y'; x, y, z)$  [поле в плоскости  $z = \text{const}$ , соответствующее полю  $\delta$ -источника  $\delta(x - x')\delta(y - y')$  на поверхности отверстия (ср. с разд. 4.15)]. Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$K(x', y'; x, y, z) = iP(x', y') \exp\{-ik[(x - x')^2 + (y - y')^2]/(2d) - ikd\}/(\lambda d).$$

где  $d \equiv |z - z'| \gg 1/k$ .

$$(4.5.6)$$

#### 4.6. ПРИНЦИП БАБИНЕ

Рассмотрим два случая дифракции на плоских экранах. Пусть задан некоторый экран. Заменой отверстий на непроницаемые участки и наоборот можно получить так называемый *дополнительный экран*. Если  $u_1$  и  $u_2$  — дифрагированные поля на этих двух экранах, то имеет место следующее соотношение (*принцип Бабине*) [12]:

$$u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad (4.6.1)$$

где  $u(\mathbf{r})$  — поле в отсутствие экрана. Соотношение (4.6.1) непосредственно следует из (4.5.4), если интегрирование в этом соотношении выполнить по всей плоскости. Остается лишь предположить, что поля  $u_1(\mathbf{r}')$  и  $u_2(\mathbf{r}')$  на отверстиях первого и второго экрана совпадают с полем  $u(\mathbf{r}')$ , которое имеет место в отсутствие экрана. Вообще говоря, принцип Бабине выполняется лишь приближенно, так как  $u_1(\mathbf{r}')$  и  $u_2(\mathbf{r}')$  не равны  $u(\mathbf{r}')$ , но нарушение (4.6.1) существенно лишь вблизи границ диафрагм. Тем не менее точное доказательство принципа Бабине может быть получено для идеально проводящего плоского экрана (см. с. 559 в книге Борна и Вольфа [11], указанной в литературе к гл. 1).

#### 4.7. ДИФРАКЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕЙ

В некоторых случаях электромагнитное поле можно записать в виде

$$u(x, y, z) = \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}y]u(x, z). \quad (4.7.1)$$

При этом функция  $u$  удовлетворяет *двумерному уравнению Гельмгольца*

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial z^2 + \chi^2 u = 0, \quad (4.7.2)$$

что следует из уравнения (1.1.12). Поля  $u(x, y, z)$  принято называть *цилиндрическими волнами*.

Повторяя те же выкладки, что и при выводе (4.2.10), нетрудно показать, что

$$u(\rho) = \oint_C \left[ G(\rho', \rho) \frac{\partial u(\rho')}{\partial n_0} - u(\rho') \frac{\partial G(\rho', \rho)}{\partial n_0} \right] ds', \quad (4.7.3)$$

где  $C$  — замкнутая кривая, охватывающая не содержащий источников участок плоскости  $y = \text{const}$ , а  $\rho \equiv \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{z}}z$ . При этом *двумерная функция Грина* удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 / \partial x'^2 + \partial^2 / \partial z'^2 + \chi^2)G(\rho', \rho) = -\delta(x - x')\delta(z - z'). \quad (4.7.4)$$

В наиболее простом виде функция Грина, удовлетворяющая условию излучения на бесконечности и имеющая сингулярность только при



$\rho' = \rho$ , записывается следующим образом:

$$G(\rho, \rho') = G(\rho', \rho) = (i/4)H_0^{(2)}(\chi R), \quad R \equiv \rho' - \rho, \quad (4.7.5)$$

где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка. Она имеет следующее асимптотическое представление:

$$H_0^{(2)}(\chi R) \cong [2/(\pi\chi R)]^{1/2} e^{-i(\chi R - \pi/4)}, \quad R\chi \rightarrow \infty. \quad (4.7.6)$$

Если цилиндрическая волна удовлетворяет условию Зоммерфельда (4.4.2), то для рассматриваемого плоского случая применимы те же рассуждения, что и в разд. 4.4. При этом мы имеем

$$u(\rho) = \frac{i}{4} \int_{C_\infty} \left[ H_0^{(2)}(\chi R) \frac{\partial u}{\partial n_0} - u \frac{\partial H_0^{(2)}(\chi R)}{\partial n_0} \right] ds'; \quad (4.7.7)$$

здесь  $C_\infty$  — бесконечно удаленный контур, отделяющий точку наблюдения  $\rho$  от источников. Аналогами соотношений (4.5.3) и (4.5.4) здесь являются следующие:

$$\begin{aligned} u(\rho) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x') H_0^{(2)}(\chi R) \frac{\partial u(x', z')}{\partial z'} dx' = \\ &= -\frac{i\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x') u(x', 0) \frac{dH_0^{(2)}(\chi R)}{d(\chi R)} \cos \theta dx', \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

где  $P(x')$  — аналог функции зрачка (см. разд. 4.5), а  $\theta (< \pi/2)$  — угол между векторами  $-\mathbf{R}$  и  $\hat{\mathbf{z}}'$ . Здесь  $\hat{\mathbf{z}}'$  — нормаль к прямой  $z' = 0$ , отделяющей область наблюдения  $z' \geq 0$  от источников, расположенных при  $z' < 0$ . При  $R \gg 1/\chi$  можно использовать приближение (4.7.6) для функции  $H_0^{(2)}$ . При этом получаем

$$u(\rho) \cong -\left(\frac{\chi}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x') u(x', 0) \frac{e^{-i\chi R}}{R^{1/2}} \cos \theta dx'. \quad (4.7.9)$$

#### 4.8. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ПЛОСКИМ ВОЛНАМ

Рассмотрим теперь задачу о разложении поля по плоским волнам в однородном полупространстве, ограниченном плоскостью, на которой это поле задано [13].

Вычислим сначала двумерное фурье-преобразование функции  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , рассматриваемой как функция от  $x'$  и  $y'$  при фиксированных значениях  $z'$ ,  $x$ ,  $y$  и  $z$  при  $z > z'$ . Заметим для этого, что выражение (4.5.3) можно переписать в эквивалентном виде

$$u(\mathbf{r}) = -2 \iint_{\Pi} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial u(x', y', z')}{\partial z'} dx' dy', \quad (4.8.1)$$

где  $\Pi$  — это плоскость  $z' = \text{const}$ , а область пространства без источ-

ников расположена при  $z > z'$ . Применим теперь выражение (4.8.1) к плоской волне

$$\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z), \quad (4.8.2)$$

где  $k_x$  и  $k_y$  — вещественные величины. При этом удовлетворяется следующее соотношение:

$$k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} \quad (4.8.3)$$

( $k_z$  — вещественная положительная или мнимая отрицательная величина). Соотношение (4.8.3) означает, что плоская волна (4.8.2) распространяется в сторону увеличения  $z$ , что требуется для выполнения (4.8.1) (см. разд. 4.4). Следовательно, мы можем написать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z) &= 2ik_z \exp(-ik_z z') \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x x' - ik_y y') G\{[(x - x')^2 + \\ &+ (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}\} dx' dy' = \\ &= 2ik_z \exp(-ik_z z') F[G(x', y'); -k_x, -k_y], \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

где  $F$  — фурье-образ функции  $G$ :

$$F[G(x', y'); k_x, k_y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(x', y') \exp(ik_x x' + ik_y y') dx' dy'; \quad (4.8.5)$$

здесь для простоты мы не стали писать переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $z'$ , которые не меняют своих значений при преобразованиях. Таким образом, имеем

$$F[G(x', y'); k_x, k_y] = -\frac{i}{2k_z} \exp[ik_x x + ik_y y - ik_z(z - z')]. \quad (4.8.6)$$

Поскольку операции фурье-преобразования по переменным  $x'$  и  $y'$  и дифференцирования по  $z'$  независимы друг от друга, можно сразу написать соотношение для фурье-образа производной  $\partial G/\partial z'$ :

$$F\left[\frac{\partial G(x', y', z')}{\partial z'}; k_x, k_y\right] = \frac{1}{2} \exp[ik_x x + ik_y y - ik_z(z - z')]. \quad (4.8.7)$$

Используя теперь обратное преобразование Фурье, мы имеем

$$\frac{\partial G}{\partial z'} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_x(x' - x) - ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z)] dk_x dk_y, \quad (4.8.8)$$

Отсюда с помощью соотношения (4.5.4) приходим к следующему вы-

ражённю:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_x(x' - x) - ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z)] \times \\ \times u(x', y', z') dx' dy' dk_x dk_y, \quad (4.8.9)$$

Определив фурье-образ функции  $u(x, y, z')$

$$F'[u(x', y', z'); k_x, k_y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x', y', z') \exp(ik_x x' + ik_y y') dx' dy', \quad (4.8.10)$$

выражение (4.8.9) можно переписать в виде

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[+ik_x x + ik_y y - ik_z(z - z')] \times \\ \times F[u(x', y', z'); -k_x, -k_y] dk_x dk_y = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x x - ik_y y) F[u(x', y', z'); -k_x, -k_y] dk_x dk_y, \quad (4.8.11)$$

откуда в свою очередь следует, что

$$F[u(x', y', z); k_x, k_y] \equiv \exp[-ik_z(z - z')] F[u(x', y', z'); k_x, k_y]. \quad (4.8.12)$$

Соотношение (4.8.11) и есть конечное представление в виде разложения по плоским волнам полей излучения наиболее общего вида в полупространстве  $z > z'$ . Заметим, что существование затухающих волн учитывают с помощью мнимых отрицательных значений  $k_z$ , когда  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ . Соответствующие волны распространяются перпендикулярно оси  $z$  и затухают в направлении положительных  $z$ .

#### 4.9. УГЛОВОЙ СПЕКТР

Во многих случаях удобно записать компоненты  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  в виде

$$k_x = k \cos \beta \sin \gamma, \quad (4.9.1a)$$

$$k_y = k \cos \beta \cos \gamma, \quad (4.9.1b)$$

$$k_z = k \sin \beta, \quad (4.9.1в)$$

где  $\beta$  изменяется от  $0 - i\infty$  до  $\pi + i\infty$  (контур Зоммерфельда), а угол  $\gamma$  от  $0$  до  $\pi$  (рис. 4.8). Используя эти определения, выражение (4.8.11) можно переписать в виде

$$u(x, y, z) = \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} d\beta \int_0^\pi d\gamma S(\beta, \gamma) \exp(-ikr \cos \theta), \quad (4.9.2)$$

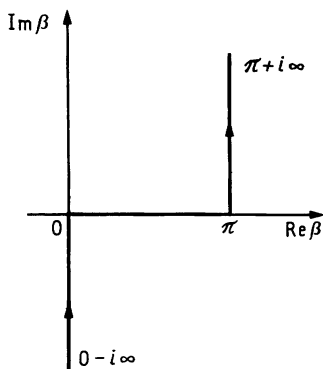


Рис. 4.8. Контур интегрирования Зоммерфельда.

где  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , а  $\theta$  — угол (возможно, комплексный) между векторами  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  и  $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ . Если  $\delta$  и  $\phi$  — углы соответственно между  $\mathbf{r}$  и  $\hat{\mathbf{z}}$  и между  $\hat{\mathbf{x}}$  и  $x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ , то  $\cos \theta = \cos \beta \sin \delta \cos(\phi - \gamma) + \sin \beta \cos \delta$  и мы имеем

$$S(\beta, \gamma) = e^{ik_z z'} F[u(x', y', z'); k_x, k_y] \sin(2\beta)/2\lambda^2. \quad (4.9.3)$$

Функция  $S(\beta, \gamma)$  называется *угловым спектром* и обладает важным свойством, а именно независимостью от выбора опорной плоскости  $z = z'$  [см. (4.8.12)]. Для мнимых значений  $\beta$  функция  $S$  определяет затухающую часть излучения. Мы увидим, что при  $kr \rightarrow \infty$  интеграл в (4.9.2) можно вычислить *методом стационарной фазы* [см. разд. 5.11 и уравнение (5.11.7)], что приводит к следующему асимптотическому выражению:

$$u(x, y, z) \underset{kr \rightarrow \infty}{\propto} -2\pi i \frac{e^{-ikr}}{kr} S(\beta, \gamma)_{\theta=0}. \quad (4.9.4)$$

Отсюда следует, что при движении точки наблюдения по сфере большого радиуса  $r$  с центром в начале координат величина поля пропорциональна  $S(\beta, \gamma)$ , если вектор  $\mathbf{k}(\beta, \gamma)$  направлен вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Именно поэтому функцию  $S$  называют *угловым спектром*.

В частности, для полей, инвариантных относительно вращения вокруг оси  $z$ , угловой спектр  $S(\beta, \gamma)$  не зависит от угла  $\gamma$  и не меняется при замене угла  $\beta$  на  $\pi - \beta$ . Поэтому  $S(\beta, \gamma) \equiv S(\beta) = S(\pi - \beta)$ . Как следствие, выражение (4.9.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(r, \delta) &= 2 \int_{0-i\infty}^{\pi/2} S(\beta) d\beta \int_0^{\pi} \exp\{-ikr[\cos \beta \sin \delta \cos(\phi - \gamma) + \sin \beta \cos \delta]\} d\gamma = \\ &= 2\pi \int_{0-i\infty}^{\pi/2} S(\beta) J_0(kr \cos \beta \sin \delta) \exp(-ikr \sin \beta \cos \delta) d\beta. \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

#### 4.9.1. Угловой спектр двумерных волн

Рассматривая двумерные волны, определяемые выражением (4.7.1), нетрудно показать, что из соотношений (4.8.11), (4.9.2) и (4.9.3) следует, что

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_x x - ik_z(z - z')] F[u(x', z'); k_x] dk_x = \\ &= \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \exp[-i\chi\rho \cos(\beta - \phi)] S(\beta) d\beta, \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

где  $x = \rho \cos \phi$ ,  $z = \rho \sin \phi$ ,

$$F[u(x', z'); k_x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_x x') u(x', z') dx', \quad (4.9.7)$$

$$S(\beta) = \exp(i\chi z' \sin \beta) F[u(x', z'); k_x] \frac{\chi}{2\pi} \sin \beta. \quad (4.9.8)$$

При выводе соотношения (4.9.6) мы положили  $k_x = \chi \cos \beta$ ,  $k_z = \chi \sin \beta$ , а затухание излучения (вдоль оси  $z$ ) учли с помощью мнимых значений  $\beta$ .

*Пример. Гауссов угловой спектр.* Рассмотрим случай, когда

$$S(\beta) = \exp[-(\beta - \theta)^2 / \sigma^2]. \quad (4.9.9)$$

При этом получаем

$$F[u(x', z'); k_x] = \frac{2\pi}{\chi \sin \beta} \exp\left[-\frac{(\beta - \theta)^2}{\sigma^2} - i\chi z' \sin \beta\right], \quad (4.9.10)$$

$$u(\rho, \phi) = \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \exp\left[-i\chi\rho \cos(\beta - \phi) - \frac{(\beta - \theta)^2}{\sigma^2}\right] d\beta. \quad (4.9.11)$$

Этот интеграл нельзя вычислить в замкнутой форме. Однако *метод наибо́льшего спуска* (см. разд. 5.6) позволяет оценить его в пределе  $\chi\rho \rightarrow \infty$ .

#### 4.9.2. Угловой спектр в комплексной области

Разложение с помощью углового спектра не ограничивается лишь случаем, когда поле сосредоточено в полупространстве. В разд. 6.2 мы покажем [выражение(6.2.2)], что при дифракции на клине поле может быть представлено двумя интегралами по угловому спектру, контуры интегрирования которых представляют из себя два контура Зоммерфельда, сдвинутых относительно друг друга на  $2\pi$ . Следовательно, рассмотренные выше соотношения можно обобщить, используя интеграл

$$I = \int_{\Gamma} S(\beta) \exp[-i\chi\rho \cos(\beta - \phi)] d\beta, \quad (4.9.12)$$

где  $\Gamma$  — произвольный и в общем случае комплексный контур интегрирования. Выражение (4.9.12) описывает цилиндрическую волну в виде суперпозиции плоских волн с амплитудой  $S(\beta)$  и волновым вектором  $\mathbf{k} = [\chi \cos \beta, (k^2 - \chi^2)^{1/2}, \chi \sin \beta]$ . У функции  $S(\beta)$  могут быть полюсы и точки ветвления, а в тех случаях, когда она периодична и ее период кратен  $2\pi$ , контур интегрирования  $\Gamma$  может быть сдвинут на величину периода без изменения значения интеграла.

Можно найти такие контуры интегрирования, для которых выражение (4.9.12) описывает физически возможные поля, не имеющие расходимости при  $\rho \rightarrow \infty$ . Для этого запишем величину  $\beta$  в виде  $\beta = \beta' + i\beta''$ . При этом зависимость от  $\rho$  показателя экспоненты в подынтегральном выражении (4.9.2) запишется следующим образом:

$$-i\chi\rho \cos(\beta' + i\beta'' - \phi) = -i\chi\rho \cos(\beta' - \phi) \operatorname{ch} \beta'' - \chi\rho \sin(\beta' - \phi) \operatorname{sh} \beta''. \quad (4.9.13)$$

Следовательно, интеграл  $I$  остается конечным при условии, что  $\Gamma$  включает в себя лишь те комплексные значения  $\beta$ , которые принадлежат заштрихованным на рис. 4.9 областям, определяемым неравенствами

$$\begin{aligned} \beta'' \leq 0, \quad 2\pi + 2n\pi \geq \beta' - \phi \geq \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \beta'' \geq 0, \quad \pi + 2n\pi \geq \beta' - \phi \geq 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.9.14)$$

Вообще говоря, выбранный контур удовлетворяет этим неравенствам лишь для некоторой области значений углов наблюдения  $\phi$ , поскольку границы описываемых физических областей сами зависят от  $\phi$ . Например, контур Зоммерфельда  $(0 - i\infty, \pi + i\infty)$  удовлетворяет неравенствам (4.9.14) в области  $0 \leq \phi \leq \pi$  и, следовательно, его можно использовать для определения поля в области  $z = \rho \sin \phi \geq 0$ .

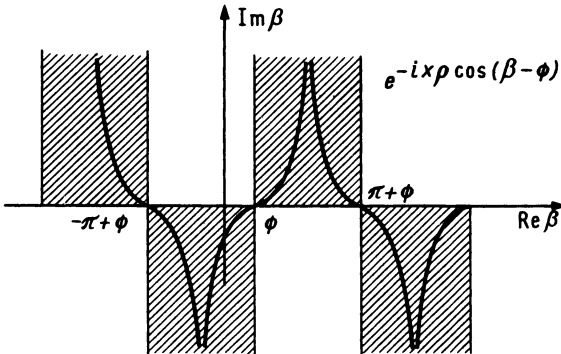


Рис. 4.9. Области комплексной  $\beta$ -плоскости, в которых функция  $\exp[-i\chi\rho \cos(\beta - \phi)]$  остается ограниченной при  $\chi\rho \rightarrow \infty$ . Сплошные кривые — контуры наивысшего спуска (см. разд. 5.6 в гл. 5).

Для вычисления интегралов типа (4.9.12) часто используется метод *наибыстрейшего спуска* (см. разд. 5.6). Для этого интегрирование необходимо проводить вдоль *контура наибоыстрейшего спуска* (КНС), который получают посредством непрерывного преобразования первоначально выбранного контура (например, контура Зоммерфельда) в КНС. Точнее говоря, мы имеем [см. выражение (5.6.4)]

$$I = \left( \int_{\text{КНС}} + \int_{\Gamma_B} \right) S(\beta) \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2} y - i\chi\rho \cos(\beta - \phi)] d\beta + \sum_q r_q \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2} y - i\chi\rho \cos(\beta_q - \phi)]. \quad (4.9.15)$$

Здесь  $\Gamma_B$  — контур, окружающий точки ветвления (если таковые имеются) функции  $S$ , расположенные между  $\Gamma$  и КНС, а  $r_q$  — значение  $q$ -го вычета функции  $S$  (см. рис. 5.16):

$$r_q = 2\pi i \lim_{\beta \rightarrow \beta_q} S(\beta)(\beta - \beta_q), \quad (4.9.16)$$

где  $\beta_q$  —  $q$ -й полюс функции  $S$  в области между  $\Gamma$  и КНС. Суммирование в (4.9.15) проводится по всем полюсам, расположенным также между  $\Gamma$  и КНС.

В следующей главе мы покажем, что интеграл по КНС в общем случае убывает как  $1/\rho^{1/2}$ , т. е. описывает цилиндрическую волну с зависящим от  $\phi$  распределением интенсивности поля в дальней зоне [см. (5.68)].

### 4.9.3. Полюсные сингулярности

Предположим, что плоскость  $z = 0$  частично освещается излучением, которое записывается в виде

$$u(x, y, z = 0) = U(x) \exp(-ikx \cos \phi_0), \quad (4.9.17)$$

где  $U(x)$  — ступенчатая функция [ $U(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $U(x) = 1$  при  $x > 0$ ], а  $\phi_0$  — угол с малой мнимой частью ( $\text{Im} \cos \phi_0 < 0$ ). В этом случае поле не зависит от  $y$ , т. е.  $k = \chi$ . Из выражений (4.9.7) и (4.9.8) получаем соответственно

$$F[u(x', 0); k_x] = \int_0^\infty \exp[i(k_x - k \cos \phi_0)x'] dx' = \frac{i}{k_x - k \cos \phi_0} = \frac{i}{k} \frac{1}{\cos \beta - \cos \phi_0}, \quad (4.9.18)$$

$$S(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sin \beta}{\cos \phi_0 - \cos \beta}. \quad (4.9.19)$$

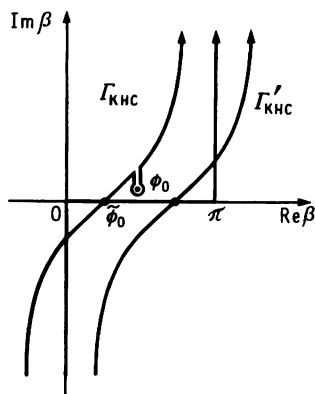


Рис. 4.10. Контуры наибыстрейшего спуска (КНС) в присутствии комплексного полюса в точке  $\phi_0$  [см. выражение (4.9.20)].

В свою очередь из (4.9.12) и (4.9.15) имеем

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{\sin \beta}{\cos \phi_0 - \cos \beta} \exp[-ik\rho \cos(\beta - \phi)] d\beta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{SDP}} \frac{\sin \beta}{\cos \phi_0 - \cos \beta} \exp[-ik\rho \cos(\beta - \phi)] d\beta + \\
 &\quad + \exp[-ik\rho \cos(\phi_0 - \phi)] U(-\phi + \tilde{\phi}_0), \quad (4.9.20)
 \end{aligned}$$

где КНС обозначен на рис. 4.10 толстой линией, а  $\tilde{\phi}_0$  — точка пересечения КНС с осью  $\text{Re } \beta$ , причем КНС проходит через точку  $\phi_0$  в комплексной плоскости. Последний член в выражении (4.9.20) представляет собой плоскую волну в угловом секторе, границы которого заданы ступенчатой функцией  $U(x)$ , т. е. определяются условием  $0 \leq \phi \leq \tilde{\phi}_0$ . Эта волна разрывна при  $\phi = \tilde{\phi}_0$ , что указывает на существование границы раздела между освещенной зоной (см. разд. 2.12. [в] и тенью. Полупрямая  $\phi = \tilde{\phi}_0$  представляет собой типичный пример *границы тени*. Рассмотренный случай доказывает существование соответствия между полюсами углового спектра и границей тени в произвольном поле (см. разд. 5.6.1).

#### 4.9.4. Точки ветвления

Рассмотрим теперь случай, когда не зависящая от координаты  $y$  волна отражается от плоскости  $z = 0$ , разделяющей две диэлектрические среды, в которых нет потерь (рис. 4.11). Пусть единственный линейный источник света параллелен оси  $y$  и расположен вдоль линии с координатами  $x = x_S$  и  $z = z_S > 0$ . В этом случае начальное поле  $u_i(\rho)$  совпадает с функцией Грина  $G(\rho, \rho_S)$  [ $\rho_S = (x_S, z_S)$ ], так что по аналогии с выражением (4.8.6) для двумерного случая можно написать сле-



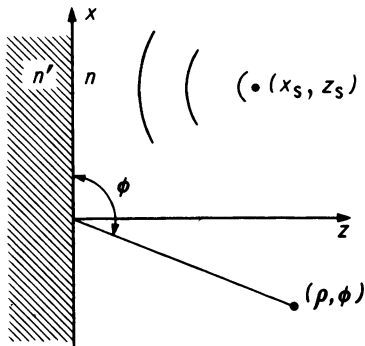


Рис. 4.11. К задаче об отражении плоской волны на границе раздела двух диэлектрических сред.

дующее выражение:

$$F[u_i(x', 0); k_x] = (-i/2k_z) \exp(ik_x x_s - ik_z z_s) = (-i/2k \sin \beta) \exp[-ik(-x_s \cos \beta + z_s \sin \beta)], \quad (4.9.21)$$

где использовано соотношение (4.9.8) и равенство  $k = \chi$ .

Заметим теперь, что отраженная волна, распространяющаяся с данным значением  $k_x$ , может быть получена, если выражение для начальной падающей волны умножить на коэффициент отражения  $r(k_x)$ . Следовательно, используя выражение (4.9.5), полное отраженное поле  $u_r(x, z)$  можно записать в виде

$$u_r(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x x - ik_z z) r(k_x) F[u_i(x, 0); k_x] dk_x = \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \exp[-ik\rho \cos(\beta - \phi)] S_i(\beta) r(k_x) d\beta, \quad (4.9.22)$$

где  $k_x = k \cos \beta$ , а  $S_i$  относится к падающей волне, т. е.

$$S_i(\beta) = F[u_i(x, 0); k_x] (k/2\pi) \sin \beta. \quad (4.9.23)$$

Если источником поля является электрический ток, текущий параллельно оси  $y$ , то электрическое поле направлено также вдоль  $y$ , так что можно положить  $u(x, z) = E_y(x, z)$ , а коэффициент отражения в выражении (4.9.22) относится к ТЕ-волне [см. уравнение (3.8.2)]. Таким образом, коэффициент отражения  $r_s$  запишется в виде

$$r_s = [\cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}] / [\cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}], \quad (4.9.24)$$

где  $\theta$  — угол падения компоненты плоской волны, направленной вдоль  $\hat{x}k_x + \hat{z}k_z$ , а  $n$  равно отношению показателя преломления  $n_2$  в полупространстве  $z < 0$  к показателю преломления  $n_1$  в полупространстве  $z > 0$ . Подставляя выражения (4.9.23) и (4.9.24) в (4.9.22) и

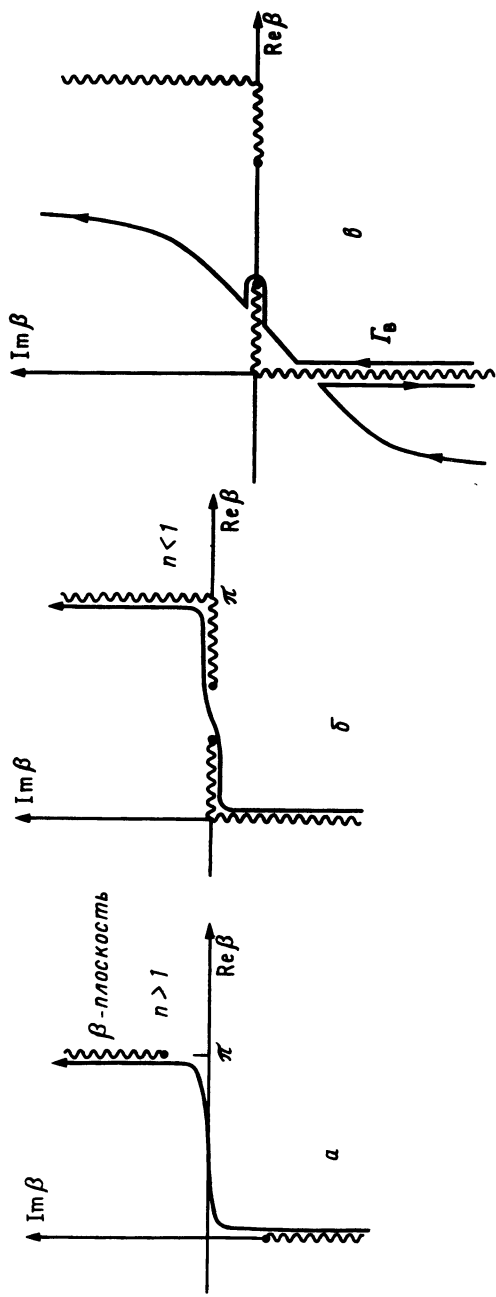


Рис. 4.12. *а* и *б* — разрезы и контуры Зоммерфельда в случае, когда поле, отраженное от разделяющей два диэлектрика плоской границы, освещаемой цилиндрической волной, представляется в виде углового спектра; *в* — контур наибоыстрейшего спуска, полученный изменением контура Зоммерфельда (рис. 4.8) и частично окружающий ( $\Gamma_v$ ) разрез, изображенный волнистой линией.

используя (4.9.21), нетрудно получить следующее выражение:

$$u_r(\rho, \phi) = \frac{-i}{4\pi} \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{\sin \beta - (n^2 - \cos^2 \beta)^{1/2}}{\sin \beta + (n^2 - \cos^2 \beta)^{1/2}} \times \\ \times \exp\{-ik[-x_s \cos \beta + z_s \sin \beta + \rho \cos(\beta - \phi)]\} d\beta, \quad (4.9.25)$$

где мы использовали соотношения  $\cos \theta = \sin \beta$  и  $\sin^2 \theta = \cos^2 \beta$ .

Подынтегральное выражение в (4.9.25) имеет точки ветвления, определяемые из уравнения  $\cos \beta = \pm n$ , причем при  $n > 1$  существует одна точка ветвления на мнимой оси, а при  $n < 1$  две точки на вещественной оси (рис. 4.12, а, б). Таким образом, если требуется преобразовать контур Зоммерфельда к КНС, то необходимо учесть вклады от обхода разрезов, выходящих из точек ветвления (волнистые линии на рис. 4.12). На рис. 4.12, в представлена одна из возможных модификаций контура Зоммерфельда, который включает в себя контур  $\Gamma_B$ , частично окружающий разрез (см. разд. 5.6.2).

Два примера, рассмотренных выше, позволяют сделать интересные выводы. Во-первых, если поле состоит из плоских волн в некоторых ограниченных областях пространства, то угловой спектр  $S(\beta)$  имеет ряд полюсов на  $\beta$ -плоскости. Во-вторых, наличие поверхностей разрыва в среде приводит к появлению точек ветвления и полюсов у функции  $S(\beta)$ , которые можно связать с существованием боковых волн и волн утечки, как мы покажем в разд. 5.7.1.

## 4.10. ДИФРАКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА

### 4.10.1. Формула Френеля

Рассмотрим случай, когда угловой спектр поля имеет ограниченную полосу. Точнее говоря, предположим, что  $F(u; -k_x, -k_y) = 0$ , если  $k_x^2 + k_y^2 > k_t^2 \ll k^2$ . При этом выражение (4.8.11), в котором  $k_z$  можно заменить на  $k - (1/2)(k_x^2 + k_y^2)/k$ , принимает вид

$$u(x, y, z) = \frac{\exp[-ik(z-z')]}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_x x - ik_y y + \frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)(z-z')] \times \\ \times F[u(x, y, z'); k_x, k_y] dk_x dk_y = \\ = \exp[-ik(z-z')] F^{-1} \left\{ \exp\left[\frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)(z-z')\right]; x, y \right\} * u(x, y, z'), \quad (4.10.1)$$

где с помощью \* мы обозначили операцию свертки и использовали теорему свертки об обратном преобразовании Фурье (обозначаемом символом  $F^{-1}$ ) произведения двух функций. Выражение (4.10.1) трудно переписать следующим образом:

$$u(x, y, z) = \frac{i \exp\{-ik(z - z') - ik(x^2 + y^2)/[2(z - z')]\}}{\lambda(z - z')} \times \\ \times F\left\{\exp\left[-ik \frac{x'^2 + y'^2}{2(z - z')}\right] u(x', y', z'); \frac{kx}{z - z'}, \frac{ky}{z - z'}\right\}. \quad (4.10.2)$$

Таким образом, дифракционный интеграл эквивалентен фурье-образу поля в опорной плоскости  $z' = \text{const} < z$ , умноженному на соответствующий фазовый множитель. Практическая ценность этого результата состоит в том, что он позволяет выполнить численный расчет поля с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Выражение (4.10.2) представляет собой одну из возможных записей *дифракционной формулы Френеля*.

Ошибкой, возникающей при замене  $k_z$  на  $k - (1/2)(k_x^2 + k_y^2)/k$ , можно пренебречь только, если  $|k_z - k + (1/2)(k_x^2 + k_y^2)/k| |z - z'| \ll \ll 2\pi$ . Это означает, что формула (4.10.2) может быть использована только для точек, расстояние которых от поверхности интегрирования не превосходит некоторой величины  $z_k$ . Это расстояние  $z_k$  можно определить из следующего приближенного соотношения:

$$|k_z - k + \frac{1}{2}(k_i^2/k)| z_k \cong \frac{1}{8}(k_i^4 z_k/k^3) = \alpha, \quad (4.10.3)$$

где  $\alpha$  — малая величина (например,  $10^{-1}$ ). Следовательно, дифракционная формула Френеля для полей с ограниченной полосой углового спектра может быть использована лишь для вычисления полей в ограниченной координатной  $z_k$  области.

Рассмотрим теперь поле, отличное от нуля лишь на некотором конечном отверстии в плоском экране. Обозначим через  $a$  радиус наименьшей минимальной окружности, охватывающей отверстие, и предположим, что  $|z - z'| \gg a$ . При этом величину  $R$  можно считать приблизительно равной  $|z - z'| + (1/2)[(x - x')^2 + (y - y')^2]/|z - z'|$ . Таким образом, дифракционный интеграл (4.5.5) можно переписать в виде

$$u(x, y, z) = i \frac{\exp(-ik|z - z'|)}{\lambda|z - z'|} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x', y') u(x', y', z') \times \\ \times \exp\left\{-i \frac{k}{2|z - z'|} [(x - x')^2 + (y - y')^2]\right\} dx' dy'. \quad (4.10.4)$$

Заметим сразу, что это выражение по виду совпадает с выражением (4.10.2), хотя они были получены при существенно разных предположениях. В действительности последнюю формулу можно использовать лишь при  $|z - z'| > z_R$ , где  $z_R$  определяется из соотношения, аналогичного (4.10.3):

$$k \left| |r - r'| - |z - z'| + \frac{1}{2} \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{|z - z'|} \right| \cong \frac{1}{8} (ka^4/z_R^3) = \alpha. \quad (4.10.5)$$

Если  $z_R < z_k$ , то формула Френеля применима при любых  $|z - z'|$  для полей, ограниченных в пространстве и по спектру. Из соотношений (4.10.3) и (4.10.5) можно сразу получить простое условие, позволяющее использовать приближение Френеля во всем пространстве. Это условие имеет вид

$$ak_t < 8\alpha(k/k_t)^2 \quad (4.10.6)$$

и определяет верхний предел произведения “размер  $\times$  ширина спектра”. Для однородно освещаемой щели спектр плоской волны пропорционален  $\sin(k_t a)/(k_t a)$ , так что произведение  $k_t a$  равно приблизительно  $2\pi$  и неравенство (4.10.6) принимает вид

$$2\pi < 8\alpha(ka/2\pi)^2. \quad (4.10.7)$$

Поэтому для достаточно больших отверстий, таких, что  $ka \gg 2\pi$ , и освещаемых однородно (как по амплитуде, так и по фазе), интеграл Френеля можно использовать для нахождения поля на произвольном расстоянии от плоскости интегрирования.

Рассмотрим теперь влияние неоднородности фазового распределения. Как мы покажем ниже, в пределе  $k \rightarrow \infty$  можно использовать равенство  $k_t = k[\sin \theta_{\max} + 2\pi/(ak)]$ , где  $\theta_{\max}$  — максимальный угол с осью  $z$ , который могут образовывать лучи, проходящие через отверстие. В соответствии с этим условие (4.10.6) запишется в виде

$$ak[\sin \theta_{\max} + (2\pi/ak)]^3 < 8\alpha. \quad (4.10.8)$$

Отсюда следует, что формулу Френеля во всем полупространстве можно применять лишь при выполнении определенного условия. В частности, для луча с числовой апертурой  $ЧА = \sin \theta_{\max} = 10^{-2}$  и  $\alpha = 0,1$  размер отверстия должен быть меньше, чем  $10^5 \lambda$ . При этом формулу Френеля можно использовать без ограничений. Это в свою очередь означает, что для света с длиной волны 1 мкм максимальный допустимый размер освещаемой зоны в плоскости интегрирования равен примерно 10 см. Если же числовая апертура увеличивается до  $10^{-1}$ , то допустимый размер резко уменьшается и составляет всего лишь 100 мкм.

В заключение заметим, что поля, определяемые выражением (4.10.4), удовлетворяют параболическому волновому уравнению, кото-

рое рассматривалось в разд. 2.6. [см. уравнение (2.6.12)]. Поэтому некоторые авторы, в частности советские ученые, называют приближение Френеля *параболическим приближением*.

#### 4.10.2. Формула Фраунгофера

Возвращаясь к общему выражению (4.10.2), заметим, что если  $z - z' \gg D^2\pi/\lambda$ , где  $D$  — характерное расстояние от точки  $(0, 0, z')$ , в которой поле  $u(x', y', z')$  можно считать равным нулю, то в подынтегральном выражении (4.10.4) экспоненциальным членом с показателем  $x'^2 + y'^2$  можно пренебречь, так что мы имеем

$$u(x, y, z) = \frac{i \exp(-ikR_0)}{\lambda|z - z'|} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik \frac{xx' + yy'}{|z - z'|}\right) u(x', y', z') dx' dy', \quad (4.10.9)$$

где

$$R_0 = |z - z'| + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)/|z - z'| \cong [(z - z')^2 + x^2 + y^2]^{1/2}. \quad (4.10.10)$$

Это выражение, называемое *дифракционной формулой Фраунгофера*, позволяет представить дифракционное поле в дальней зоне через двумерное преобразование Фурье для переменных  $k_x = kx/|z - z'|$ ,  $k_y = ky/|z - z'|$  от функции  $u$  на опорной поверхности. На рис. 4.13 приведены поля Фраунгофера для некоторых типичных диафрагм, облучаемых плоскими волнами.

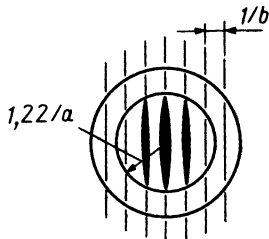
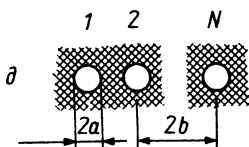
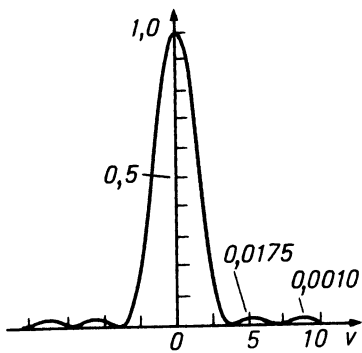
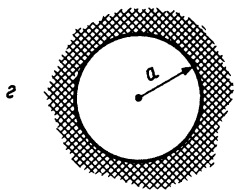
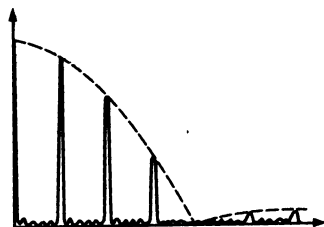
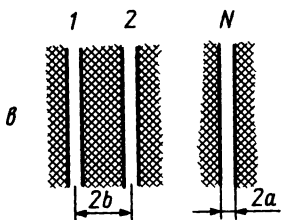
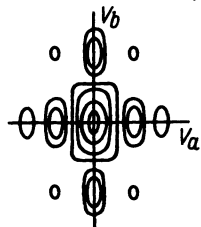
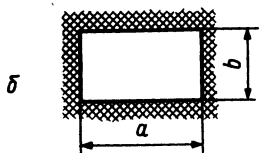
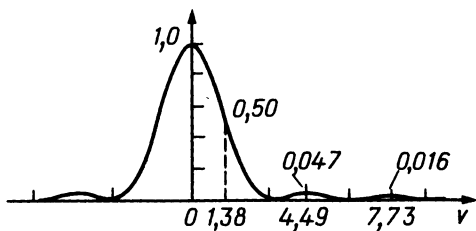
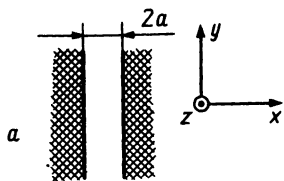
Поле дальней области можно измерить и на конечном расстоянии. Для этого перед диафрагмой помещают линзу, а результирующее поле измеряют в ее фокальной плоскости. Таким образом, применение линзы позволяет вместо распределения самого поля на плоскости получить его фурье-образ. Это свойство линз широко используется в когерентной оптике для создания оптических корреляторов и оптических согласующих фильтров. С их помощью производится распознавание образов и фильтрация изображений.

#### 4.10.3. Обобщение на двумерные поля

Все предыдущие выводы нетрудно обобщить на двумерные поля типа (4.7.1). Точнее говоря, легко показать, что выражения (4.10.4) и (4.10.9) можно записать следующим образом:

$$u(x, z) = \frac{\exp(i\pi/4 - i\chi|z - z'|)}{(2\pi/\chi)^{1/2}|z - z'|^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-i\chi \frac{(x - x')^2}{2|z - z'|}\right] u(x', z') dx', \quad (4.10.11)$$

$$u(x, z) = \frac{\exp(i\pi/4 - i\chi\rho_0)}{(2\pi/\chi)^{1/2}|z - z'|^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\chi \frac{xx'}{|z - z'|}\right) u(x', z') dx', \quad (4.10.12)$$



где

$$\rho_0 \cong [(z - z')^2 + x^2]^{1/2}. \quad (4.10.13)$$

#### 4.10.4. Дифракция периодических полей

Среди немногих случаев, для которых дифракционные поля могут быть вычислены аналитически, особую важность представляют поля, имеющие вид периодических функций. Рассмотрим такие поля более подробно, поскольку их дифракция имеет интересные приложения для теории решеток [14] (см. разд. 6.10).

Пусть цилиндрическое поле  $u(x, z)$ , фаза которого не зависит от координаты  $y$  [см. выражение (4.7.1)], в плоскости  $z' = 0$  записывается в виде

$$u(x', 0) = f(x') = \sum_{n=-N}^{+N} f_n \exp\left(in2\pi \frac{x'}{d}\right), \quad (4.10.14)$$

где  $f(x') = f(x' + d)$  — периодическая функция координаты  $x'$ , содержащая столько гармоник  $N$ , что  $N\lambda/d \ll 1$ . Тогда при  $kz < 4\alpha(d/N\lambda)^4$  [см. неравенство (4.10.3)] можно использовать дифракционную формулу Френеля (4.10.4), и мы имеем

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \frac{\exp(i\pi/4 - ikz)}{\lambda^{1/2} z^{1/2}} \sum_{n=-N}^{+N} f_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-ik \frac{(x - x')^2}{2z} + in2\pi \frac{x'}{d}\right] dx' = \\ &= \exp(-ikz) \sum_{n=-N}^{+N} f_n \exp\left[in2\pi \frac{x}{d} + i\left(\frac{n2\pi}{d}\right)^2 \frac{z}{2k}\right]. \end{aligned} \quad (4.10.15)$$

Следует заметить, что в частном случае  $z = z_q = qd^2/\lambda$  мы имеем  $\exp[i(n2\pi/d)^2 z_q / (2k)] = \exp(in^2 \pi q) = \exp(in \pi q)$ , так что

$$u(x, z_q) = \exp(-ik z_q) f(x + \frac{1}{2}qd). \quad (4.10.16)$$

Отсюда следует, что во всех плоскостях  $z_q$  распределение интенсивности поля одинаково. Это свойство называют *эффектом Талбота*, или *эффектом самовоспроизведения*. Оно было впервые замечено Талботом в 1836 г. и имеет весьма важные приложения в фурье-спектроскопии и интерферометрии.

Рис. 4.13. Дифракционные картины от типичных апертур. Функции распределения  $|G(\theta, \phi)|^2$  пропорциональны:  $a$  —  $[\sin(v)/v]^2$ ,  $v = ka \sin\theta \cos\phi$ ;  $b$  —  $\{[\sin(v_a)/v_a] \times [\sin(v_b)/v_b]\}^2$ ,  $v_a = ka \sin\theta \cos\phi$ ,  $v_b = kb \sin\theta \cos\phi$ ;  $c$  —  $\{[\sin(v)/v_a] [\sin(Nv_b)/\sin v_b]\}^2$ ,  $v_a = ka \sin\theta \cos\phi$ ,  $v_b = kb \cos\theta \cos\phi$ ,  $z = (2J_1(v)/v)^2$ ,  $v = ka \sin\theta$ ;  $d$  —  $\{[2J_1(v_a)/v_a] \times [\sin(Nv_b)/\sin v_b]\}^2$ ,  $v_a = ka \sin\theta$ ,  $v_b = kb \sin\theta \cos\phi$ .



## 4.11. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВОЛНАМ

В этом разделе мы покажем, что в наиболее общем случае поле, удовлетворяющее условию Зоммерфельда, можно представить в виде суперпозиции *цилиндрических мод*. Это представление можно использовать как альтернативный метод разложения по плоским волнам вместо рассмотренного в разд. 4.8. Оказывается, что он особенно полезен для полей, симметричных относительно вращения вокруг некоторой оси (например, оси  $z$ ). Рассмотрим сначала разложение функции Грина

$$\frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{-i}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[im(\phi - \phi')] \int_0^{\infty} \frac{J_m(\chi\rho)J_m(\chi\rho')}{(k^2 - \chi^2)^{1/2}} \times \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] \chi d\chi, \quad (4.11.1)$$

которое следует из *представления Зоммерфельда — Отта* для функции Грина  $G$  и из *теоремы сложения Графа* для функций Бесселя (см. задачу 8). В разложении (4.11.1)  $J_m$  представляет собой функцию Бесселя первого рода  $m$ -го порядка, и мы используем цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ .

Если полученный ряд (4.11.1) подставить в разложение (4.5.4), причем в качестве поверхности интегрирования выбрать плоскость, перпендикулярную оси  $z$ , то поле в точке  $\mathbf{r}$  запишется в виде

$$u(x, y, z) = u(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} u(\rho', \phi', z') \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[im(\phi - \phi')] d\phi' \times \int_0^{\infty} J_m(\chi\rho)J_m(\chi\rho') \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] \chi d\chi. \quad (4.11.2)$$

Кроме того, поле на поверхности интегрирования можно разложить в ряд Фурье по  $\phi'$ :

$$u(\rho', \phi', z') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m(\rho', z') e^{im\phi'} \quad (4.11.3)$$

(здесь  $m$  принимает все целые значения, а  $u$  — однозначная функция своих параметров). Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} u(\rho', \phi', z') J_m(\chi\rho') e^{im(\phi - \phi')} d\phi' &= \\ = 2\pi e^{im\phi} \int_0^{\infty} C_m(\rho', z') J_m(\chi\rho') \rho' d\rho' &\equiv \\ \equiv 2\pi e^{im\phi} H_m[C_m(\rho', z'); \chi]; & \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

здесь через  $H_m[f(\rho'); \chi]$  обозначено *преобразование Ханкеля*  $m$ -го порядка с аргументом  $\chi$  (см. книгу [15] и приложение Д в нашей книге). Теперь можно вычислить коэффициенты  $C_m(\rho, z)$  фурье-разложения

поля (по  $\phi$ ) на плоскости с координатой  $z$ , используя выражения (4.10.2) — (4.10.4):

$$\begin{aligned} C_m(\rho, z) &= \int_0^{\infty} H_m[C_m(\rho', z'); \chi] \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] J_m(\chi\rho) \chi d\chi = \\ &= H_m[H_m\{C_m(\rho', z'); \chi\} \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|]; \rho] = \\ &= C_m(\rho, z') * H_m\{\exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|]; \rho\}. \end{aligned} \quad (4.11.5)$$

При получении этого результата мы использовали свойство свертки преобразования Ханкеля и тождество двойного преобразования  $H_m\{H_m\{f\}\} = f$ . В частности, легко проверить, что при  $z = z'$  мы имеем  $C_m(\rho, z) = C_m(\rho, z')$ . Наконец, поле можно записать в виде

$$u(\rho, \phi, z) = \hat{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\phi} C_m(\rho, z') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m(\rho, z) e^{im\phi}, \quad (4.11.6)$$

где  $\hat{T}$  — линейный оператор, который преобразует  $C_m(\rho, z')$  в  $C_m(\rho, z)$  в соответствии с (4.11.5).

Если в используемом выше ряде оставить какой-либо  $m$ -й член, то его можно рассматривать как суперпозицию *цилиндрических мод* следующего вида:

$$H_m[C_m(\rho, z); \chi] J_m(\chi\rho) \exp[im\phi - i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] \chi d\chi. \quad (4.11.7)$$

Разложения по плоским и цилиндрическим волнам взаимозаменяемы, так как они применимы к одному и тому же классу полей. При этом представление поля через плоские волны требует трех непрерывных параметров  $k_x, k_y, k_z$ , связанных соотношением  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ , в то время как для цилиндрических волн необходим один дискретный параметр  $m$ , указывающий на угловую зависимость  $\exp(im\phi)$ , и непрерывный параметр  $\chi$ , определяющий зависимость от координаты  $z$ , а именно  $\exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|]$ . Радиальная функция  $J_m(\chi\rho)$  зависит как от  $m$ , так и от  $\chi$ .

#### 4.11.1. Приближение Френеля

В тех случаях, когда спектр  $A_m(\chi)$  каждой из цилиндрических мод обращается в нуль при  $\chi \gg \chi_{\max}$  (причем  $\chi_{\max} \ll k$ ), выражение (4.11.5) можно упростить, если экспоненту, описывающую распространение, записать в следующем приближенном виде:

$$\begin{aligned} \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] &\cong \\ &\cong \exp[-ik|z - z'| + i\chi^2|z - z'|/(2k)], \end{aligned} \quad (4.11.8)$$

так что после тождественных преобразований получаем

$$C_m(\rho, z) = \frac{-ik}{|z - z'|} \exp\left(-ik|z - z'| - ik \frac{\rho^2}{2|z - z'|}\right) \times \\ \times H_m \left\{ C_m(\rho', z') \exp\left(-ik \frac{\rho'^2}{2|z - z'|}\right); \frac{k\rho}{|z - z'|} \right\}. \quad (4.11.9)$$

Здесь было использовано интегральное тождество

$$\int_0^\infty \exp\left(i\chi^2 \frac{|z - z'|}{2k}\right) J_m(\chi\rho) J_m(\chi\rho') \chi d\chi = \\ = \frac{-ik}{|z - z'|} J_m\left(k \frac{\rho\rho'}{|z - z'|}\right) \exp\left(-ik \frac{\rho^2 + \rho'^2}{2|z - z'|}\right). \quad (4.11.10)$$

Выражение (4.11.9) эквивалентно формуле Френеля (4.10.2), полученной в декартовых координатах.

#### 4.11.2. Разложение плоской волны по цилиндрическим волнам

Мы уже видели, что всякое поле, которое можно представить в виде разложения по плоским волнам, может быть в то же время выражено и в виде суперпозиции цилиндрических мод. Наиболее естественный метод перехода от одного представления к другому состоит в разложении по цилиндрическим модам каждой отдельной плоской волны. Для этого заметим, что на плоскости  $z = z'$  плоская волна может быть записана в виде

$$u(\rho', \phi', z') = \exp[-ik\rho' \cos(\phi' - \phi'_0) \sin \theta], \quad (4.11.11)$$

где  $\theta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и осью  $z$ . Если разложить правую часть выражения (4.11.11) в ряд, то получим

$$u(\rho', \phi', z') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m J_m(k\rho' \sin \theta) \exp[im(\phi' - \phi'_0)]. \quad (4.11.12)$$

Сравнивая это выражение с (4.11.3), имеем

$$C_m(\rho', z') = (-i)^m e^{-im\phi'_0} J_m(k\rho' \sin \theta). \quad (4.11.13)$$

Таким образом, преобразование Ханкеля можно записать в виде

$$H_m[C_m(\rho', z'); \chi] = (-i)^m e^{-im\phi'_0} \int_0^\infty J_m(k\rho' \sin \theta) J_m(\chi\rho') \rho' d\rho' = \\ = (-i)^m e^{-im\phi'_0} \chi^{-1} \delta(\chi - k \sin \theta), \quad (4.11.14)$$

и выражение (4.11.5) принимает окончательный вид:

$$C_m(\rho, z) = C_m(\rho, z') \exp(-ik_0|z - z'| \cos \theta). \quad (4.11.15)$$

В результате представленного выше рассмотрения мы нашли, что разложение по цилиндрическим волнам плоской волны с начальным

распределением (4.11.11) на опорной плоскости имеет вид

$$u(\rho, \phi, z) = \exp(-ik|z - z'| \cos \theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(k\rho \sin \theta) e^{im(\phi - \phi_0)}. \quad (4.11.16)$$

#### 4.11.3. Апертурно ограниченные вращательно-симметричные поля

Продemonстрируем теперь использование приближения Френеля в цилиндрических координатах на конкретном примере. А именно, рассмотрим поле, которое отлично от нуля лишь на диске радиусом  $a$ , принадлежащем плоскости  $z = z'$ , и не зависит от угла  $\phi$ . Такая вращательная симметрия означает, в частности, что для  $m \neq 0$  все  $C_m = 0$ , и разложение (4.11.6) принимает простой вид:

$$u(\rho, z) = C_0(\rho, z). \quad (4.11.17)$$

Предположим теперь, что на начальной плоскости  $z = z'$  для поля применимо представление геометрической оптики, т. е.

$$u(\rho', z') = A(\rho') e^{-ikS(\rho')} = C_0(\rho', z'), \quad (4.11.18)$$

если  $\rho' \leq a$ , и  $u(\rho', z') = 0$ , если  $\rho' > a$ . Объединяя формулы (4.11.5), (4.11.7) и (4.11.18), можно записать следующее выражение:

$$u(\rho, z) = a^2 \int_0^{\infty} \chi d\chi \int_0^1 x A(ax) \exp[-ikS(ax) - i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] \times \\ \times J_0(\chi ax) J_0(\chi \rho) dx, \quad (4.11.19)$$

которое в приближении Френеля [см. (4.11.9)] принимает вид

$$u(\rho, z) = -i\text{ЧА}ka \exp\left\{-ik|z - z'| - ik\frac{\rho^2}{2|z - z'|}\right\} \times \\ \times \int_0^1 A(ax) J_0\left(\frac{kax\rho}{|z - z'|}\right) \exp\left[-ika\text{ЧА}\frac{x^2}{2} - ikS(ax)\right] x dx. \quad (4.11.20)$$

Здесь  $\text{ЧА} = a/|z - z'|$  — *числовая апертура* диска, если смотреть на него с расстояния  $|z - z'|$ .

На больших расстояниях, когда  $\exp(-ika \text{ЧА} x^2/2) \cong 1$ , выражение (4.11.20) принимает более простой вид:

$$u(\rho, z) = -i\text{ЧА}ka \exp\left(-ik|z - z'| - ik\frac{\theta^2|z - z'|}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 A(ax) J_0(ka\theta x) \exp[-ikS(ax)] x dx, \quad (4.11.21)$$

где  $\theta = \rho/|z - z'|$ . Таким образом, мы получили результирующее выражение, которое называют *дифракционной формулой Фраунгофера для вращательно-симметричных полей*.

4.11.3.а. *Разложение в ряды Буавена*

Полагая  $A(ax) \exp(-ikS - ika \text{ ЧА } x^2/2) = f(x^2)$ , мы следуем Буавену [16], вводя множество функций  $A_p(\xi)$ , определяемых выражением

$$\frac{1}{2p+1} A_p(\xi) = \int_0^1 x^{2p+1} J_0(\xi x) dx, \quad (4.11.22)$$

которое есть не что иное, как преобразование Ханкеля нулевого порядка для функции  $g(x)$ , такой, что  $g(x) = (2p+1)x^{2p}$  при  $x \leq 1$  и  $g(x) = 0$  при всех других аргументах. Раскладывая теперь  $f(x^2)$  в степенной ряд, поле можно записать в виде следующего ряда:

$$u(\rho, z) = C \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{(p+1)!} A_{p+1} \left( ka \frac{\rho}{|z-z'|} \right), \quad (4.11.23)$$

где  $C$  — множитель, стоящий перед интегралом в (4.11.20). Последовательность коэффициентов  $A_p$  легко вычисляется с помощью рекуррентного соотношения [16]

$$A_p(\xi) + [\xi^2/4p(p+1)] A_{p+1}(\xi) = J_0(\xi) + [\xi J_1(\xi)/2p], \quad (4.11.24)$$

а также выражения

$$A_1 = 2J_1(\xi)/\xi. \quad (4.11.25)$$

Буавен получил следующее разложение в ряд [16]:

$$u(\rho, z) = C \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f^{(p)}(1) 2^p \frac{J_{p+1}(\xi)}{\xi^{p+1}}, \quad (4.11.26)$$

где  $\xi = ka\rho/|z-z'|$ . В частности, если  $f = \exp\{i(\omega_1 x^2 + \omega_2 x^4)\}$ , то  $f^{(p)}(1) = (-1)^p f^{(0)}(1) \{(i\alpha)^p - (i\alpha)^{p-2} i\beta(p)_2/2 \dots\}$ , где  $(p)_n = \Gamma(p-1)/\Gamma(p-n)$ ,  $\alpha = -\omega_1 - 2\omega_2$  и  $\beta = -2\omega_2$ . Нетрудно показать, например, что условие  $\alpha = 0$  соответствует краевому фокусу,  $\alpha = \beta$  — параксиальному фокусу, а  $\alpha = \beta/2$  — окружности наименьшего искажения, т. е. минимальному размеру изображения на экране, перпендикулярном оптической оси.

## 4.12. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВАТСОНА

Разложения по цилиндрическим волнам являются нередко лишь промежуточным этапом в поиске простых аналитических представлений поля. Действительно, во многих случаях эти ряды сходятся столь медленно, что для получения удовлетворительной точности необходимо учитывать очень большое число членов суммы. Типичным примером является задача о рассеянии плоской волны на цилиндрическом препятствии. Несмотря на простоту решения в приближении геометрической оптики, по виду разложения в ряды Фурье и Бесселя совсем

не просто предсказать существование области тени. Путь к преодолению этой сложности был предложен Ватсоном, который преобразовал начальное разложение в другое, сходящееся гораздо быстрее к пределу геометрической оптики при  $\lambda \rightarrow 0$ . Проиллюстрируем теперь на частном примере главные этапы метода Ватсона, ведущего к получению быстро сходящихся рядов. Рассмотрение преобразования Ватсона для случая рассеяния на диэлектрическом цилиндре мы отложим до разд. 6.5.

Из общих соображений можно предположить, что при дифракции плоской волны на круговом цилиндре поле на поверхности цилиндра в области геометрической тени должно затухать, так что

$$u(a, \phi) \propto \exp[-\nu(\phi - \phi_{SB})]; \quad (4.12.1)$$

здесь  $\phi_{SB}$  — угол, связанный с границей тени, а  $\nu$  — комплексное число, причем  $\text{Re } \nu > 0$ . С формальной точки зрения решение соответствует цилиндрической волне, «вращающейся» вокруг цилиндра и имеющей комплексную постоянную распространения  $\nu/a$ , где  $a$  — радиус цилиндра. Таким образом, в освещаемой области поле представляет собой комбинацию цилиндрических волн вещественного порядка  $m$ , а в области тени в разложении участвуют компоненты комплексного порядка  $\nu$ .

Чтобы показать применимость выражения (4.12.1) при  $\lambda \rightarrow 0$ , необходимо прежде всего преобразовать разложение (4.11.3) для того, чтобы учесть в нем вклад от волн общего вида  $J_\nu(\chi\rho) \exp(i\nu\phi)$  с комплексным  $\nu$ . С этой целью заметим, что выражение (4.11.6) для поля, не зависящего от  $z$ , принимает вид

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(k\rho) e^{im\phi} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\phi} + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(2)}(k\rho) e^{im\phi}, \quad (4.12.2)$$

где  $H_m^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода, а  $H_m^{(2)}$  — та же функция второго рода. Их можно определить для любого комплексного  $\nu$ , причем при фиксированной вещественной части  $\nu$  и  $|x| \rightarrow \infty$  они имеют следующее асимптотическое представление:

$$H_\nu^{(2)*}(x) = H_\nu^{(1)}(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left(ix - i\nu\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}\right), \quad (4.12.3)$$

откуда следует, что  $H_\nu^{(2)}$  описывает волну, уходящую на бесконечность, в то время как  $H_\nu^{(1)}$  — притивоположно направленную. Таким образом, если нас интересует лишь компонента поля, уходящая на

бесконечность, то  $u(\rho, \phi)$  можно записать в следующем простом виде:

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^{(2)}(k\rho) e^{im\phi}. \quad (4.12.4)$$

Если  $u(\rho, \phi)$  задана на круге радиусом  $a$ , ряд (4.12.4) можно переписать в виде

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle u(a, \phi') e^{-im\phi'} \rangle_{\phi'} \frac{H_m^{(2)}(k\rho)}{H_m^{(2)}(\beta)} e^{im\phi}, \quad (4.12.5)$$

где  $\beta = ka$  — так называемый *масштабный параметр*, а

$$\langle u(a, \phi') e^{-im\phi'} \rangle_{\phi'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \phi') e^{-im\phi'} d\phi'. \quad (4.12.6)$$

В выражении (4.12.5) мы учли тот факт, что при  $\rho = a$  выражение (4.12.4) является разложением в ряд Фурье периодической функции  $f(\phi) = f(\phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$ .

Когда оба параметра  $\beta$  и  $k\rho$  очень велики, в сумме (4.12.5) функции Ханкеля можно заменить их асимптотическим представлением (4.12.3), и тогда выражение (4.12.5) можно записать приближенно в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) &\sim \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} e^{-ik(\rho-a)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle u(a, \phi') e^{-im\phi'} \rangle_{\phi'} e^{im\phi} = \\ &= \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} e^{-ik(\rho-a)} u(a, \phi), \end{aligned} \quad (4.12.7)$$

что представляет собой точное выражение для поля в пределе геометрической оптики. Асимптотическое приближение для  $H_\nu^{(2)}$  (4.12.3) непригодно в тех случаях, когда нельзя пренебречь вкладом членов с большим индексом  $m$ . На самом деле асимптотическое разложение неприменимо, если величина  $|x|$  по порядку величины равна или меньше, чем  $|\nu|$ . В этих случаях, для постоянного отношения  $x/\nu$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение функции  $H_\nu^{(2)}$  имеет вид (см. книгу [4], с. 71)

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \left(\frac{2}{\pi\nu}\right)^{1/2} \left[ -e^{i2\pi\nu} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu + i \left(\frac{2\nu}{ex}\right)^\nu \right], \quad \pi > \arg \nu > 0. \quad (4.12.8)$$

Аналогичное выражение может быть получено для  $H_\nu^{(1)}$ , если использовать соотношение  $H_\nu^{(1)}(x) = \exp(-\nu\pi i) H_\nu^{(2)}[\exp(-\pi i)x]$ . Таким образом, мы имеем

$$H_\nu^{(2)}(k\rho)/H_\nu^{(2)}(\beta) \underset{|\nu| \rightarrow \infty}{\sim} (a/\rho)^\nu, \quad \pi/2 > \arg \nu > 0, \quad (4.12.9a)$$

$$H_\nu^{(2)}(k\rho)/H_\nu^{(2)}(\beta) \underset{|\nu| \rightarrow \infty}{\sim} (\rho/a)^\nu, \quad \pi > \arg \nu > \pi/2. \quad (4.12.9b)$$

Отсюда следует, в частности, что в данном случае члены высшего по-

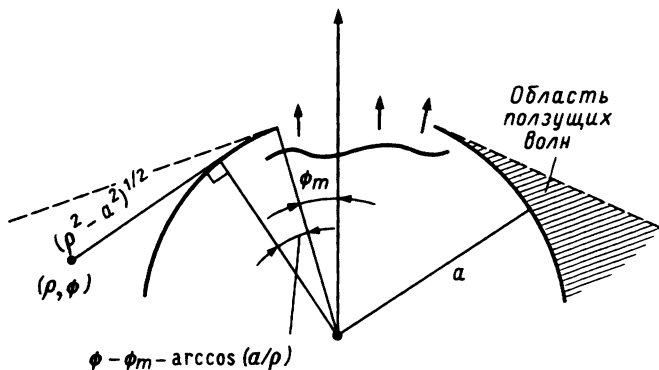


Рис. 4.14. Возбуждение ползущих волн в области тени при освещении отверстия в металлическом цилиндре.

рядка в ряде (4.12.5) убывают как  $(a/\rho)^m$  в отличие от зависимости, описываемой выражением (4.12.7). Такое существенное уменьшение членов высшего порядка означает сильное сглаживание дифракционной картины в дальней зоне по сравнению с тем, что мы имеем в приближении геометрической оптики.

Рассмотрим конкретную задачу. Пусть в металлическом круговом цилиндре радиусом  $a$  имеется отверстие, простирающееся от  $\phi = -\phi_m$  до  $\phi = \phi_m$ , как показано на рис. 4.14. Предположим также, что источники находятся внутри цилиндра и создают на отверстии распределение поля  $u(a, \phi)$ . В приближении геометрической оптики волна будет распространяться наружу лишь внутри угла  $|\phi| < |\phi_m|$  и резко спадать до нуля вне этого сектора. Однако благодаря быстрому убыванию амплитуды высших гармоник  $\sim (a/\rho)^m$  переход от освещенной области к области тени будет тем менее резким, чем в более дальней зоне находится точка наблюдения.

Этим качественным рассуждениям можно сопоставить вполне определенные количественные выражения, если ряд (4.12.5) преобразовать к контурному интегралу (рис. 4.15)

$$u(\rho, \phi) = -\frac{i}{2} \oint_C \frac{e^{i\nu(\phi - \pi)}}{\sin \nu\pi} \langle u(a, \phi') e^{-i\nu\phi'} \rangle_{\phi'} \frac{H_\nu^{(2)}(k\rho)}{H_\nu^{(2)}(\beta)} d\nu, \quad (4.12.10)$$

где контур  $C$ , обход по которому производится против часовой стрелки, охватывает все нули функции  $\sin \nu\pi$  и оставляет во внешней области все полюсы отношения  $H_\nu^{(2)}(k\rho)/H_\nu^{(2)}(\beta)$ . Справедливость этого интеграла можно проверить сразу, если заметить, что его подынтегральное выражение имеет внутри  $C$  лишь простые полюсы, совпадающие с нулями функции  $\sin \nu\pi$ , т. е. лежащими при  $\nu = m$ . Следова-



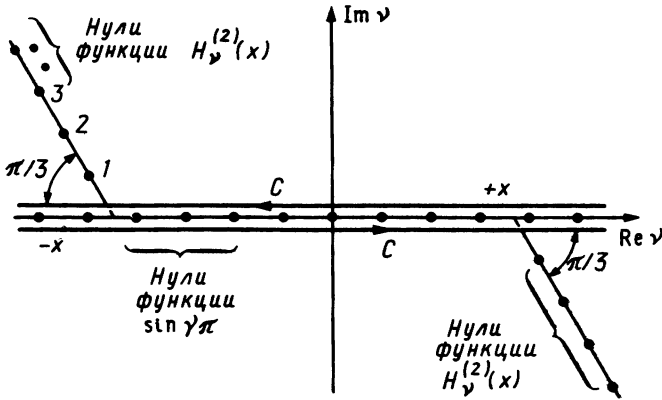


Рис. 4.15. Распределение нулей функций  $H_v^{(2)}(x)$  и  $\sin(v\pi)$ . Контур интегрирования  $C$  замыкается вокруг нулей  $\sin(v\pi)$  и оставляет во внешней области нули функции  $H_v^{(2)}(x)$ .

тельно, вычисляя интеграл (4.12.10) с помощью теоремы о вычетах, мы вновь получаем ряд (4.12.5). Если принять теперь во внимание соотношение  $H_{-v}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_v^{(2)}(x)$  и тот факт, что функция  $H_v^{(2)}$  не имеет ни нулей, ни полюсов при  $\text{Im} \nu = 0$ , то контур  $C$  можно преобразовать к прямой  $-\infty + i\varepsilon, i\varepsilon + \infty$ , причем  $\varepsilon > 0$ . Таким образом,

$$u(\rho, \phi) = i \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{\langle u(a, \phi') \cos \nu(\pi - \phi + \phi') \rangle_{\phi'} H_{\nu}^{(2)}(k\rho)}{\sin \nu\pi H_{\nu}^{(2)}(\beta)} d\nu. \quad (4.12.11)$$

Учитывая асимптотические выражения (4.12.9), получаем, что подынтегральное выражение в (4.12.11) обращается в нуль при  $|\nu| \rightarrow \infty$  для  $|\pi - \phi + \phi'| < \pi$  и  $\pi > \arg \nu > 0$ . Следовательно, контур интегрирования можно замкнуть полуокружностью в верхней полуплоскости. Так как функции  $H_v^{(2)}(x)$  можно представить в виде комбинации функций Бесселя  $J_{\nu}$  и  $J_{-\nu}$ :

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = i \{ [J_{-\nu}(x) - J_{\nu}(x)e^{i\nu\pi}] / \sin \nu\pi \}, \quad (4.12.12)$$

а  $J_{\nu}(x)$  можно разложить в ряд

$$J_{\nu}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} [m! \Gamma(\nu + 1 + m)]^{-1}, \quad (4.12.13)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Гаусса, то можно написать следующее выражение:

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = \frac{i}{\sin \nu\pi} \left\{ \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} [m! \Gamma(1 + m - \nu)]^{-1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} e^{i\nu\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} [m! \Gamma(1 + m + \nu)]^{-1} \right\}. \quad (4.12.14)$$

Заметим теперь, что  $\Gamma^{-1}(\nu)$  — целая функция аргумента  $\nu$  (т. е. она регулярна во всей комплексной плоскости  $\nu$ ), а  $H_\nu^{(2)}(x)$  стремится к конечному пределу при  $\nu = m$  ( $m$  — целое число, положительное или отрицательное). Отсюда следует, что  $H_\nu^{(2)}(x)$  также является целой функцией аргумента  $\nu$ .

Возвращаясь теперь к интегралу (4.12.11), контур которого замкнут в верхней полуплоскости; приходим к выводу, что *подынтегральное выражение содержит только полюсные особенности, соответствующие нулям  $\nu_n$  ( $n = 1, \dots, \infty$ ) функции  $H_\nu^{(2)}(\beta)$* . Применяя теорему о вычетах, окончательно получаем

$$u(\rho, \phi) = -2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\langle u(a, \phi') \cos[\nu_n(\pi - \phi + \phi')] \rangle_{\phi'}}{\sin(\nu_n \pi)} \frac{H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho)}{\partial H_\nu^{(2)}(\beta) / \partial \nu|_{\nu=\nu_n}}. \quad (4.12.15)$$

Таким образом, в результате долгих выкладок мы заменили начальный ряд (4.12.5) на новый, содержащий функции комплексного индекса  $\nu_n$ . Это преобразование впервые предложил Ватсон в 1918 г. для улучшения сходимости разложения по сферическим волнам поля в зоне тени, рассеянного сферическим препятствием. При этом он доказал, что в полученном ряде можно оставить только первый член, и объяснил таким образом экспоненциальное затухание поля, излучаемого передатчиком, находящимся за линией прямой видимости, в области геометрической тени Земли. Значительно позднее, а именно в 1958 г. Редже вновь открыл этот метод для решения задачи о рассеянии шрёдингеровской волновой функции частицы на центральном потенциале. В этом случае индекс  $m$  с точностью до постоянной Планка  $\hbar$  совпадает с квантовомеханическим угловым моментом частицы. Аналитическое продолжение в область комплексных  $\nu$  можно при этом интерпретировать так, что частицы в области тени имеют *комплексный угловой момент* [17].

Теперь остается исследовать распределение нулей и сами выражения для слагаемых в рядах Ватсона (4.12.15).

#### 4.12.1. Нули функции $H_\nu^{(2)}(\beta)$ в верхней полуплоскости

Нули функции  $H_\nu^{(2)}(\beta)$  (а также  $H_\nu^{(1)}$ ,  $H_\nu^{(2)'}$  и  $H_\nu^{(1)'}$ ) исследовали несколько авторов [18—21]. В частности, Шёбе [19] получил следующее разложение для  $H_\nu^{(2)}(\beta)$ , справедливое при  $|\nu + \beta| = O(x^{1/3})$ ,  $|\beta| \gg 1$ :

$$H_\nu^{(2)}(\beta) \sim 2e^{i\pi/3} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/3} \text{Ai}(-\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{\beta}\right)^{2n/3} P_n(\xi) - \\ - e^{i\pi/3} \text{Ai}'(-\xi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{\beta}\right)^{2n/3} Q_n(\xi) \quad |\beta| \rightarrow \infty \quad 2e^{i\pi/3} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/3} \text{Ai}(-\xi), \quad (4.12.16)$$

где  $Ai(z)$  — функция Эйри, а  $Ai'(z)$  — ее производная и

$$\xi \equiv -e^{i\pi/3}(2/\beta)^{1/3}(v + \beta). \quad (4.12.17)$$

Для первых нескольких коэффициентов  $P_n$  и  $Q_n$  имеем

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = e^{-i\pi/3} \frac{\xi}{15}, \quad Q_1(\xi) = -e^{i\pi/3} \frac{\xi^2}{60},$$

$$P_2(\xi) = e^{i\pi/3} \left( \frac{\xi^5}{7200} - \frac{13\xi^2}{1260} \right), \quad Q_2(\xi) = -\frac{\xi^3}{420} + \frac{1}{140}. \quad (4.12.18)$$

Используя приведенное разложение (4.12.16) и применяя формулу Стрейфера и Кодиса [18], можно показать, что первые нули  $\nu_n$  функции  $H_\nu^{(2)}(\beta)$  с хорошей точностью можно аппроксимировать следующей функцией [см. также (6.6.3) и выражение (A.8) у Нуссенцвейга [22]]:

$$\nu_n(\beta) = -\beta - e^{-i\pi/3}(\beta/2)^{1/3}(x_n - \delta_n) \underset{|\beta| \gg 1}{\sim} -\beta - e^{-i\pi/3}(\beta/2)^{1/3}x_n, \quad (4.12.19)$$

где  $x_n$  — нули функции  $Ai(-x)$ , а

$$\delta_n(\beta) = -e^{-i\pi/3} \frac{x_n^2}{60} \left( \frac{2}{\beta} \right)^2 - e^{i\pi/3} \left( \frac{x_n^3}{400} - \frac{1}{140} \right) \left( \frac{2}{\beta} \right)^4 -$$

$$- \left( \frac{281x_n^4}{4,536,000} - \frac{29x_n}{12,600} \right) \left( \frac{2}{\beta} \right)^6. \quad (4.12.20)$$

Первые пять коэффициентов  $x_n$  имеют следующие значения:

$$x_1 = 2,338, \quad x_2 = 4,088, \quad x_3 = 5,521, \quad (4.12.21)$$

$$x_4 = 6,787, \quad x_5 = 7,944,$$

а при больших  $n$  (но меньших, чем  $\beta$ )  $x_n$  определяется асимптотической формулой

$$x_n \sim \{(3/2)\pi[n + (3/4)]\}^{2/3}. \quad (4.12.22)$$

Кроме того, при  $n \rightarrow \infty$  мы имеем (см. [21])

$$\operatorname{Re} \nu_n(\beta) \sim -\frac{\pi^2}{2} \left( n - \frac{1}{4} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{2\pi(n - 1/4)}{e\beta} \right] \right\}^{-2}, \quad (4.12.23a)$$

$$\operatorname{Im} \nu_n(\beta) \sim \pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{2\pi(n - 1/4)}{e\beta} \right] \right\}^{-1}. \quad (4.12.23b)$$

Распределение нулей  $\nu_n$  схематически иллюстрируется на рис. 4.15, из которого ясно видно, что  $\operatorname{Im} \nu_n$  является возрастающей функцией числа  $n$ . Кроме того, при достаточно больших  $x$  первые нули расположены на линии, составляющей угол  $60^\circ$  с вещественной осью.

Функцию  $H_\nu^{(2)}$  для первых нулей, как видно из разложения (4.12.16), можно заменить на функцию Эйри  $Ai(-\xi)$ . Таким образом, мы мо-

жем написать

$$\left. \frac{\partial H_v^{(2)}(\beta)}{\partial v} \right|_{v=v_n} \sim -2e^{i\pi/3} \left( \frac{2}{\beta} \right)^{1/3} \text{Ai}'(-\xi) \left. \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|_{v=v_n} = 2e^{i2\pi/3} \left( \frac{2}{\beta} \right)^{2/3} \text{Ai}'(-x_n). \quad (4.12.24)$$

В то же время для нулей высокого порядка ( $|\nu_n| \gg \beta$ ) можно использовать разложение (4.12.8), и мы имеем

$$\left. \frac{\partial H_v^{(2)}(\beta)}{\partial v} \right|_{v=v_n} \sim -2 \left( \frac{2}{\pi \nu_n} \right)^{1/2} e^{i2\pi \nu_n} \left( \frac{e\beta}{2\nu_n} \right)^{\nu_n} \left[ \ln \left( -\frac{\beta}{2\nu_n} \right) - \frac{1}{2\nu_n} \right]. \quad (4.12.25)$$

Таким образом, с учетом (4.12.23а) получаем

$$\left| \frac{H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho)}{\partial H_v^{(2)}(\beta)/\partial v|_{v=v_n}} \right| \sim \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{a} \right)^{\text{Re}(\nu_n)} \left| \ln \left( -\frac{\beta}{2\nu_n} \right) \right|^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.12.26)$$

#### 4.12.2. Ползущие волны

Быстрое убывание слагаемых в ряде Ватсона при  $n \rightarrow \infty$ , подтверждаемое выражением (4.12.26), позволяет нам рассмотреть только члены малого порядка, для которых  $|\nu_n + \beta| = O(\beta^{1/3})$ . При этом можно использовать приближение (4.12.24) и записать

$$u(\rho, \phi) \sim \pi e^{i\pi/3} \left( \frac{\beta}{2} \right)^{2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(a, \phi') \cos[\nu_n(\pi - \phi + \phi')] \rangle_{\phi} H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho)}{\sin(\nu_n \pi) \text{Ai}'(-x_n)}. \quad (4.12.27)$$

Если необходимо рассмотреть поле при всех  $\rho$ , таких, что  $a < \rho < \infty$ , то должно быть известно выражение для  $H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho)$ , которое применимо для значений  $k\rho$  как очень больших, так и сравнимых с  $|\nu_n|$ . Дебай, а затем Ватсон получили асимптотические выражения при очень больших  $x$  и  $|\nu|$ , когда  $|x + \nu| > O(x^{1/3})$ . Используя их результаты, можно записать (см. [4], с. 262)

$$H_{\nu}^{(2)}(x) \sim [2/\pi(x^2 + \nu^2)^{1/2}]^{1/2} \exp(-i\{(x^2 - \nu^2)^{1/2} + \nu[\pi - \arccos(\nu/x)] - \pi/4\}), \quad \pi > \arg \nu > \pi/2. \quad (4.12.28)$$

Если, учитывая (4.12.19), использовать приближение  $(k^2\rho^2 - \nu_n^2)^{1/2} \cong \cong k(\rho^2 - a^2)^{1/2}$  и  $\pi - \arccos(\nu_n/k\rho) \cong \arccos(a/\rho)$ , то

$$H_{\nu_n}^{(2)}(k\rho) \sim \left[ \frac{2}{k(\rho^2 - a^2)^{1/2}} \right]^{1/2} \exp \left\{ -i \left[ k(\rho^2 - a^2)^{1/2} + \nu_n \arccos \left( \frac{a}{\rho} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (4.12.29)$$

Однако, поскольку  $\text{Im}(\nu_n) \gg 1$  [см. (4.12.23б)], можно использовать следующее приближенное равенство:  $\cos[\nu_n(\pi - \phi + \phi')]/\sin(\pi \nu_n) \cong \cong -e^{i\nu_n[\pi - |\pi + \phi' - \phi|]}$ . При этом мы имеем

$$\frac{\langle u(a, \phi') \cos[\nu_n(\pi - \phi + \phi')] \rangle_{\phi'}}{\sin(\nu_n \pi)} \sim \frac{u(a, \phi_m)}{2\nu_n} e^{i\nu_n(\phi - \phi_m)}. \quad (4.12.30)$$

Следовательно, разложение Ватсона принимает вид

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \phi) \sim & -i \frac{e^{i\pi/2}}{4\pi^{1/2} 2^{1/6}} \frac{1}{\beta^{1/6}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{Ai}'(-x_n)} \left( \frac{a^2}{\rho^2 - a^2} \right)^{1/4} \times \\
 & \times \exp \left\{ -ik \left[ \left( \rho^2 - a^2 \right)^{1/2} + a \left( \phi - \phi_m - \arccos \left( \frac{a}{\rho} \right) \right) \right] \right\} - \\
 & - e^{-i\pi/3} \left[ \phi - \phi_m - \arccos \left( \frac{a}{\rho} \right) \right] \left( \frac{\beta}{2} \right)^{1/3} x_n \}. \quad (4.12.31)
 \end{aligned}$$

Каждый член этой суммы можно интерпретировать как амплитуду поля вдоль луча, начинающегося от края отверстия, следующего сначала по поверхности цилиндра  $\rho = a$  до тех пор, пока не будет достигнут угол  $\phi - \phi_m - \arccos(a/\rho)$ , и идущего затем по прямой, касательной к поверхности цилиндра, до точки наблюдения  $(\rho, \phi)$  (рис. 4.14). Множитель  $a^{1/2}/(\rho^2 - a^2)^{1/4}$  учитывает затухание амплитуды вдоль прямого отрезка траектории. Фаза состоит из двух слагаемых, первое из которых (в квадратных скобках) представляет собой задержку луча при движении его по искривленной траектории от края отверстия до точки наблюдения, а второе учитывает отклонение от закона геометрической оптики, возникающее из-за кривизны части траектории. Именно этот фактор объясняет характерную особенность рассматриваемых волн — они экспоненциально затухают при распространении вдоль поверхности цилиндра, причем чем больше  $n$ , тем сильнее это затухание в соответствии со значениями  $x_n$  [ср. с (4.12.21)]. В литературе эти волны называют *ползущими*, или *стелющимися*<sup>1)</sup>. Их свойства мы рассмотрим снова в разд. 6.5 в связи с задачей о рассеянии волн на диэлектрическом цилиндре.

Необходимо заметить, что разложение (4.12.31) справедливо при  $|k\rho - \beta| \gg \beta^{1/2}$ . Для вычисления поля в более близкой к цилиндру области для  $H_n^{(2)}(k\rho)$  можно использовать асимптотическое выражение (4.12.16). Кроме того, при не очень больших  $\beta$  нули  $\nu_n$  даются выражениями (4.12.19) и (4.19.20). Этот случай имеет место, когда размер рассеивателя сравним с длиной волны света (см. разд. 6.5).

#### 4.13. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ФОКУСА

Системы изображения конструируются для переноса конической конгруэнции лучей, создаваемой точечным источником в плоскости предмета, в фокальную точку в плоскости изображения (см. гл. 2). В боль-

<sup>1)</sup> Соответствующие английский и немецкий термины "creeping waves" и "Kriechwellen". Обсуждение свойств ползущих волн см. также в книге: Хёрл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. Пер. с нем./Под ред. Г. Д. Малюжинца. — М.: Мир, 1964. — Прим. перев.

шинстве случаев распределение поля в области между источником и выходным зрачком можно найти, используя методы геометрической оптики, а именно определяя траектории лучей, распространяющихся через последовательность преломляющих поверхностей, и вычисляя затем амплитуду  $A$  вдоль каждого луча. Однако при попытке применить тот же подход в пространстве изображения (за выходным зрачком) мы сталкиваемся с физически бессмысленным результатом, поскольку вычисленное таким образом поле оказывается равным нулю сразу при переходе границы геометрической тени, образуемой огибающей поверхностью, т. е. лучами, проходящими через край выходного зрачка. Для устранения этого противоречия, связанного с использованием приближения геометрической оптики, необходимо обратиться к представлению через дифракционный интеграл. В частности, можно предположить, что поле на поверхности выходного отверстия совпадает с полем, которое существовало бы на той же поверхности в отсутствие апертуры. Это приближение, известное как *принцип Кирхгофа*, эквивалентно предположению о том, что конечность размеров выходного зрачка не влияет на поле в плоскости зрачка. Поскольку в действительности возмущение поля значительно лишь вблизи границы зрачка, можно ожидать, что ошибка, связанная с применением принципа Кирхгофа, пренебрежимо мала, если апертура достаточно велика.

Точный анализ (см. гл. 6) решений для простых апертур (например, полуплоскость, щель) подтверждает то, что гипотезу Кирхгофа можно применять с целью вычисления поля вблизи границы тени. Ошибки становятся существенными лишь при вычислении поля в освещенной или темной областях. Но именно здесь хорошо работает приближение геометрической оптики.

Проведенное выше рассмотрение объясняет, почему применение принципа Кирхгофа в оптическом диапазоне общепринято и не вызывает критики, хотя в физике радиоволн делались многочисленные попытки создать более общую теорию. При этом слабое поле в области тени необходимо вычислять точно, например при рассмотрении излучения на задней стороне отражательной антенны. В других задачах бывает необходимо вычислить точное значение поля на апертуре, определяя его самосогласованно, исходя из выражения для поля, излучаемого произвольной точкой самой апертуры. Всякий раз, когда как геометрическая оптика, так и теория дифракции приводят при использовании принципа Кирхгофа к нефизичным результатам, можно применить альтернативный подход, а именно *геометрическую теорию дифракции* (которую мы рассмотрим в последующих главах).

Во всех этих рассуждениях неявно предполагается возможность использования скалярного описания поля. Однако в тех случаях, когда

числовая апертура пучка, падающего или выходящего из линзы, достаточно велика, необходимо учитывать векторный характер полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Это существенно, например, для теории изображения в микроскопе, когда апертура падающего пучка может быть очень большой. Анализ результатов показывает существенное отклонение от предсказаний параксиальной теории (даже в отсутствие аберраций). В частности, даже для линз с вращательной симметрией пятно в фокальной плоскости не будет радиально-симметричным, если падающее излучение линейно-поляризовано. Это обстоятельство в свою очередь влияет на разрешающую способность оптического прибора. Кроме того, электрическое поле имеет как поперечную, так и аксиальную компоненту.

Так как изменение поля в фокальной области оптических систем с малой числовой апертурой обсуждается во многих учебниках (см., например, книгу Борна и Вольфа [11], цитируемую в гл. 1), в последующем рассмотрении мы сосредоточим внимание на главных особенностях векторного поля, а результаты скалярной теории получим как частный случай векторного *интеграла Лунберга — Дебая* [23, 24].

#### 4.13.1. Точечные источники электромагнитного поля

Укажем на некоторые свойства точечных источников, излучающих векторные поля. Напомним, что в скалярной теории точечный источник, создающий поле, пропорционален трехмерной  $\delta$ -функции, появляющейся в виде возмущающего члена в волновом уравнении [см. (4.2.2)]. В векторном случае мы должны представить себе поле излучения как соответствующую комбинацию полей элементарных электрических и магнитных мультиполей. В простейшем случае мы имеем дело с электрическим диполем  $\mathbf{p}$  и магнитным диполем  $\mathbf{m}$ , локализованными в точке  $\mathbf{r}_S \equiv (x_0, y_0, z_0)$ . Если источник находится в однородной среде, то поле, излучаемое диполями  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$ , дается выражением (см. книгу [17], гл. I, с. 90—93)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} [(\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla G + k^2 \mathbf{p} G] - i\omega\mu_0 \mathbf{m} \times \nabla G \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{e^{-ikR}}{R} \mathbf{E}'(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.13.1)$$

где  $\mathbf{E}'$  — вектор, не зависящий от  $R$  [см. выражение (2.8.3)]:

$$\mathbf{E}'(\hat{\mathbf{n}}) = (-\omega^2\mu_0/4\pi)[\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) + (n/c)\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{n}}] \quad (4.13.2)$$

и  $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S| \equiv \mathbf{R}/R$ ,  $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ . Функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S) = G(\mathbf{R})$  совпадает в этом случае с выражением (4.2.7), где  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_S$ .

Во многих приложениях точечные источники получают при облучении маленького круглого отверстия диаметром 10—100 мкм, расположенного в фокальной плоскости объектива микроскопа, лазерным пуч-

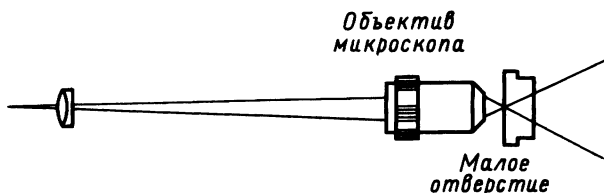


Рис. 4.16. Устройство, состоящее из рассеивающей линзы, объектива микроскопа и малого отверстия, для получения из начального лазерного пучка сферической волны большой апертуры.

ком, сфокусированным этим объективом (рис. 4.16). В этом случае если пренебречь вкладом края отверстия в дифракционную формулу Коттлера [выражения (4.3.4) и (4.3.5)], то отверстие можно рассматривать как электрический и магнитный диполи, величина которых пропорциональна электрическому и магнитному полю, проинтегрированному по апертуре.

В оптических системах, использующих синхротронное излучение, источник представляет собой ток электронов, движущихся на расстоянии  $R$  от наблюдателя. Фурье-компонента поля, излучаемого этим источником, дается выражением (с точностью до несущественного фазового множителя)

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{-e\zeta_0}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i\omega \left[ t' - \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{r}_e(t')}{c} \right] \right\} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} dt'. \quad (4.13.3)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{n}}$  — направление из малой конечной области, которую пролетает электрон, к точке наблюдения;  $\mathbf{r}_e(t')$  — траектория электрона,  $\boldsymbol{\beta} = (1/c)d\mathbf{r}_e/dt'$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt'$  и  $-e\zeta_0$  — произведение заряда электрона на волновое сопротивление вакуума. В других случаях источником является электрический диполь  $d\mathbf{p}$ , индуцированный полем  $\mathbf{E}_i$ , падающим на элементарный объем  $dV$  среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$d\mathbf{p}(\mathbf{r}') = [\epsilon(\mathbf{r}') - \epsilon_0] \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') dV, \quad (4.13.4)$$

где  $dV$  включает в себя точку  $\mathbf{r}'$ . Если падающее поле создается тепловым источником, как в случае облучения конденсора микроскопа светом от лампы, необходимо учитывать флуктуирующую фазу вектора  $\mathbf{E}_i$ , которая воздействует на фазу электрического диполя  $\mathbf{p}$  и в конечном счете на поле в области изображения.

#### 4.13.2. Перенос векторных полей из пространства предмета к выходному зрачку

Обратимся теперь к наиболее важным свойствам, проявляющимся при переносе векторных полей из пространства предмета в простран-



ство изображения. Для простоты рассмотрим источник, расположенный на оптической оси центрированной системы. Выберем для пространства предмета сферическую систему координат  $r', \theta', \phi$  с началом в точке расположения источника  $\Gamma_S$ , причем  $\theta' = 0$  соответствует оптической оси в направлении  $z = +\infty$ . Для пространства изображения введем аналогичную систему координат  $r, \theta, \phi$  таким образом, чтобы оптическая ось была направлена в сторону  $z = -\infty$ . В тех случаях, когда на пути луча не происходит потерь на отражение за счет поверхностей разрыва, можно получить простое соотношение, связывающее амплитуды поля в пространстве предмета и изображения для произвольного луча, выходящего из источника в направлении  $\theta', \phi$  и попадающего в точку выходного зрачка с координатами  $\theta, \phi$ . Это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} |E'(\theta, \phi)| &= |E'(\theta', \phi)|(d\Omega'/d\Omega)^{1/2} = |E'(\theta', \phi)|[(\sin \theta' d\theta')/(\sin \theta d\theta)]^{1/2} \\ &\equiv |E'(\theta', \phi)|g(\theta) \end{aligned} \quad (4.13.5)$$

и выражает собой постоянство потока энергии вдоль узкого пучка лучей. (Здесь  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  и  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi$  — телесные углы пучка лучей в пространствах соответственно изображения и предмета.)

Для линзы, удовлетворяющей условию синусов Аббе (см. в книге [11, с. 166 русского издания], цитируемой в гл. 1), можно положить  $\sin \theta' / \sin \theta = M$ , где  $M$  — линейное увеличение, так что  $g(\theta) = M(\cos \theta / \cos \theta')^{1/2}$ . Если источник расположен на бесконечности, то соотношение (4.13.5) принимает вид

$$\begin{aligned} |E'(\theta, \phi)| &= |E(h \cos \phi, h \sin \phi)|[(h dh)/(\sin \theta d\theta)]^{1/2} \equiv \\ &\equiv |E(h \cos \phi, h \sin \phi)|fg_0(\theta), \end{aligned} \quad (4.13.6)$$

где  $h(\theta)$  — высота луча в пространстве предмета, а  $f$  — постоянная, которая играет роль фокусного расстояния. Для системы, удовлетворяющей условию синусов, мы имеем  $h/\sin \theta = f$ ,  $g_0(\theta) = (\cos \theta)^{1/2}$ . Это приближение основано на предположении о том, что падающая плоская волна не изменится до тех пор, пока на ее пути не окажется сферическая поверхность, на которой волна преломляется непосредственно в волну со сходящимся сферическим фронтом, имеющим тот же радиус кривизны, что и сфера (рис. 4.17).

Рассмотрим другой пример, когда преобразование плоской волны в сферическую происходит таким образом, что одинаковые радиальные расстояния от оптической оси преобразуются в равные углы на сфере (*однородная сферическая проекция*). При этом  $h(\theta) = f(\theta)$  и  $g_0(\theta) = (\theta/\sin \theta)^{1/2}$ . По сравнению с апланатической эта проекция позволяет более точно описать свойства системы, состоящей из последовательности тонких линз, когда полная длина оптической системы боль-

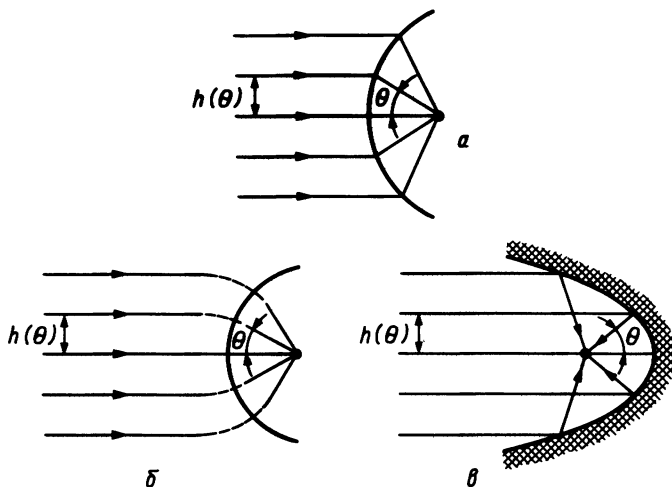


Рис. 4.17. Зависимость от угла  $\theta$  измеряемой относительно оптической оси высоты луча  $h(\theta)$  для апланатической (а), однородной (б) и параболической (в) фокусирующих систем.

ше, чем результирующее фокусное расстояние. Для плоской волны, падающей на параболическое зеркало с фокусным расстоянием  $f$ , нетрудно показать, что  $h(\theta) = 2f(1 - \cos \theta)$  и, следовательно,  $g_0(\theta) = 2/(1 + \cos \theta)$ .

Уравнение (4.13.5) можно переписать в векторной форме (рис. 4.18):

$$\mathbf{E}'(\theta, \phi) = g(\theta)(\hat{\phi}\hat{\phi} + \hat{\theta}\hat{\theta}') \cdot \mathbf{E}'(\theta, \phi). \quad (4.13.7)$$

В случае локализованного на бесконечности источника ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}$ ) это уравнение принимает вид

$$\mathbf{E}'(\theta, \phi) = fg_0(\theta)[\hat{\phi}\hat{\phi} + \hat{\theta}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\phi})] \cdot \mathbf{E}(h \cos \phi, h \sin \phi). \quad (4.13.8)$$

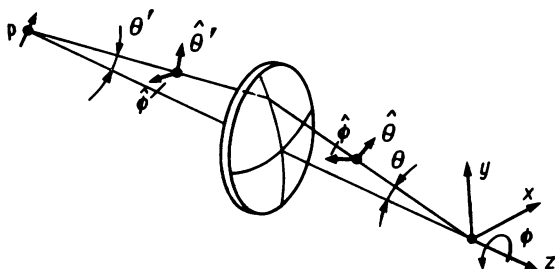


Рис. 4.18. Взаимная ориентация сферических систем координат, относящихся к источнику и изображению, образуемому линзой.

Если поле  $\mathbf{E}'(\theta', \phi)$  излучается диполями  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$  [см. (4.13.2)], то для вакуума уравнение (4.13.7) запишется следующим образом:

$$\mathbf{E}'(\theta, \phi) = (\omega^2 \mu_0 / 4\pi) g(\theta) \{ [\mathbf{p} - \hat{n} \times (\mathbf{m}/c)] \cdot \hat{\phi} \hat{\phi} + (\mathbf{m}/c + \hat{n} \times \mathbf{p}) \cdot \hat{\phi} \hat{\theta} \}. \quad (4.13.9)$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для магнитного поля, которое приближенно выражается через электрическое соотношением [см. (2.8.12)]  $\zeta_0 \mathbf{H}'(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}'(\theta, \phi)$ , где  $\hat{\mathbf{s}}$  — направление распространения поля изображения.

#### 4.13.3. Дифракционный интеграл Лунберга — Дебая

В случае когда поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно представить лучевыми полями, дифракционная формула Коттлера — Кирхгофа (4.3.4) принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cong \frac{i}{\lambda} \iint_{\bar{A}} e^{-ik(R+S)} \mathbf{E}'(\hat{n}_0) d\Omega + \frac{i}{\lambda} \iint_{\bar{A}} e^{-ik(R+S)} (\hat{R} - \hat{n}_0) \times (\mathbf{E}' \times \hat{n}_0) d\Omega + \frac{\zeta_0}{4\pi} \oint_{\partial \bar{A}} \mathbf{H}'(\hat{n}_0) \cdot \hat{l} e^{-ik(R+S)} \frac{\hat{R}}{R^2} dl, \quad (4.13.10)$$

где  $\mathbf{E}'(\hat{n}_0) = \mathbf{E}_0 R$  — вектор, зависящий только от направления луча  $-\hat{n}_0$ , а  $d\Omega = d\bar{A} / R^2$  — телесный угол, которым элемент поверхности  $d\bar{A}$  стягивается к фокусу. При выводе этого выражения из (4.3.4) мы использовали соотношения  $\nabla' G = -ik\hat{R}G$  и  $\mathbf{H}'\zeta = \mathbf{E}' \times \hat{n}_0$ , которые следуют из уравнения (2.8.12). При  $R/\lambda \rightarrow \infty$  последним контурным интегралом можно пренебречь. Аналогично, если волновой фронт, проходящий через центр  $E'$  выходного зрачка  $\bar{A}$ , слабо отличается от опорной сферы, также включающей точку  $E'$  и имеющей центр в гауссовом изображении  $\bar{x}, \bar{y}, 0$  источника (см. разд. 2.15.4), то разность  $\hat{R} - \hat{n}_0$  становится пренебрежимо малой и приведенное интегральное представление принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\bar{A}} e^{-ik(R+S)} \mathbf{E}'(\hat{n}_0) d\Omega. \quad (4.13.11)$$

Выберем декартову систему координат с осью  $z$ , параллельной оптической оси, и пусть плоскость  $z = 0$  совпадает с гауссовым изображением плоскости  $z = z_0 (< 0)$ . Координаты источника равны  $x_0, y_0, z_0$ . Для определения величины  $R + S$ , стоящей в фазовом множителе интеграла (4.13.11), можно воспользоваться гамильтоновой смешанной характеристикой  $W(x_0, y_0, z_0; p, q)$ , построенной с использованием координат источника  $x_0, y_0, z_0$  и направляющих косинусов  $p$  и  $q$  лу-

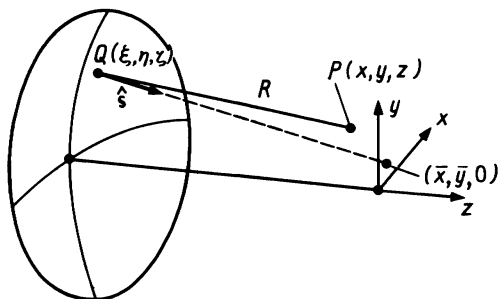


Рис. 4.19. Используемые в разд. 4.13.3 обозначения:  $P(x, y, z)$  — точка, в которой определяется поле;  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  — волновой фронт;  $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  — гауссово изображение.

ча в пространстве изображения (см. гл. 2). Обозначим через  $\xi, \eta, \zeta$  координаты точки волнового фронта  $Q$ , а через  $x, y, z$  — координаты точки  $P$ , в которой определяется поле. При этом мы можем написать следующее выражение (рис. 4.19):

$$S + R = S - (p\xi + q\eta + r\zeta) + (p\xi + q\eta + r\zeta) + [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}, \quad (4.13.12)$$

где  $p = -n_{0x}$ ,  $q = -n_{0y}$ ,  $r = -n_{0z}$  — направляющие косинусы луча, проходящего через точку  $\xi, \eta, \zeta$ . Поскольку волновой фронт образуется точечным источником с координатами  $x_0, y_0, z_0$ , эйконал  $S(\xi, \eta, \zeta)$  совпадает с точечной характеристикой  $V(x_0, y_0, z_0; \xi, \eta, \zeta)$ , и мы имеем

$$S - (p\xi + q\eta + r\zeta) = V(x_0, y_0, z_0; \xi, \eta, \zeta) - (p\xi + q\eta + r\zeta) = W(z_0, z_1; x_0, y_0, p, q); \quad (4.13.13)$$

здесь  $W$  не зависит от конкретного выбора волнового фронта (напомним, что  $W$  представляет собой длину оптического пути между точечным объектом и основанием перпендикуляра, опущенного из точки  $x = y = z = 0$  на луч).

Для точек наблюдения  $P(x, y, z)$ , близких к гауссовому изображению  $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  источника, имеем (рис. 4.19)

$$\begin{aligned} & [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2} \cong \\ & \cong [(\xi - \bar{x})^2 + (\eta - \bar{y})^2 + \zeta^2]^{1/2} + p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y}) + rz + \\ & + \frac{1 - p^2}{2R}(x - \bar{x})^2 + \frac{1 - q^2}{2R}(y - \bar{y})^2 + \frac{1 - r^2}{2R}z^2 \cong \\ & \cong p(x - \xi) + q(y - \eta) + r(z - \zeta) + \\ & + \frac{1 - p^2}{2R}(x - \bar{x})^2 + \frac{1 - q^2}{2R}(y - \bar{y})^2 + \frac{1 - r^2}{2R}z^2. \end{aligned} \quad (4.13.14)$$

Отсюда с помощью (4.13.12) и (4.13.13) получаем

$$S(\xi, \eta, \zeta) + R(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = W(z_0, z_1; x_0, y_0, p, q) + px + qy + rz + \\ + \frac{1-p^2}{2R}(x-\bar{x})^2 + \frac{1-q^2}{2R}(y-\bar{y})^2 + \frac{1-r^2}{2R}z^2. \quad (4.13.15)$$

Используя введенную ранее функцию aberrаций  $W_0$  [см. выражение (2.15.31)], можно записать

$$W(z_0, z_1; x_0, y_0, p, q) = V(x_0, y_0, z_0; \bar{x}, \bar{y}, 0) - p\bar{x} - q\bar{y} + W_0(x_0, y_0, z_0; p, q, r), \quad (4.3.16)$$

что позволяет представить сумму (4.13.15) в виде

$$S + R = V_0 + p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y}) + rz + W_0 + \\ + \frac{p^2 + q^2}{2R}z^2 + \frac{1-p^2}{2R}(x - \bar{x})^2 + \frac{1-q^2}{2R}(y - \bar{y})^2, \quad (4.3.17)$$

где  $V_0 = V(x_0, y_0, z_0; \bar{x}, \bar{y}, 0)$ .

Следует заметить, что

$$\frac{k}{2R} [(1-p^2)(x-\bar{x})^2 + (1-q^2)(y-\bar{y})^2] \leq \frac{\pi \rho_{\max}^2}{\lambda R} = \pi N_{\max}, \quad (4.13.18)$$

здесь  $\rho_{\max}$  — радиус круговой области, в которой содержится практически все фокальное изображение, а  $N_{\max}$  — относительное число Френеля, равное *видимому из выходного зрачка числу колец Френеля, содержащихся в круге* площадью  $\pi \rho_{\max}^2$ . Можно показать, что  $N_{\max}$  по порядку величины равно обратному числу Френеля  $N_e$ , вычисленному для выходного зрачка при наблюдении из фокуса. Поэтому в случае  $N_e \gg 1$  при вычислении экспоненты в (4.13.11) можно пренебречь левой частью в (4.13.18). Аналогично можно написать, что  $k(p^2 + q^2)z^2/(2R) < \bar{u}_{\max}^2/N_e$ , где  $\bar{u}_{\max} = k|z_{\max}| \text{ ЧА}^2$  [см. ниже выражения (4.13.21)], а  $|z_{\max}|$  — максимальное рассматриваемое расстояние от фокуса. Так как  $\bar{u}_{\max}$  имеет порядок величины  $10^2$ , в записанном выше неравенстве можно также пренебречь левой частью. Однако в случае когда  $N_e \sim 1$ , наличие в (4.13.17) слагаемого, пропорционального  $z^2$ , приводит к сдвигу фокуса по сравнению с построением геометрической оптики [см. ниже выражение (4.13.37)]. Если поле определяется в точке, столь близко расположенной к гауссову изображению, что в (4.13.17) можно пренебречь тремя последними членами, то выражение (4.13.11) преобразуется в интеграл *Лунберга — Дебая*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ie^{-ikV_0}}{\lambda} \iint_A \mathbf{E}'(\hat{n}_0) \exp[-ikW_0 - ik(p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y}) + rz)] d\Omega. \quad (4.13.19)$$

Эквивалентное выражение для  $\mathbf{H}$  получается заменой  $\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{E}' \times \hat{\mathbf{n}}_0/\zeta_0$ .

Если точка наблюдения  $\mathbf{r}$  достаточно близка к началу координат, то телесный угол  $d\Omega$ , которым элемент волнового фронта стягивается к фокусу  $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ , можно заменить телесным углом, которым этот элемент стягивается к началу координат  $(0, 0, 0)$ . В этом случае, если выбрать систему координат такой, чтобы углу  $\theta = 0$  соответствовало направление  $z = -\infty$ , то последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ie^{-ikV_0}}{\lambda} \iint_{2\pi} P(\theta, \phi) \mathbf{E}'(\theta, \phi) \exp[-ikW_0 + ik\rho \sin(\theta) \cos(\phi - \psi)] \times \\ \times \exp[-ik \cos(\theta)z] \sin(\theta) d\theta d\phi, \quad (4.13.20)$$

где функция зрачка  $P$  равна единице на апертуре и нулю при всех других углах (см. разд. 4.5) и, кроме того,  $x - \bar{x} = \rho \cos \psi$ ,  $y - \bar{y} = \rho \sin \psi$ ,  $p = -\sin \theta \cos \phi$ ,  $q = -\sin \theta \sin \phi$ ,  $r = \cos \theta$  (не следует путать обозначения направляющих косинусов  $r$  со сферической координатой).

Теперь удобно ввести *оптические координаты*  $v$ ,  $\bar{u}$ , определяемые выражениями [см. (2.15.28)]

$$v = k\rho \text{ ЧА}, \quad \bar{u} = kz \text{ ЧА}^2, \quad (4.13.21)$$

где  $\text{ЧА} = \sin \theta_{\text{макс}}$  — *числовая апертура*, причем  $\theta_{\text{макс}}$  — половина апертурного угла в пространстве изображения (в гл. 8 мы покажем, что координата  $v$  играет важную роль в теории распространения электромагнитных волн в оптическом волокне; в связи с этим ее называют *нормализованной частотой* и обозначают через  $V$ ). При этом интеграл Луненберга — Дебая можно переписать таким образом, что он не будет зависеть от  $z$  и  $\rho$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(-ikV_0)}{\lambda} \iint_{2\pi} P(\theta, \phi) \mathbf{E}'(\theta, \phi) \times \\ \times \exp \left[ -ikW_0 + iv \frac{\sin(\theta) \cos(\phi - \psi)}{\text{ЧА}} - i\bar{u} \frac{\cos(\theta)}{\text{ЧА}^2} \right] \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (4.13.22)$$

При достаточно малых числовых апертурах это выражение принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(-ikV_0 - i\bar{u}/\text{ЧА}^2)}{\lambda} \text{ЧА}^2 \iint P(\Theta, \phi) \mathbf{E}'(\Theta, \phi) \times \\ \times \exp \left[ -ikW_0 + iv\Theta \cos(\phi - \psi) + i\bar{u} \frac{\Theta^2}{2} \right] \Theta d\Theta d\phi, \\ P(\Theta, \phi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \Theta > 1, \\ 1 & \text{при } \Theta < 1, \end{cases} \quad (4.13.23)$$

где  $\Theta \equiv \theta/\text{ЧА}$ . Если линза не имеет aberrаций ( $W_0 = 0$ ), то поле в фокальной плоскости  $\Pi(\bar{u} = 0)$  имеет вид преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} E(x, y, 0) &= \frac{ie^{-ikV_0}}{\lambda f_1^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x', y') E'(x', y', -f_1) \exp\left(ik \frac{xx' + yy'}{f_1}\right) dx' dy' = \\ &= \frac{ie^{-ikV_0}}{\lambda f_1^2} F\left[P(x', y') E'(x', y', -f_1); k \frac{x}{f_1}, k \frac{y}{f_1}\right]. \end{aligned} \quad (4.13.24)$$

Здесь при переходе от (4.13.22) к (4.13.24) мы использовали соотношение  $\sin\theta d\theta d\phi \equiv dx' dy' / f_1^2$ , где фокусное расстояние  $f_1$  совпадает с расстоянием от выходного зрачка до фокуса.

В том же параксиальном приближении поле  $E'_2$  во входной плоскости еще одной линзы, у которой передняя фокальная плоскость совпадает с  $\Pi$  (рис. 4.20), является в свою очередь фурье-преобразованием распределения поля в плоскости  $\Pi$  и, таким образом, воспроизводит распределения поля  $E'$  на выходном зрачке первой линзы. Однако если в плоскости  $\Pi$  расположен транспарант, изменяющий амплитудное и фазовое распределение, то поле в этой плоскости умножается на соответствующую функцию  $t(x, y)$  и поля  $E'_2$  и  $E'$  не совпадают друг с другом. При этом поле  $E'_2$  пропорционально свертке  $E'$  с фурье-образом функции  $t(x, y)$  и записывается в виде

$$E'_2(x'', y'') = \iint_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x''}{M} - x', \frac{y''}{M} - y'\right) E'(x', y') dx' dy', \quad (4.13.25)$$

где  $M = f_2/f_1$  — увеличение (см. гл. 2) афокальной системы ( $f_2$  — фокусное расстояние второй линзы; рис. 4.20) (см. гл. 2), а

$$K(\xi, \eta) = F[t(x, y); k\xi/f_2, k\eta/f_2] \quad (4.13.26)$$

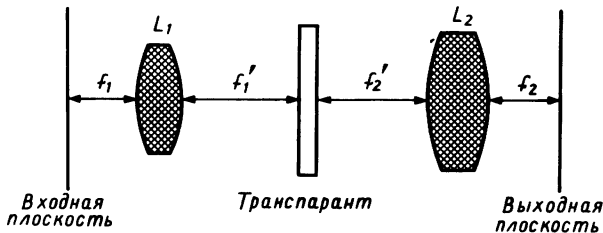


Рис. 4.20. Схематическое представление афокальной оптической системы, включающей в себя транспарант. Изображение точки  $x', y'$  во входной плоскости описывается функцией  $K(x/M - x', y/M - y')$  [см. выражение (4.13.25)]. В этой системе  $M = f_2/f_1$ .

Следовательно, каждый транспарант соответствует вполне определенному линейному интегральному преобразованию поля  $\mathbf{E}'$ . Это свойство используется, в частности, для преобразования полей  $\mathbf{E}'$  с однородной интенсивностью и неоднородной фазой в поля  $\mathbf{E}''$  с неоднородной интенсивностью. Таким образом, возможна визуализация фазовых изменений. Этот метод впервые был предложен Цернике (метод фазового контраста, метод полос или метод теневого изображения). Высокой степени развития достигли другие методы, служащие улучшению качества изображения и использующие корреляцию оптического сигнала, которые привели к возникновению новой области когерентной оптики [25, 26]. (Дополнительные подробности по этому вопросу изложены в разд. 4.15.)

#### 4.13.4. Фокусировка линейно-поляризованных плоских волн

На основе полученных выше результатов мы изучим здесь поведение поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в фокальной области апланатической линзы (см. гл. 2) в тех случаях, когда источник излучает линейно-поляризованное поле  $\mathbf{E}_i$  [24, 27, 28]. Для этого подставим правую часть выражения (4.13.8) в (4.13.22) и, таким образом, для круглого зрачка с полуапертурой  $\theta_{\text{макс}}$  получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{if}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_{\text{макс}}} \sin \theta g_0(\theta) \times \\ & \times \exp \left[ -ikW_0 + iv \frac{\sin \theta \cos(\phi - \psi)}{NA} - i\bar{u} \frac{\cos \theta}{NA^2} \right] \times \\ & \times [\hat{\phi}\hat{\phi} + \hat{\theta}(\hat{z} \times \hat{\phi})] \cdot \mathbf{E}_i d\theta. \end{aligned} \quad (4.13.27)$$

Здесь мы опустили несущественный фазовый множитель  $\exp(-ikV_0)$ . Если вектор  $\mathbf{E}_i$  параллелен оси  $x$ , то мы имеем

$$[\hat{\phi}\hat{\phi} + \hat{\theta}(\hat{z} \times \hat{\phi})] \cdot \mathbf{E}_i = \{[\cos \theta + (1 - \cos \theta) \sin^2 \phi] \hat{x} + (1 - \cos \theta) \sin \phi \cos \phi \hat{y} + \sin \theta \cos \phi \hat{z}\} \mathbf{E}_i. \quad (4.13.28)$$

Подставляя выражение (4.13.28) в (4.13.27) и предполагая, что амплитуда излучаемого поля зависит только от расстояния  $h$ , т. е.  $\mathbf{E}_i = E_i(f \sin \theta)$ , можно показать, что поле  $\mathbf{E}$  удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E} = iA \{ [I_0 + I_2 \cos(2\psi)] \hat{x} + I_2 \sin(2\psi) \hat{y} + 2iI_1 \cos \psi \hat{z} \}, \quad (4.13.29)$$

где  $A = \pi f E_i(0) / \lambda$  и

$$I_i(\bar{u}, v; \theta_{\text{макс}}) = \int_0^{\theta_{\text{макс}}} g_0(\theta) f(\theta) b_i(\theta) J_i \left( \frac{v \sin \theta}{\sin \theta_{\text{макс}}} \right) \exp \left( -i\bar{u} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta_{\text{макс}}} - ikW_0 \right) d\theta. \quad (4.13.30)$$



Здесь предполагается, что величины  $f(\theta) = E_i(\theta)/E_i(0)$ ,  $b_0 = \sin\theta(1 + \cos\theta)$ ,  $b_1 = \sin^2\theta$ ,  $b_2 = \sin\theta(1 - \cos\theta)$  и  $W_0$  зависят только от  $\theta$ . В частности, для  $u = 0$ , т. е. в фокальной плоскости  $z = 0$ , и для  $W_0 = 0$  (линз без aberrаций) все три интеграла  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$  вещественны, а компонента  $E_z$  сдвинута по фазе на  $90^\circ$  по сравнению с  $E_x$  и  $E_y$ . Следовательно, поле является эллиптически-поляризованным в плоскости, перпендикулярной фокальной. Кроме того, вдоль оси  $y$  (при  $\psi = \pi/2$ ), т. е. в направлении, перпендикулярном поляризации падающего пучка, поле в фокальной плоскости поляризовано линейно.

На оси системы  $v = 0$  и, как следствие,  $I_1 = I_2 = 0$  из-за равенства нулю величин  $J_1(0)$  и  $J_2(0)$ . Поэтому на оси вращения в пространстве изображения поле поляризовано в том же направлении, что и падающий пучок.

В соответствии с выражением (4.13.29) усредненные по времени плотности энергии электрического  $w_e$  и магнитного  $w_m$  полей записываются в виде

$$w_e(\bar{u}, v, \psi) = (\varepsilon_0/4)|A|^2[|I_0|^2 + 4|I_1|^2 \cos^2\psi + |I_2|^2 + 2\cos(2\psi) \operatorname{Re}(I_0 I_2^*)] = \\ = w_m(\bar{u}, v, \psi + \pi/2). \quad (4.13.31)$$

Буавен и др. [27] вычислили  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  для случая  $f(\theta) = 1$  (однородно облучаемый выходной зрачок),  $g_0(\theta) = (\sin\theta)^{1/2}$  (апланатическая линза) и  $\theta_{\max} = 45^\circ$ . Они обнаружили, что распределение энергии электрического поля в фокальной плоскости несимметрично относительно поворота. Контуры равной энергии при  $v > .4$  приближенно совпадают с эллипсами, главные оси которых направлены вдоль электрического вектора падающей волны. Плотность энергии равна нулю только вдоль меридиональной линии  $\psi = \pi/2$  (т. е. вдоль оси  $y$ ), а в направлении  $\psi = 0$  (ось  $x$ ) имеет последовательность отличных от нуля минимумов. На рис. 4.21 изображены контуры энергии электрического поля в меридиональной плоскости  $\psi = 0$ . Хотя можно показать, что минимумы вдоль оптической оси  $u = 0$  равны нулю при  $\psi = \pi/2$ , в случае  $\psi = 0$  это не так. В фокусе мы имеем  $E_y = E_z = 0$  и

$$E_x^{\max} = iAI_0(0, 0; \theta_{\max}) = (i\pi f/\lambda)E_i \left\{ \frac{2}{3} [1 - (\cos\theta_{\max})^{3/2}] + \frac{2}{5} [1 - (\cos\theta_{\max})^{5/2}] \right\} \quad (4.13.32)$$

Из других результатов можно отметить тот, что при  $\theta_{\max} = 45^\circ$  величина  $E_z$  достигает максимального значения  $0,28 E_x^{\max}$  в азимутальном направлении  $0, \pi$  в точке  $v \cong 2,25$  (примерно половина длины волны от оси). Это означает, что для больших апертур амплитуды продольных составляющих поля почти такие же, как и у поперечных. На рис. 4.21 представлены линии тока усредненного по времени

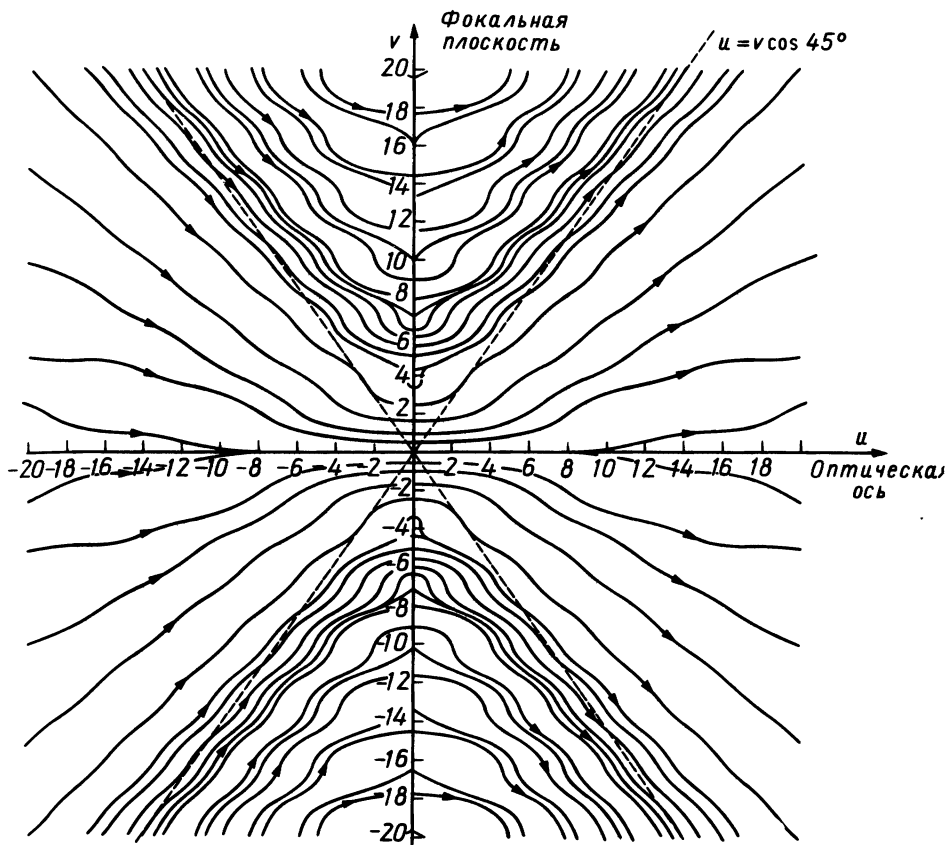


Рис. 4.21. Линии тока вектора Пойнтинга вблизи фокуса апланатической системы с угловой полуапертурой  $45^\circ$ . (Из работы [27].)

вектора Пойнтинга (см. разд. 1.8) для условий освещения, рассмотренных выше. В частности, видно, что вблизи фокальной плоскости эти линии образуют серию завихрений, формирующихся вокруг самой фокальной плоскости.

#### 4.13.5. Фокусировка пучков с малой апертурой

В случае когда углы  $\theta_{\text{макс}}$  достаточно малы ( $\theta_{\text{макс}} \leq 5^\circ$ ), интегралы  $I_1$  и  $I_2$  становятся пренебрежимо малыми, так что поле  $\mathbf{E} \cong iAI_0 \hat{\mathbf{x}}$  оказывается линейно-поляризованным, и скалярная теория дает описание в хорошем приближении. Точнее говоря, если для общности отказаться от предположения о независимости  $W_0$  от  $\phi$ , то выражение (4.13.29) остается в силе при  $I_1 = I_2 = 0$  и использовании вместо  $I_0$  ве-

личины

$$I(\bar{u}, v, \psi; \theta_{\text{макс}}) = \frac{\exp(-i\bar{u}/\theta_{\text{макс}}^2)}{\pi} \theta_{\text{макс}}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ \times \int_0^1 \Theta f(\Theta, \phi) \exp\left[iv\Theta \cos(\phi - \psi) - ikW_0 + i\bar{u}\frac{\Theta^2}{2}\right] d\Theta, \quad (4.13.33)$$

где  $\Theta \equiv \theta/\theta_{\text{макс}}$ ,  $f(\Theta, \phi) \equiv E_i(\Theta, \phi)/E_i(0, 0)$ . Таким образом можно учесть возможную несимметричность относительно вращения начального распределения амплитуды поля. Существенным является вывод о том, что  $I$  оказывается не зависящим от  $\psi$ , если  $f$  и  $W_0$  не зависят от  $\phi$ . Это означает, что начальная симметрия поля сохраняется в фокальной области. Для больших  $\theta_{\text{макс}}$  это неверно, на что указывают стоящие в выражении (4.13.29) множители перед  $I_1$  и  $I_2$ , зависящие от угла.

Для малых чисел Френеля ( $N_e \leq 1$ ) выражение (4.13.33) уже неприменимо. Ли и Вольф в 1984 г. показали, что несмотря на это симметричные относительно вращения поля все же могут быть представлены в виде интегралов, аналогичных (4.13.33). Для этого оптические координаты  $\bar{u}$  и  $v$  нужно заменить на новые величины  $\bar{u}_N = \bar{u}/\{1 + \bar{u}/(2\pi N_e)\}$  и  $v_N = v/\{1 + \bar{u}/(2\pi N_e)\}$ .

Как мы уже показали в разд. 2.15, для малых круглых апертур функция aberrаций сводится к *первичным aberrациям* Зайделя, и мы имеем

$$kW_0 = kW^{(4)}(\theta, \phi) = \frac{BR_4^{(0)}(\theta)}{24} + y_0^2 \frac{CR_2^{(2)}(\theta)}{2} \cos(2\phi) - y_0^2 \frac{DR_2^{(0)}(\theta)}{4} + \\ + y_0^3 ER_1^{(1)}(\theta) \cos \phi + y_0 \frac{FR_3^{(1)}(\theta)}{3} \cos \phi, \quad (4.13.34)$$

причем оси  $x$  и  $y$  мы сориентировали таким образом, чтобы  $x_0 = 0$ . Здесь функции  $R_n^{(m)}(\theta)$  представляют собой полиномы Цернике (см. гл. I в книге [11], цитируемой в гл. 1 настоящей книги), нормированные условием  $R_n^{(m)}(1) = 1$ . Как следствие, коэффициенты  $B, C, D, E$  и  $F$  являются мерой отклонения фазы боковых лучей относительно фазы главного луча. В частности, эти пять коэффициентов описывают соответственно *сферическую aberrацию, астигматизм, кривизну поля, дисторсию* и *кому*.

Интеграл  $I(u, v, \psi, \theta_{\text{макс}})$  вычислял Ниджбоер для различных типов малых первичных aberrаций. Для сферических aberrаций фокальное распределение двумерного поля может быть выражено через функции, исследованные Перси (разд. 5.5). В гл. IX книги Борна и Вольфа [11] (см. гл. 1 настоящей книги) можно найти строгое описание аналитиче-

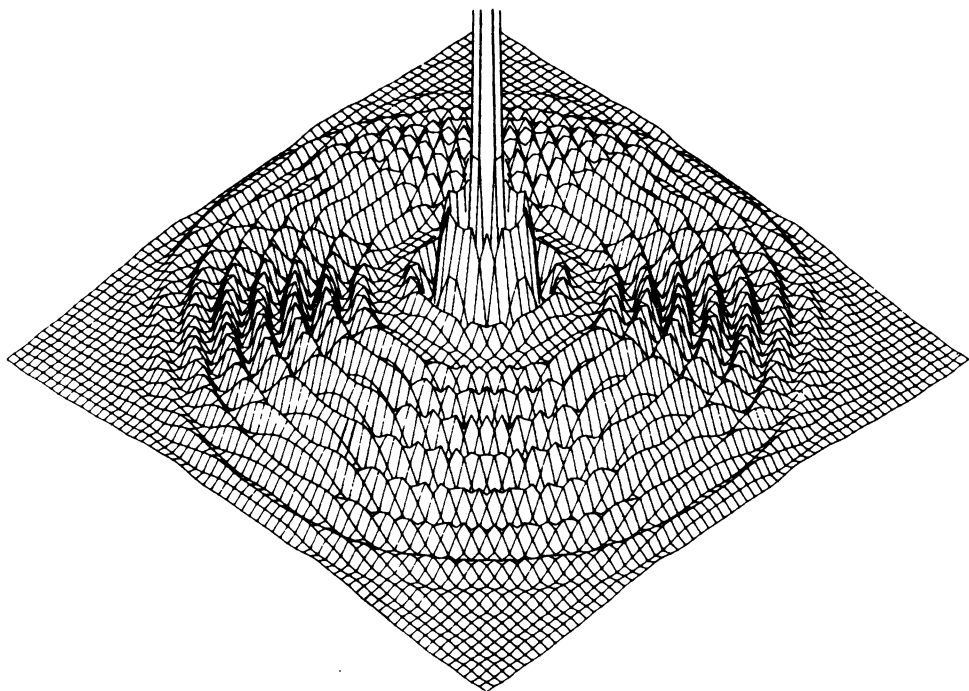


Рис. 4.22. Дифракционная картина при падении плоской волны на кольцевое отверстие, получаемая на расстоянии, соответствующем числу Френеля, равному 15. Отношение внутреннего диаметра к внешнему равно 0,8. Трехмерный график был построен при использовании улучшенного алгоритма быстрого преобразователя Фурье. (Из работы [28а].) © North-Holland, Amsterdam, 1984.

ских методов и специальных функций, используемых для вычисления интеграла  $I$ . Здесь мы хотим лишь подчеркнуть, что в ряде случаев  $I$  можно вычислить с использованием асимптотических формул, рассматриваемых в разд. 5.2 и 5.8. Результат численного расчета распределения интенсивности вблизи фокальной плоскости методом быстрого преобразования Фурье представлен на рис. 4.22.

#### 4.13.6. Распределение поля вдоль оптической оси для гауссова пучка с ограниченной апертурой

Для гауссова пучка ( $f(\theta) = \exp[-\theta^2/(2\delta^2)]$ ), обрезанного при  $\theta = \theta_{\text{макс}}$  в случае  $W_0 = 0$ , можно показать, что на оптической оси  $\rho = \nu = 0$

$$I(\bar{u}, 0; \theta_{\text{макс}}) = |I| \exp[-i\bar{u}/\theta_{\text{макс}}^2 - i\Phi(\bar{u}) - i\pi/2], \quad (14.13.35a)$$

где

$$|I|^2 = 4\theta_{\text{макс}}^4 \frac{\exp(-\theta_{\text{макс}}^2/\delta^2) + 1 - 2 \cos(\bar{u}/2) \exp[-\theta_{\text{макс}}^2/(2\delta^2)]}{\theta_{\text{макс}}^4/\delta^4 + \bar{u}^2}, \quad (4.13.356)$$

$$\Phi(\bar{u}) = -\pi/2 + \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin(\bar{u}/2)}{\exp[\theta_{\text{макс}}^2/(2\delta^2)] - \cos(\bar{u}/2)} \right] - \operatorname{arctg}(\bar{u}\delta^2/\theta_{\text{макс}}^2). \quad (4.13.357)$$

Поведение фазового фактора  $\Phi(u)$  вблизи фокуса  $\bar{u} = 0$  связано с фазовой аномалией поля Гуи, о которой мы уже упоминали в конце разд. 2.9. На рис. 4.23 изображены функции  $\Phi(u)$  для разных значений параметра  $\theta_{\text{макс}}^2/\delta^2$ . Для  $\delta \gg \theta_{\text{макс}}$  (однородное освещение)  $\Phi(u)$  представляет собой ступенчатую зависимость с амплитудой скачков  $\pi/2$  около средних значений 0 (при  $u < 0$ ) и  $-\pi$  (при  $u > 0$ ). В противоположном случае ( $\theta_{\text{макс}} \gg \delta$ ) осцилляции исчезают и переход от 0 к  $-\pi$  становится гладким. Это позволяет заключить, что фазовые осцилляции связаны с освещением границы апертуры. В общем случае они становятся несущественными, если поле на выходном зрачке достаточно «сужено» по сравнению с размером зрачка. Во всяком случае убывание  $\Phi(u)$  на  $\pi$  при переходе через фокус соответствует скачку на  $\pi$ , полученному ранее в разд. 2.9 в рамках геометрической оптики.

Интенсивность, пропорциональная  $|I|^2$  в выражении (4.13.356), сводится к зависимостям  $|I(\bar{u} = 0)|^2 [\sin(\bar{u}/4)/(\bar{u}/4)]^2$  при  $\delta/\theta_{\text{макс}} \rightarrow \infty$  (однородное освещение) и  $|I(\bar{u} = 0)|^2/(1 + \bar{u}^2\delta^4/\theta_{\text{макс}}^4)$  при  $\delta/\theta_{\text{макс}} \rightarrow 0$  (большая по сравнению с размером гауссова пятна апертура). Поэтому если мы ограничим максимально допустимую потерю интенсивности при острой фокусировке величиной 20%, то *нормированная глубина резкости*  $\bar{u}_{\text{макс}}$  окажется равной 3,2 для однородного случая и примерно  $0,5\theta_{\text{макс}}^2/\delta^2$  при освещении гауссовым пучком, слабо возмущенным выходным зрачком. Если обозначить через  $N_a = a^2/(\lambda f)$  число

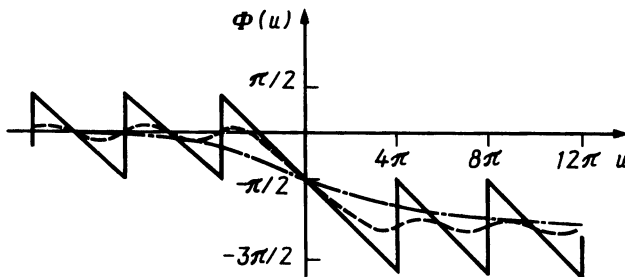


Рис. 4.23. Фазовые аномалии для гауссова пучка вблизи фокуса. Сплошная кривая — однородная волна; штриховая кривая —  $\theta_m^2 = 2\delta^2$ ; штрихпунктирная кривая —  $\theta_m^2 = 6\delta^2$ ; здесь  $\theta_m$  — апертура пучка, ограниченного круглым отверстием, а  $\sqrt{2}\delta$  — эффективная апертура гауссова пучка.

Френеля для видимой из фокуса круглой апертуры радиусом  $a$ , то для однородно освещаемого зрачка глубина резкости запишется в виде

$$\begin{aligned} |z_{\text{макс}}| &= \bar{u}_{\text{макс}} / (k \text{ЧА}^2) = \bar{u}_{\text{макс}} \lambda / (2\pi \sin^2 \theta_{\text{макс}}) = \\ &= \bar{u}_{\text{макс}} \lambda / (2\pi a^2 / f^2) \cong 0,51 f / N_a. \end{aligned} \quad (4.13.36)$$

Если  $N_e$  мало, то глубина резкости сравнима с  $f$ , что противоречит нашему неявному начальному предположению о локализации фокальной области вдали от волнового фронта. Ли и Вольф [29] [см. также работы Эркилы (1981) и Ли и Вольфа (1984), приведенные в библиографии к данной главе] тщательно исследовали эту задачу и показали, что максимум интенсивности достигается на расстоянии  $z$  от гауссова изображения, причем

$$z \cong -f / (1 + 0,82N_e^2). \quad (4.13.37)$$

#### 4.13.7. Распределение поля в фокальной плоскости для гауссова пучка с ограниченной апертурой

В оптической системе без aberrаций ( $W_0 = 0$ ), освещаемой гауссовым пучком, обрезанным при  $\theta = \theta_{\text{макс}}$ , в случае малых  $\theta_{\text{макс}}$ , для которых были получены все результаты предыдущего раздела, изображение в фокальной плоскости ( $\bar{u} = 0$ ) записывается в виде

$$I(0, v; \theta_{\text{макс}}) = 2\theta_{\text{макс}}^2 \int_0^1 f(\Theta) J_0(v\Theta) \Theta d\Theta, \quad (4.13.38)$$

что нетрудно получить с помощью выражения (4.13.30). Для гауссова пучка (см. работу Федорова и др. (1984), приведенную в библиографии к данной главе), имеющего вид

$$f(\Theta) = \exp[-\Theta^2 \theta_{\text{макс}}^2 / (2\delta^2)],$$

можно использовать разложение (10.2.37) из гл. II справочника Стегана и Абрамовица [4] (см. литературу к гл. 2 настоящей книги) и записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\Theta^2 \theta_{\text{макс}}^2}{2\delta^2}\right) &= \exp\left(-\frac{\theta_{\text{макс}}^2}{4\delta^2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\theta_{\text{макс}}^2}{4\delta^2}\right)(2\Theta^2 - 1)\right] = \\ &= \exp\left(-\frac{\theta_{\text{макс}}^2}{4\delta^2}\right) \left(\frac{2\pi\delta^2}{\theta_{\text{макс}}^2}\right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n I_{n+1/2}\left[\frac{\theta_{\text{макс}}^2}{4\delta^2}\right] R_{2n}^{(0)}(\Theta), \end{aligned} \quad (4.13.39)$$

где  $I_{n+1/2}$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $n+1/2$ ; здесь мы использовали соотношение между полиномами Цернике и Лежандра, а именно  $R_{2n}^{(0)}(\Theta) = P_n(2\Theta^2 - 1)$ . Подставляя разложение

(4.13.39) в выражение (4.13.38) и используя результат задачи 27, имеем

$$\frac{I(0, v; \theta_{\max})}{I(0, 0; \theta_{\max})} \equiv K(v) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{I_{n+1/2}[\theta_{\max}^2/(4\delta^2)] J_{2n+1}(v)}{I_{1/2}[\theta_{\max}^2/(4\delta^2)] v}, \quad (4.13.40)$$

здесь  $K(v)$  — *импульсный отклик*, который мы обсудим ниже в разд. 4.15. В частности, для  $\theta_{\max}/\delta = 0$  можем написать

$$K(v) = 2J_1(v)/v. \quad (4.13.41)$$

Квадрат величины  $K(v)$  дает известное *распределение Эйри*. Таким образом, распределение интенсивности в фокальной плоскости однородно освещаемой идеальной оптической системы имеет центральное пятно, нормализованный радиус которого  $v_0 = 3,8$  совпадает с первым нулем функции  $J_1(v)$ ; это пятно содержит около 84% всей сфокусированной энергии и называется *диск Эйри*.

#### 4.13.8. Разрешающая способность

Пусть две плоские волны распространяются под углом  $\theta$  друг к другу и образуют дифракционную картину. Если нормализованное расстояние между соответствующими дисками Эйри равно  $v$ , то легко показать, что в параксиальном приближении выполняется соотношение  $v = \pi D\theta/\lambda_0$ , где  $D$  — диаметр выходного зрачка. Общепринято определять предел разрешения как расстояние  $v$ , при котором центр диска Эйри от одного источника совпадает с первым темным кольцом от другого (*критерий разрешения Рэлея*). Это соответствует угловому разрешению

$$\theta_{\min} \cong 1,22\lambda/D. \quad (4.13.42)$$

[Полезно заметить, что оптическая координата  $v$  дается выражением  $v = 2\pi(N_e N_v)^{1/2}$ , где  $N_e$  — число Френеля выходного зрачка, определенное в разд. 4.13.6, а  $N_v$  — число Френеля, относящееся к диску в фокальной плоскости с нормализованным радиусом  $v$ , который наблюдается с выходного зрачка. Число Френеля диска Эйри примерно равно  $N_{\text{Эйри}} = 0,36/N_e$ .] Выражение, аналогичное (4.13.42), можно получить и для микроскопа, применяя рассмотренный выше метод к интегральному представлению [выражение (4.15.6)] изображения предмета, создаваемого на конечном расстоянии изопланатической оптической системой. Оставляя этот вывод читателю, который может воспользоваться несколькими учебниками, мы приведем лишь конечное выражение для предела разрешения микроскопа в плоскости предмета:

$$d_{\min} = 0,61\lambda_0/(n \sin \alpha), \quad (4.13.43)$$

где  $\alpha$  — половинный угол конуса лучей, собираемых линзой из акси-

альной точки предмета,  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме,  $n$  — показатель преломления среды, в которую помещен объектив (воздух или масло).

При выводе критерия Рэлея использовалось существенное предположение о том, что распределение интенсивности изображения двух точек являлось суперпозицией двух соответствующих распределений интенсивности. Это означает, что фазы излучения от двух предметов предполагаются некоррелированными. Хотя для телескопов это условие, как правило, выполняется, в микроскопии оно, вообще говоря, неверно. Эта проблема была подробно рассмотрена с учетом частичной когерентности освещающего предметы излучения, что привело к различным критериям разрешения [30].

#### 4.14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К КОНТУРНЫМ

В тех случаях, когда область поля ограничена апертурой, для удобства вычислений и для более ясного интуитивного представления дифрагированной волны удобно выразить двумерные дифракционные интегралы через интеграл по соответствующим контурам, ограничивающим апертуры. Для этого можно использовать свойства вектора Гельмгольца [выражение (4.2.11)], рассматриваемого в виде функции координаты  $\mathbf{r}'$ , для заданной координаты  $\mathbf{r}$  точки, в которой определяется поле

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' u(\mathbf{r}') - \dot{u}(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (4.14.1)$$

Этот вектор удовлетворяет соотношению  $\nabla' \cdot \mathbf{v} = 0$  [выражение (4.2.12)] в области, не содержащей точки  $\mathbf{r}$  и сингулярностей (источников) поля. Это позволяет ввести *векторный потенциал*  $\mathbf{w}(\mathbf{r}')$  так, чтобы

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{w}(\mathbf{r}') + \nabla' f(\mathbf{r}'), \quad (4.14.2)$$

где  $f$  — функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона  $\nabla^2 f(\mathbf{r}') = 0$  в области, в которой функция  $\mathbf{v}$  регулярна, так что функция  $f$  учитывает сингулярности  $\mathbf{v}$ .

Вектор  $\mathbf{w}$ , разумеется, нельзя определить однозначно. Если добавить к данному  $\mathbf{w}$  градиент произвольной скалярной функции  $h(\mathbf{r}')$ , то ротор нового потенциала  $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \nabla' h$  будет вновь равен  $\nabla' \times \mathbf{w}$ . Как будет ясно в дальнейшем, эта неоднозначность не мешает использовать  $\mathbf{w}$  для определения поля, дифрагированного на апертуре. С помощью (4.14.2) дифракционный интеграл (4.2.10) можно теперь переписать в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \iint_A \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dA = \iint_A [\nabla' \times \mathbf{w}(\mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dA = \\ &= \iint_A \nabla' f(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dA = \oint_{\partial A} \mathbf{w}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} + u'(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.14.3)$$



где использовано предположение о равенстве нулю поля на некоторой поверхности, удаленной от апертуры  $A$ . В этом выражении  $\partial A$  представляет собой границу апертуры  $A$ , ориентированную таким образом, что положительным направлением движения по контуру считается то, при котором обход совершается против часовой стрелки при наблюдении со стороны внешней (по отношению к  $\mathbf{r}$ ) нормали  $\hat{\mathbf{n}}_0$ . Функция  $u(\mathbf{r}')$  зависит от сингулярностей функции  $w(\mathbf{r}')$  на  $A$ . Таким образом, поле  $u(\mathbf{r})$  можно рассматривать как суперпозицию волны, приходящей от границы апертуры, с волной, которая зависит только от поля во внутренней области.

#### 4.14.1. Историческое отступление

Представление поля в виде контурного интеграла основывается на наших интуитивных знаниях о том, какое влияние оказывают границы апертуры. Из эксперимента известно, что при наблюдении из области тени границы освещаемой апертуры кажутся светящимися. Это наблюдение обсуждалось уже Ньютоном, который объяснил его отталкиванием корпускул света границами [И. Ньютон, «Оптика», кн. 3, наблюдение I, рис. 1 и 2]. Позднее Юнг сформулировал волновую теорию, согласно которой дифрагированная волна образуется при отражении падающей волны на элементах границы, вызывающей дифракцию. Френель же объяснял дифракционные эффекты на основе принципа Гюйгенса; если поле определяется в столь далекой области от геометрической тени, что открыты фактически все зоны Френеля (см. разд. 4.2.2), то освещенность остается той же самой, что и в отсутствие препятствий. И наоборот, если поле определяется в точке, лежащей глубоко в области геометрической тени, то вклад от колец низкого порядка отсутствует. Как следствие, сумма вкладов от частично освещенных колец равна приблизительно нулю, поскольку поле каждого из них компенсируется входящими с другим знаком полями от половинок ближайших соседей. В промежуточной области между светом и тенью из-за суперпозиции полей от разных колец можно ожидать осциллирующего поведения интенсивности.

В 1896 г. Зоммерфельд [31] получил строгое решение задачи о дифракции на полуплоскости. Используя его результат, можно показать, что суммарное поле состоит из волны, полученной в приближении геометрической оптики, и волны, дифрагированной на границе. Впоследствии, в 1917 г., Рабинович заново рассчитал скалярный дифракционный интеграл для произвольной апертуры, освещенной сферической волной, а также показал, что его можно представить в виде интеграла

по контуру и поля, полученного в приближении геометрической оптики.

Параллельно этим исследованиям Келлер с успехом обобщил понятие луча, включив в рассмотрение и лучи, дифрагированные на границе апертуры. Келлер вывел свои результаты, исходя из обобщенного принципа Ферма, применимого для лучей, попадающих в точку наблюдения с границы апертуры, и, подчеркивая геометрическую основу такого подхода, назвал его *геометрической теорией дифракции* (см. гл. 6). Эта теория оказала значительное влияние на современную теорию дифракции, позволив, в частности, выйти за пределы скалярной теории и отказаться от приближения Кирхгофа, состоящего в предположении о том, что поле на апертуре равно своему значению в отсутствие экрана при наличии тех же источников. Кроме того, геометрическая теория дифракции позволяет учесть различные возможные формы и электрические свойства клиньев (кромки), ограничивающих апертуру. Эта теория применима также для описания дифракции на гладких препятствиях, освещаемых скользящим пучком, т. е. она применима в случаях, когда возбуждаются поверхностные волны.

#### 4.14.2. Векторный потенциал сферических волн

Рассмотрим векторное поле Гельмгольца  $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$  и расположим начало координат в точке наблюдения  $P$ . Нетрудно доказать, что [33]

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{w}(\mathbf{r}') + u(0) \nabla' \left( \frac{1}{4\pi r'} \right). \quad (4.14.4)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}') = - \int_{0^+}^1 t \mathbf{r}' \times \mathbf{v}(t\mathbf{r}') dt. \quad (4.14.5)$$

Действительно, вычисляя ротор вектора  $\mathbf{w}$ , получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{w} &= - \int_{0^+}^1 t \nabla' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{v}(t\mathbf{r}')] dt = \int_{0^+}^1 t \left[ 2\mathbf{v}(t\mathbf{r}') + t \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t\mathbf{r}') \right] dt = \\ &= t^2 \mathbf{v}(t\mathbf{r}') \Big|_{0^+}^1 = \mathbf{v}(\mathbf{r}') - 0^+ \mathbf{v}(\mathbf{r}'0^+) = \mathbf{v}(\mathbf{r}') - u(0) \nabla' \left( \frac{1}{4\pi r'} \right), \end{aligned} \quad (4.14.6)$$

где использовано определение (4.14.1) и векторное тождество

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{r} \times \mathbf{v}(t\mathbf{r})] &= [\mathbf{v}(t\mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{r} - \mathbf{v}(t\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t\mathbf{r}) + \mathbf{r} [\nabla \cdot \mathbf{v}(t\mathbf{r})] = \\ &= \mathbf{v}(t\mathbf{r}) - 3\mathbf{v}(t\mathbf{r}) - t \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t\mathbf{r}) = -2\mathbf{v}(t\mathbf{r}) - t \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.14.7)$$

Применяя затем выражение (4.14.1), т. е. записывая

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') = -u(\mathbf{r}') \nabla' [e^{-ikr'}/(4\pi r')] + [e^{-ikr'}/(4\pi r')] \nabla' u(\mathbf{r}'), \quad (4.14.8)$$

с помощью подстановки этого выражения в (4.14.5) нетрудно показать, что

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}') = -\frac{\hat{\mathbf{r}}'}{4\pi} \times \int_0^1 e^{-iktr'} \nabla u(tr') dt. \quad (4.14.9)$$

В случае когда поле создается сферической волной, выходящей из точки  $\mathbf{R}_s$ ,  $u(tr') = \exp(-iks)/(4\pi s)$ , где  $\mathbf{s} = tr' - \mathbf{R}_s$  и  $s = |\mathbf{s}|$  является функцией величины  $t$ . Поскольку  $\hat{\mathbf{r}}' \times \hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{R}_s \times \mathbf{r}')/(sr')$ , выражение (4.14.9) преобразуется к виду

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{R}_s \times \mathbf{r}'}{(4\pi r')^2} \int_0^1 e^{-iktr'} \frac{r'}{s} \left( \frac{d}{ds} \frac{e^{-iks}}{s} \right) dt. \quad (4.14.10)$$

Далее можно показать, что подынтегральное выражение в этой формуле является полным дифференциалом (см. гл. I в книге Борна и Вольфа [11], с. 410 русского издания, цитируемой в литературе к гл. I настоящей книги):

$$e^{-iktr'} \frac{r'}{s} \frac{d}{ds} \frac{e^{-iks}}{s} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{-ik(tr'+s)}}{s^2(1+\cos\theta)} \right], \quad (4.14.11)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{r}'$  (рис. 4.24). Отсюда следует, что

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{s}'}{r's' + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'} \frac{e^{-ik(r'+s')}}{4\pi r's'} - \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{R}_s}{r'R_s - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{R}_s} \frac{u(0)}{4\pi r'}, \quad (4.14.12)$$

где  $\mathbf{s}' = \mathbf{r}' - \mathbf{R}_s$ . Векторный потенциал становится сингулярным, если точка  $\mathbf{r}'$  лежит на векторе  $\mathbf{R}_s$ , соединяющем источник с точкой наблюдения  $P$ . Таким образом, функция  $w$  сингулярна только в тех случаях, когда  $\mathbf{r}$  лежит в области, достижимой лучами, выходящими из источника и проходящими сквозь апертуру.

Используя затем простые векторные преобразования, можно показать, что

$$\nabla' \times \left( \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{R}_s}{r'R_s - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{R}_s} \frac{1}{4\pi r'} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{4\pi r'} \right), \quad (4.14.13)$$

так что выражение (4.14.4) можно заменить на  $\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{w}_0$ , где  $\mathbf{w}_0 = -(\mathbf{r}' \times \mathbf{s}') e^{-ik(r'+s')} [4\pi r's' (r's' + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}')]^{-1}$ . Используя цилиндрическую систему координат, у которой ось  $z$  параллельна вектору  $-\mathbf{R}_s$ , мы имеем (рис. 4.24, б)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \nabla' \times [w_0(\rho, z) \hat{\phi}] = -(\partial w_0 / \partial z) \hat{\rho} - (1/\rho)(\partial / \partial \rho)(\rho w_0) \hat{\mathbf{n}}_0, \quad (4.14.14)$$

где  $\hat{\phi} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\rho}$  — единичный вектор, перпендикулярный оси  $z$  и вектору  $\hat{\rho}$ , а  $\hat{\mathbf{n}}_0 = -\hat{\mathbf{R}}_s$ . Кроме того, рассмотрим диск  $\hat{\Delta}$ , имеющий радиус  $\rho^*$ , перпендикулярный вектору  $\mathbf{R}_s$  и расположенный в точке пересече-

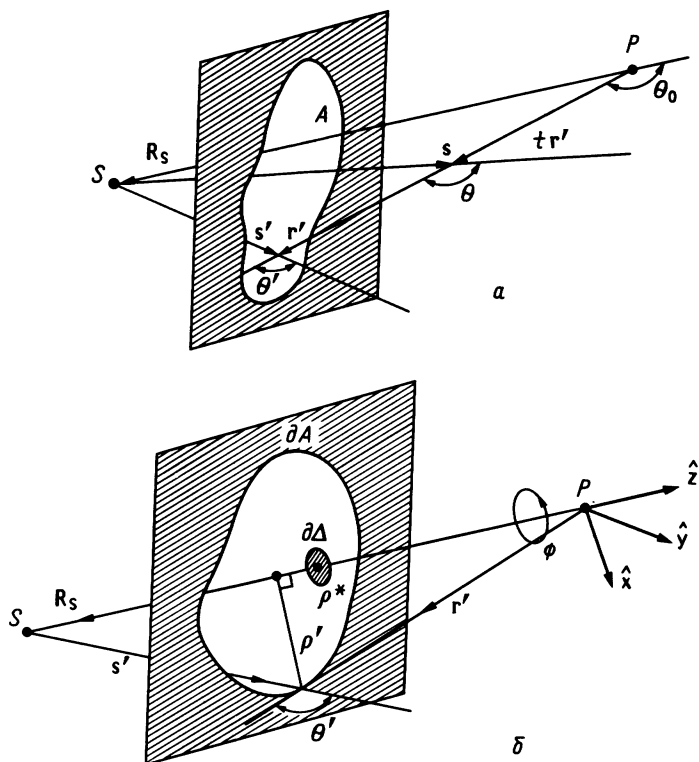


Рис. 4.24. Геометрические представления, связанные с преобразованием поверхностного дифракционного интеграла к интегралу по контуру.

ния  $R_s$  с апертурой. Тогда с помощью (4.14.14) можно написать интеграл

$$\iint_{\Delta} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS = 2\pi\rho^* w_0(\rho^*, z) - 2\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho w_0(\rho, z), \quad (4.14.15)$$

который стремится к нулю при  $\rho^* \rightarrow 0$ . С учетом этих результатов мы имеем [см. (4.14.4)]

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{A}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS &= \iint_{\bar{A}-\bar{\Delta}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS + \iint_{\bar{\Delta}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS = \\ &= \oint_{\partial \bar{A}} \mathbf{w}_0 \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\partial \bar{\Delta}} \mathbf{w}_0 \cdot d\mathbf{l} + \iint_{\bar{\Delta}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS, \end{aligned} \quad (4.14.16)$$

Здесь при наблюдении из точки  $P$  обход по замкнутым контурам  $\partial\bar{A}$  (граница апертуры) и  $\partial\bar{\Delta}$  (граница диска) производится против часовой стрелки. Если  $\rho^* \rightarrow 0$ , то

$$\iint_{\bar{A}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS = \oint_{\partial\bar{A}} \mathbf{w}_0 \cdot d\mathbf{l} - \lim_{\rho^* \rightarrow 0} \oint_{\partial\bar{\Delta}} \mathbf{w}_0 \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\partial\bar{A}} \mathbf{w}_0 \cdot d\mathbf{l} + 2\pi \lim_{\rho^* \rightarrow 0} \rho^* w_0(\rho^*, z). \quad (4.14.17)$$

Последнее выражение следует из определения  $w_0$ , использованного в (4.14.14).

Кроме того, для вектора  $\mathbf{r}'$ , соединяющего точку  $P$  с границей диска  $\partial\bar{\Delta}$ , имеем  $|\mathbf{r}' \times \mathbf{s}'| = R_s \rho^*$ , так что можно написать

$$2\pi \rho^* w_0 = \frac{1}{2R_s} \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{s}'|^2}{r's' + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'} \frac{e^{-ik(r'+s')}}{4\pi r's'} \xrightarrow{\rho^* \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi R_s} e^{-ikR_s}. \quad (4.14.18)$$

Наконец, переходя к сферическим координатам, получаем окончательное выражение:

$$\begin{aligned} u(P) &\equiv u(\mathbf{r}) = \iint_{\bar{A}} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}_0 dS = \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2 R_s} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta') e^{-ik(r'+s')} d\phi + C \frac{e^{-ikR_s}}{4\pi R_s} \equiv u_b(P) + u_g(P) \end{aligned} \quad (4.14.19)$$

где  $\phi$  — угловая координата, соответствующая вращению против часовой стрелки вектора  $\mathbf{r}'$ , соединяющего точку наблюдения  $P$  с границей апертуры, а  $\theta'$  — угол, образуемый векторами  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{s}'$ . Множитель  $C$  равен единице в освещенной в приближении геометрической оптики зоне и нулю в области тени и определяет таким образом поле  $u_g$ . Мы показали, что результирующее выражение (4.14.19) получается из выражения (4.14.17), причем

$$\frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{s}') \times d\mathbf{l}'}{r's'(r's' + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}')} = -\frac{R_s \rho'^2 d\phi}{(r's')^2 (1 + \cos \theta')} = -\frac{1 - \cos \theta'}{R_s} d\phi, \quad (4.14.20)$$

где все переменные со штрихом относятся к границе апертуры. Поле  $u_b(P)$  представляет собой вклад волны, дифрагировавшей на границе.

В тех случаях, когда сферическая волна сводится к плоской [ $\exp(-ik \cdot \mathbf{r}')$ ], можно показать, что выражение (4.14.19) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = C e^{-ik \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta') e^{-ikr'(1 + \cos \theta')} d\phi \equiv u_g + u_b. \quad (4.14.21)$$

С физической точки зрения поле в  $\Gamma$  представляет собой суперпозицию поля  $u_g$  в отсутствие экрана и поля *границной дифрагированной волны* (ГДВ), распространяющейся от краев апертуры. В области те-

ни первое слагаемое в (4.14.21) исчезает, так что полное поле совпадает с  $u_b$ .

Применимость данных выше выражений строго доказана для сферических волн. Однако можно показать [32], что они могут быть использованы для оптических лучей в пределе малых длин волн. В разд. 5.10 мы будем пользоваться ГДВ-представлением полей, дифрагированных на апертуре, для получения асимптотического разложения в пределе малых длин волн.

#### 4.15. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИ КОГЕРЕНТНОМ И НЕКОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

Идеальную систему формирования изображения математически можно описать как отображение точек из плоскости предмета  $\Pi_0$ , расположенной в *пространстве предмета*  $\Sigma_0$ , в точки плоскости  $\Pi_1$  в *пространстве изображения*  $\Sigma_1$ . В присутствии аберраций для конечных длин волн и ограниченного зрачка одиночный точечный источник, расположенный в точке  $(x_0, y_0)$ , образует распределение поля  $K(x, y; x_0, y_0)$ , называемое *импульсным откликом*<sup>1)</sup>, который отличается от дельта-функции  $\delta^{(2)}(x - \bar{x}, y - \bar{y})$ , имеющей ненулевое значение в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  гауссова изображения предмета. Это означает, что аберрации и дифракция нарушают взаимно-однозначное соответствие между  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$ . Если же с помощью высококачественных составных линз и уменьшения апертуры инструментального зрачка удастся исключить аберрации, то импульсный отклик определяется лишь дифракционными эффектами; в этом случае говорят, что оптическая система является *дифракционно-ограниченной*.

Отличие  $K$  от дельта-функции приводит к определенной неоднозначности при восстановлении предмета по изображению. На это указывает, например, тот факт, что два точечных источника при наблюдении через один оптический прибор различимы по отдельности только в том случае, когда расстояние между ними больше некоторой величины  $W$ . При этом  $W$  можно оценить как поделенный на увеличение размер области в плоскости  $\Pi_1$ , в которой  $K$  существенно отлична от нуля. Как мы увидим ниже, параметр  $W$ , определяющий минимальное разрешимое прибором расстояние, линейно уменьшается с уменьшением длины волны. Таким образом, чем выше частота, тем лучше разрешающая способность. Этим объясняется популярность синхротронных источников, с помощью которых получают высокие

<sup>1)</sup> Функцию  $K(x, y; x_0, y_0)$  называют также *функцией пропускания* (см. книгу Борна и Вольфа [11, с. 442 русского издания], приведенную в литературе гл. 1 настоящей книги). — *Прим. перев.*

потоки энергии в диапазоне УФ, ВУФ и мягких рентгеновских лучей. Это позволило создать системы для получения изображения с разрешением лучше чем 0,1 мкм, т. е. с характерным размером, используемым в микроэлектронике для фотолитографического производства сверхбольших интегральных схем (СБИС), имеющих расстояния между смежными элементами всего лишь  $\sim 0,2$  мкм.

Изображение регистрируется прибором (например, человеческим глазом, фотографической эмульсией, мозаичными твердотельными детекторами микроскопа), который реагирует только на интенсивность. Кроме того, фазы точечных источников, образующих «предмет», в некоторых случаях оказываются пространственно-некоррелированными. В этих случаях линза служит лишь для установления соответствия между *распределениями интенсивности* в двух сопряженных плоскостях. Отличая случаи фазово-коррелированных и некоррелированных источников, мы будем говорить соответственно о *когерентном* и *некогерентном изображении*. В реальной жизни мы часто имеем дело с оптическими полями, которые являются *частично коррелированными*. Например, в микроскопах обычно используется облучение светом, который не полностью когерентен. При этом требуется применение точного анализа, связанного с преобразованием *корреляционных функций* [34] (см. разд. 1.8).

Анализ корреляционных функций стал предметом современной радиометрии, значительное развитие которой за последние 20 лет связано с космическими программами, где необходимы точные радиометрические измерения. В то время как классическая радиометрия основывалась главным образом на измерении средней спектральной плотности излученной энергии, эксперименты по измерению *когерентности первого и второго порядка* (разд. 1.8) открыли новые перспективы, связанные с разработкой систем, в которых используются лазеры. В настоящее время мы находимся на той стадии, когда радиометрия вовлекает в себя *квантовую теорию когерентности*. Это основано на развивающемся начиная с 1963 г. (работы Глаубера [35] и Сударшана [36]) квантостатистическом описании полей излучения. Глаубер ввел в квантовую электродинамику так называемые *когерентные состояния* поля, переходящие при «обращении в нуль» постоянной Планка (что соответствует большому числу фотонов в поле) в классические синусоидальные колебания вектора поля с данной амплитудой и фазой, которые записываются в виде  $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ . Полезным аналитическим методом статистического описания квантованного поля является *P-представление*, которое в классическом пределе соответствует распределению плотности вероятности для ком-

плексной амплитуды  $\alpha = |E_0| \exp(i\phi)$ . Детальное обсуждение теории квантовой когерентности не входит в задачу этой книги. Заинтересованному читателю мы рекомендуем обратиться к соответствующим монографиям и обзорным статьям (см., например, [37—39] и др.).

#### 4.15.1. Импульсный отклик и передаточная функция точки

Пусть единичный точечный источник  $(x_0, y_0, z_0)$  создает сферический волновой фронт, который преобразуется составной линзой в волну, сходящуюся к точке паракиального изображения  $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ . Используя интеграл Луненберга — Дебая (4.13.19), импульсный отклик  $K(x, y; x_0, y_0)$  в плоскости  $\Pi_1$  можно записать через интеграл по поверхности волнового фронта сходящейся волны следующим образом:

$$K(x, y; x_0, y_0) = \exp(-ikV_0) \iint P(p, q) A(p, q) \times \\ \times \exp[i(v_x p + v_y q) - ikW_0(p, q; x_0, y_0)] dp dq, \quad (4.15.1)$$

где  $v_x = k(x - \bar{x})\text{ЧА}$  и  $v_y = k(y - \bar{y})\text{ЧА}$  — оптические координаты точки  $(x, y)$  относительно паракиального изображения  $(\bar{x}, \bar{y})$ , ЧА — числовая апертура линзы в пространстве изображения,  $P$  — функция зрачка, а  $p$  и  $q$  пропорциональны направляющим косинусам нормали к сходящемуся волновому фронту в пространстве изображения, причем  $p^2 + q^2 = 1$  на окружности наибольшего диаметра, содержащейся в выходном зрачке. Функция аберраций  $W_0$  равна расстоянию от истинного волнового фронта на выходном зрачке до гауссовой опорной сферы (см. разд. 2.15.4), выбранной таким образом, чтобы  $W_0 = 0$  для лучей, проходящих через паракиальное изображение.  $V_0 = V(x_0, y_0; \bar{x}, \bar{y})$  — оптическая длина между точкой  $(x_0, y_0)$  и ее гауссовым изображением. В паракиальном пределе  $V_0$  можно приближенно записать в виде

$$V_0(x_0, y_0; \bar{x}, \bar{y}) = V_0(0, 0; 0, 0) + (x_0^2 + y_0^2)/(2d_0) + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)/(2d) = \\ = V_0(0, 0; 0, 0) + [1/(2k\bar{u})](v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_x^2 + v_y^2), \quad (4.15.2)$$

где  $d_0$  и  $d$  — расстояния от предмета и изображения до соответствующих главных плоскостей. Величины  $(v_{0x}, v_{0y})$ ,  $(v_x, v_y)$  и  $\bar{u} = \bar{u}_0$  являются оптическими координатами соответственно точек  $(x_0, y_0)$ ,  $(x, y)$  и главных плоскостей. Определим функцию  $A(p, q)$  следующим образом:

$$A(p, q) = R\Omega|U(p, q)|; \quad (4.15.3)$$

здесь  $R$  — радиус опорной сферы,  $\Omega$  — телесный угол линзы в пространстве изображения, а  $|U|$  — амплитуда поля на опорной сфере.



Воспользуемся теперь тем, что в пространстве предмета  $R | U | = 1/4\pi$  для единичного источника, а при переходе в пространство изображения  $R | U |$  испытывает скачок и должно быть умножено на амплитуду пропускания оптического прибора  $T^{1/2}(p, q)$ . Таким образом,

$$A(p, q) = [\Omega/(4\pi)] T^{1/2}(p, q). \quad (4.15.4)$$

Функция аберраций оптически сфокусированной системы зависит только от трех вращательных инвариантов:  $\xi = x_0^2 + y_0^2$ ,  $\eta = p^2 + q^2$ ,  $\zeta = x_0 p + y_0 q$ . Рассматривая зависимость  $W_0$  от положения точечного источника, можно ввести несколько определений. В частности, согласно Велфорду [40], «произвольная оптическая система, симметричная или несимметричная, называется изопланатической, если ее аберрации стационарны при малых смещениях точечного предмета». Это означает, что в достаточно малой окрестности центра поля нет асимметрии изображения. Следовательно, должна отсутствовать круговая кома. Можно также показать, что в осесимметричных системах отсутствие комы приводит и к отсутствию сферических аберраций на оптической оси. По аналогии с нелинейными электрическими цепями, отклики которых зависят от уровня смещающего сигнала, нарушение изопланатизма можно рассматривать как нелинейное поведение оптических систем. Если система является изопланатической, то ее функция аберраций  $W_0$  удовлетворяет соотношению

$$W_0(p, q; x_0, y_0) = \bar{W}_0(p - \bar{p}; q - \bar{q}), \quad (4.15.5)$$

где через  $\bar{p}$  и  $\bar{q}$  мы обозначили направляющие косинусы главного луча. Подставляя  $\bar{W}_0$  в интеграл (4.15.1) и используя разложение (4.15.2), для прозрачного зрачка ( $T = 1$ ) получаем

$$\begin{aligned} K(x, y; x_0, y_0) &= \exp\left(-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_0} - ik \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2d} + iv_x \bar{p} + iv_y \bar{q}\right) \times \\ &\times \frac{\Omega}{4\pi} \iint_{\Omega} P(p, q) \exp[iv_x p + iv_y q - ik \bar{W}_0(p, q)] dp dq \equiv \\ &\equiv e^{-i\phi} \bar{K}(x - \bar{x}; y - \bar{y}); \end{aligned} \quad (4.15.6)$$

здесь  $\phi = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_x^2 + v_y^2)/(2u) \pm (v_x v_{0x} + v_y v_{0y})/v_{\max}$  и использовано совпадение оптических координат сопряженных точек с точностью до знака (см. разд. 2.15). В этом выражении  $v_{\max}$  — оптическая координата, соответствующая радиусу самой большой окружности, содержащейся в выходном зрачке.

С физической точки зрения нас интересует интенсивность поля, поэтому удобно определить так называемую *передаточную функцию точки*  $t(x, y; x_0, y_0)$  или нормированное распределение интенсивности

от точечного источника:

$$t(x, y; x_0, y_0) = |K(x, y; x_0, y_0)/K(\bar{x}, \bar{y}; x_0, y_0)|^2. \quad (4.15.7)$$

В случае когда система является изопланатической, импульсный отклик становится стационарным, т. е. он зависит лишь от расстояния между точкой наблюдения и гауссовым изображением источника [ $K \equiv \bar{K}(x - \bar{x}, y - \bar{y})$ ]. В частности, для дифракционно-ограниченных приборов с прозрачным круглым и квадратным зрачком функция  $\bar{K}$  определяется соответственно следующими выражениями:

$$\bar{K} \propto 2J_1(v)/v, \quad \bar{K} \propto (\sin v_x/v_x)(\sin v_y/v_y), \quad (4.15.8a)$$

где

$$v_x = k\text{ЧА}(x + Mx_0), \quad v_y = k\text{ЧА}(y + My_0), \quad v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}. \quad (4.15.8b)$$

Мы видим, что  $K$  линейно убывает с уменьшением длины волны, как уже отмечалось. Однако для систем, у которых каким-либо образом коррекция aberrаций доведена до дифракционного предела, увеличение частоты приводит к увеличению фазового множителя  $k\bar{W}_0$ , что существенно изменяет форму импульсного отклика.

Для круглого зрачка импульсный отклик, а именно интеграл в (4.15.6), можно вычислить, используя полиномы Цернике [см., например, выражение (4.13.34)]. В частности, при простой дефокусировке этот интеграл можно выразить через функции Ломмеля (см. задачу 23). Для квадратного зрачка при дефокусировке и наличии сферической aberrации  $\bar{K}$  можно выразить через функцию  $I(u, v)$ , вычисленную Перси (см. обсуждение в разд. 5.5). При малых aberrациях наблюдается уменьшение интенсивности в центральном пятне, в то время как внешние кольца становятся более яркими. При этом размер центрального пятна существенно не изменяется. Основываясь на этом наблюдении, Стрел в 1902 г. предложил для измерения aberrаций использовать отношение максимального значения интенсивности в центральной зоне изображения точечного источника реальной системы к соответствующей величине в оптической системе без aberrаций, имеющей ту же апертуру и фокусное расстояние. Это отношение  $\bar{V}$ , называемое *отношением интенсивности Стрела*, фактически определяет долю света, приходящуюся на центральное пятно. Отношение Стрела нетрудно вычислить с помощью выражения (4.15.6), если положить  $x = y = \bar{x} = \bar{y} = 0$ , вычесть из величины  $\bar{W}_0$  ее среднее значение по апертуре и использовать для фазового множителя  $\exp[-ik(\bar{W}_0 - \langle \bar{W}_0 \rangle)]$  разложение  $1 - ik(\bar{W}_0 - \langle \bar{W}_0 \rangle)$ , что допустимо из-за малости  $k(\bar{W}_0 - \langle \bar{W}_0 \rangle)$ . Таким образом, мы получаем

$$\bar{V} = 1 - k^2 \left[ \iint_{\Omega} \bar{W}_0^2 dp dq - \left( \iint_{\Omega} \bar{W}_0 dp dq \right)^2 \right]. \quad (4.15.9)$$

В прекрасном «Атласе оптических явлений» (см. книгу [31] в литературе к гл. 2) приведены фотографии, показывающие распределения интенсивности света при наличии различных аберраций.

#### 4.15.2. Когерентное изображение протяженных источников

Теперь можно, используя принцип суперпозиции, вычислить поле изображения  $i(x, y, z)$ , соответствующее полю протяженного предмета  $o(x_0, y_0, z_0)$ . При этом мы имеем

$$i(x, y, z) = \iint_{\Sigma_0} K(x, y, z; x_0, y_0, z_0) o(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0. \quad (4.15.10)$$

Заметим, что мы указали в явном виде зависимость  $i$ ,  $o$ ,  $K$  от  $z$  и  $z_0$  для того, чтобы отметить применимость линейного соотношения (4.15.10) между полями в точках  $z_0$  и  $z$  и в тех случаях, когда плоскость  $z = \text{const}$  не совпадает с плоскостью изображения  $z_0 = \text{const}$ . Очевидно, что в этом случае функция  $K$  не представима более в виде интеграла Луненберга — Дебая. Вообще говоря, поскольку  $i(\mathbf{r})$  является решением скалярного уравнения Гельмгольца, функция  $K(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$  должна удовлетворять тому же уравнению, в котором переменной является  $\mathbf{r}$ . Интересуясь лишь распределением интенсивностей, из выражения (4.15.10) получаем

$$|i(x, y, z)|^2 = \iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 \iint_{\Sigma_0} dx'_0 dy'_0 K(x, y, z; x_0, y_0, z_0) K^*(x, y, z; x'_0, y'_0, z'_0) \times o(x_0, y_0, z_0) o^*(x'_0, y'_0, z'_0). \quad (4.15.11)$$

#### 4.15.3. Распространение взаимной интенсивности; теорема Ван-Циттерта — Цернике

Рассмотрим случай, когда амплитуда и фаза поля  $o(x_0, y_0, z_0)$  неизвестны точно, т. е.  $o(x_0, y_0, z_0)$  и  $i(x, y, z)$  можно рассматривать как стохастические процессы, задаваемые своими моментами (см. разд. 1.8). При этом важная информация связана со взаимной интенсивностью  $\langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle$ , вычисляемой в плоскости  $z = \text{const}$ . Эту величину можно найти с помощью выражения (4.15.10) через аналогичную величину в плоскости  $z_0 = \text{const}$  [ср. с (1.8.12)]. Таким образом, мы можем написать

$$\langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle = \iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 \iint_{\Sigma_0} dx'_0 dy'_0 K(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \times$$

$$\begin{aligned} & \times K^*(x', y', z; x'_0, y'_0, z_0) \langle o(x_0, y_0, z_0) o^*(x'_0, y'_0, z_0) \rangle \equiv \\ & \equiv \iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 K(x, y, z; x_0, y_0, z_0) F(x_0, y_0, z_0; x', y', z). \end{aligned} \quad (4.15.12)$$

Если зафиксировать теперь плоскость  $x', y'$ , то левая сторона этого равенства становится функцией координат  $x, y, z$ , выраженной через интеграл, аналогичный интегралу (4.15.10). Поскольку функция, определяемая выражением (4.15.10), представляет собой поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца, мы приходим к следующему уравнению

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + k^2) \langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle = 0. \quad (4.15.13)$$

Благодаря симметрии взаимной интенсивности по отношению к координатам  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  аналогичное уравнение справедливо и для зависимости  $\langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle$  от  $x', y'$  и  $z$ .

Важным частным случаем является случай, когда взаимная интенсивность  $\langle o(x_0, y_0, z_0) o^*(x'_0, y'_0, z_0) \rangle$  отлична от нуля лишь в столь малой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , в которой  $K(x, y, z; x'_0, y'_0, z'_0)$  изменяется очень слабо. При этом выражение (4.15.12) можно приближенно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle &= \iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 K(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \times \\ &\times K^*(x', y', z; x_0, y_0, z_0) I_0(x_0, y_0, z_0), \end{aligned} \quad (4.15.14)$$

где

$$I_0(x_0, y_0, z_0) = \iint_{\Sigma_0} \langle o(x_0, y_0, z_0) o^*(x'_0, y'_0, z_0) \rangle dx'_0 dy'_0. \quad (4.15.15)$$

Величину  $I_0$  с некоторой осторожностью можно интерпретировать как интенсивность. Чтобы показать это, заметим, что корреляционная длина взаимной интенсивности зависит от расстояний между действительными или мнимыми источниками и плоскостью предмета. Для источников, близких к  $\Pi_0$ , корреляционная длина существенно уменьшается. Это имеет важные следствия: амплитуда  $o(x, y, z)$  должна стать очень большой, и поле даже локально нельзя рассматривать как плоскую волну, так что квадрат модуля амплитуды  $o(x, y, z)$  не является модулем вектора Пойнтинга. В тех случаях, когда всеми этими фактами можно пренебречь, величину  $I_0$  можно рассматривать как интенсивность.

В качестве примера рассмотрим оптическую систему, представляющую собой круглое отверстие в плоскости предмета. При этом  $K$

определяется выражением (4.5.6), так что с точностью до несущественного фазового множителя имеем

$$\langle i(x, y, z) i^*(x', y', z) \rangle = \frac{1}{(\lambda d)^2} \iint_{\Sigma_0} \exp \left\{ -ik \frac{[x_0(x - x') + y_0(y - y')]}{d} \right\} \times \\ \times I_0(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0. \quad (4.15.16)$$

Из этого выражения следует, что *корреляционная функция поля на расстоянии  $d$  от некогерентно освещаемого отверстия совпадает с фурье-образом освещенности этого отверстия*. Этот результат, первоначально полученный Ван-Циттером и Цернике, лежит в основе знаменитой теоремы, носящей их имя (см., например, книгу Борна и Вольфа [11], приведенную в литературе к гл. 1 настоящей книги).

#### 4.15.4. Исследование оптических систем с помощью оптической передаточной функции (ОПФ)

В тех случаях, когда нужно найти распределение интенсивности  $I(x, y) \propto \langle i(x, y) i^*(x, y) \rangle$ , выражения (4.15.7) и (4.15.14) дают

$$I(x, y) = \iint_{\Sigma_0} I_0(x_0, y_0) t(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (4.15.17)$$

Для изопланатической системы этот интеграл имеет вид свертки

$$I(x, y) = \frac{1}{M^2} \iint_{\Sigma'_0} I_0 \left( \frac{-x_0}{M}, \frac{-y_0}{M} \right) \bar{t}(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0, \quad (4.15.18)$$

где  $\Sigma'_0 = M^2 \Sigma_0$ . Фурье-преобразование выражения (4.15.18) приводит к соотношению

$$I(\alpha, \beta) \propto T(\alpha, \beta) I_0(\alpha, \beta), \quad (4.15.19)$$

где  $T(\alpha, \beta)$  — *оптическая передаточная функция (ОПФ) системы* (см., например, рис. 4.25), которая пропорциональна фурье-образу введенной в (4.15.7) передаточной функции точки  $\bar{t}$  изопланатической системы:

$$T(\alpha, \beta) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{t}(v_x, v_y) \exp(i\alpha v_x + i\beta v_y) dv_x dv_y}{\iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{t}(v_x, v_y) dv_x dv_y} = \\ = \iint_{-\infty}^{+\infty} P \left( p + \frac{\alpha}{2}, q + \frac{\beta}{2} \right) P \left( p - \frac{\alpha}{2}, q - \frac{\beta}{2} \right) \times \\ \times \frac{\exp \left[ -ik \bar{W}_0 \left( p + \frac{\alpha}{2}, q + \frac{\beta}{2} \right) + ik \bar{W}_0 \left( p - \frac{\alpha}{2}, q - \frac{\beta}{2} \right) \right] dp dq}{\iint_{-\infty}^{+\infty} P(p, q) dp dq}. \quad (4.15.20)$$

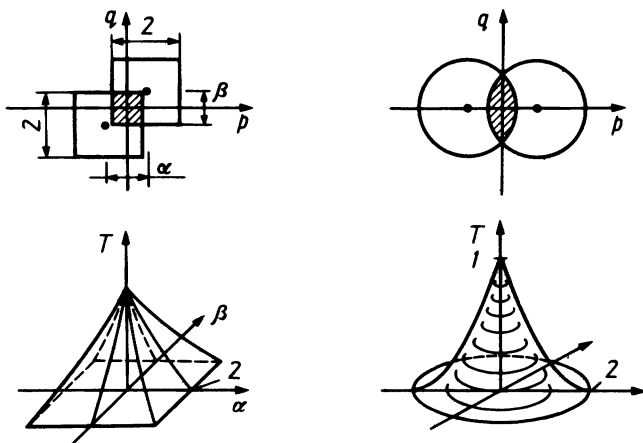


Рис. 4.25. Оптические передаточные функции, связанные с некогерентным освещением квадратного (слева) и круглого (справа) зрачков.

Этот результат получается как следствие выражения (4.15.7), теорем Парсевала и свойств свертки. Знаменатель здесь равен площади апертуры. Для систем без aberrаций интеграл в числителе связан с площадью перекрытия двух функций зрачка  $P$ , сдвинутых относительно друг друга на  $\alpha$  и  $\beta$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Можно показать, что наличие aberrаций уменьшает ОПФ, хотя при  $\alpha = \beta = 0$  ОПФ всегда равна единице. Поскольку  $T$  является фурье-образом вещественной функции, ее вещественная часть  $T$  является четной, а мнимая — нечетной функцией величин  $\alpha$  и  $\beta$ . Модуль функции  $T$  называют *модуляционной передаточной функцией* (МПФ). Следует заметить, что ОПФ можно определить также для фотоэмульсий, телевизионных камер и других электрооптических приборов. Это особенно важно при конструировании сложных электрооптических систем формирования изображения. Если любую из компонент оптической системы можно описать соответствующей ей ОПФ, то создание сложной электрооптической системы возможно по принципу построения каскада электронных усилителей.

Нетрудно вычислить оптическую передаточную функцию круглого зрачка в отсутствие aberrаций (рис. 4.25, правая сторона):

$$T(\omega) = \begin{cases} (2/\pi)[\arccos(\omega/2) - \omega(1 - \omega^2/4)^{1/2}], & 0 \leq \omega \leq 2, \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (4.15.21)$$

здесь  $\omega = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ . Таким образом, для круглого зрачка пространственная частота  $\omega$  ограничена интервалом  $(0, 2)$ . Безразмерная частота  $\omega$ , сопряженная оптической координате  $u$ , связана с *пространственной частотой*  $f$ , определяемой числом циклов на единицу

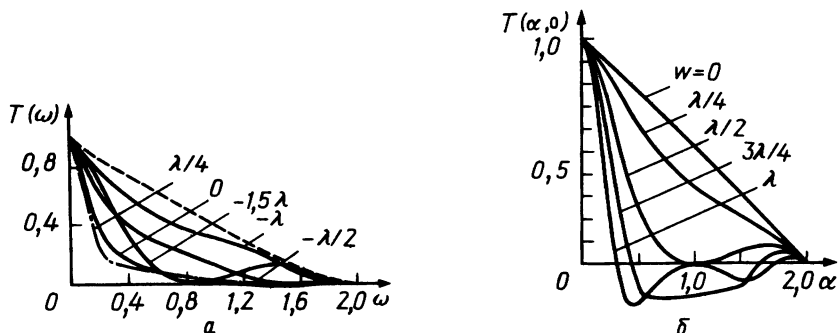


Рис. 4.26. *a* — оптическая передаточная функция для круглого зрачка при полной разности хода за счет сферических aberrаций  $1\lambda$ ; различные кривые построены для разного положения приемной плоскости, сдвинутой на  $\lambda/4$ ;  $0$ ;  $-1,5\lambda$ ;  $-\lambda$ ;  $-0,5\lambda$  относительно паракиального фокуса (из работы [41]); *б* — сечение ОПФ для квадратного зрачка при расфокусировке  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$ ,  $3\lambda/4$  и  $\lambda$ .

ной длине, соотношением  $f = k\omega\text{ЧА}$ . Выражение (4.15.21) указывает на то, что дифракция света в оптической системе устанавливает верхний предел на способность системы разрешить отдельные элементы юстировочной таблицы с нормализованной пространственной частотой более 2.

Как видно из рис. 4.26, заимствованного из работы Блэка и Линфута [41], наличие aberrаций существенно изменяет ОПФ. На рис. 4.26, *a* штриховой кривой представлена зависимость  $T(\omega)$  для линзы без aberrаций. Остальные кривые соответствуют возникающей за счет сферических aberrаций разности хода  $1\lambda$  для различных положений приемной плоскости относительно гауссова фокуса. Следует заметить, что наилучшее приближение ОПФ к идеальному случаю возможно при дефокусировке на  $-\lambda$ . Существенной особенностью кривых на рис. 4.26, *б* является реверсия фазы изображения, т. е. отрицательный знак ОПФ при большой дефокусировке. Более подробно метод Фурье в анализе изображений рассмотрен в работах [25, 26, 42, 43], а также к книге Мураты (1966), приведенной в библиографии к данной главе.

#### 4.15.5. Степени свободы изображения

Рассмотрим оптическую систему К без aberrаций, имеющую квадратный зрачок и образующую прямое изображение. Для нее из выражений (4.15.8) и (4.15.10) получаем

$$i(x, y) \propto \iint_{-a}^{+a} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \frac{\sin(y - y_0)}{y - y_0} \times$$

$$\times \exp\left(i \frac{x_0^2 + y_0^2 + x^2 + y^2}{2\bar{u}} - i \frac{xx_0 + yy_0}{v_{\max}}\right) o(x_0, y_0) dx_0 dy_0; \quad (4.15.22)$$

здесь ради простоты мы использовали для оптических координат обозначения обычных декартовых координат;  $2a$  — это выраженный в оптических координатах боковой размер области поля предмета. Зададимся теперь вопросом, может ли система К полностью и без искажений воспроизвести истинное изображение предметов [44]. Для получения ответа нам необходимо найти решения записанных выше уравнений, в которых интенсивность  $i(x, y)$  пропорциональна  $o(x, y)$ . При этом мы получим интегральное уравнение Фредгольма с симметричным ядром, в общем случае комплексным. Поскольку ядро факторизуется в виде произведения двух функций, зависящих лишь от  $x$  и  $y$  соответственно, собственные функции полученного уравнения можно представить в виде  $o(x, y) = \Phi_n(x)\Phi_m(y)$ , где  $\Phi_n$  — это соответствующая собственному значению  $\gamma_n$  собственная функция интегрального уравнения

$$\gamma_n \Phi_n(\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin a(\xi - \xi')}{\xi - \xi'} \exp\left(-ia^2 \frac{\xi^2}{2\bar{u}} - ia^2 \frac{\xi\xi'}{v_{\max}}\right) \Phi_n(\xi') d\xi'. \quad (4.15.23)$$

В частности, для поля малого предмета, когда  $\bar{u} \gg a^2$  и  $v_{\max} \gg a^2$ , можно пренебречь фазовым множителем в приведенном ядре. Соответствующее уравнение имеет полный набор собственных функций, которые являются аналогом вытянутых угловых сферических функций [45] [ср. с уравнением (7.16.7) в гл. 7]. Как отмечалось в работах [44, 45], для  $n < 2a/\pi$  модули собственных значений почти постоянны и равны  $\pi$ , а для  $n > 2a/\pi$  собственные значения  $\gamma_n$  резко падают до нуля. Это свойство имеет существенные физические следствия. Раскладывая с использованием набора функций  $\Phi_n$  произвольную функцию  $o$ , имеем

$$o(x_0, y_0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} O_{n,m} \Phi_n(x_0) \Phi_m(y_0), \quad (4.15.24)$$

причем поле изображения  $i(x, y)$  дается выражением

$$i(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \gamma_n \gamma_m O_{nm} \Phi_n(x) \Phi_m(y) \simeq \sum_{n,m=0}^{2a/\pi} \gamma_n \gamma_m O_{nm} \Phi_n(x) \Phi_m(y). \quad (4.15.25)$$

Таким образом, можно сказать, что система К «пропускает» не больше чем  $(2a/\pi)^2$  членов из суммы (4.15.24), так что вся информация, содержащаяся в остальных членах, теряется. Ряд (4.15.24) можно интерпретировать как разложение функции  $o(x_0, y_0)$  по ее составляющим в бесконечномерном гильбертовом пространстве, в котором функции  $\Phi_n$  образуют базис. При этом каждый из членов ряда представляет собой одну степень свободы предмета. Из выражения (4.15.25) следует, что



число степеней свободы изображения ( $N$ ) не превышает  $(2a/\pi)^2$ . Преобразуя  $a$  к физическим координатам, имеем

$$N = (2a/\pi)^2 = U/\lambda^2 = S_{\text{предм}}\Omega_{\text{предм}}/\lambda^2 = S_{\text{изобр}}\Omega_{\text{изобр}}/\lambda^2; \quad (4.15.26)$$

здесь  $S$  — протяженность предмета (изображения), а  $\Omega$  — телесный угол апертуры системы [соответствующий входному (выходному) зрачку, как его видно из плоскости предмета (изображения)]. Выражение (4.15.26) показывает, что пропускная способность оптического прибора увеличивается по квадратичному закону с ростом частоты излучения, если только в системе нет aberrаций.

Можно также показать, что величина  $N$  соответствует тому количеству элементов предмета, выбранных через одинаковые интервалы, которых достаточно для определения изображения. Следовательно, если изображение нужно «прочитать» с помощью мозаики из  $N_d$  микроскопических детекторов, то пропускная способность  $U$  [см. разд. 2.15.3 и выражение (2.15.29)] оптического прибора, используемого для построения изображения, должна быть больше, чем  $\lambda^2 N_d$ . Можно показать, что проведенное в данном разделе рассмотрение качественно справедливо для любой формы предмета и зрачков.

Более подробно со всеми этими вопросами читатель может познакомиться в статьях Гори и Гуаттари [46], а также Гори и Рончи [47].

## ЗАДАЧИ

### Раздел 4.10

1. Пусть плоский экран с прямоугольным отверстием, стороны которого  $a$  и  $b$ , освещается сферической волной, излучаемой точечным источником в точке  $S$ . Докажите, что поле вдоль нормали от  $S$  к экрану дается выражением

$$u(\mathbf{r}) = u_g(\mathbf{r})\left(-\frac{1}{2}i\right)[F(\xi_2) - F(\xi_1)][F(\eta_2) - F(\eta_1)],$$

где  $u_g$  — поле в отсутствие экрана,  $F(x)$  — комплексный интеграл Френеля, определяемый выражением (5.3.5), и

$$\xi_{2,1} = x_{2,1}[2(d_S + d_P)/(\lambda d_S d_P)]^{1/2}, \quad \eta_{2,1} = y_{2,1}[2(d_S + d_P)/(\lambda d_S d_P)]^{1/2}.$$

Здесь  $d_S$  и  $d_P$  — расстояния от точек соответственно  $S$  и  $P$  до плоскости отверстия, а  $x_{1,2}$  и  $y_{1,2}$  — координаты вершин отверстия в декартовой системе координат с центром на нормали, опущенной из  $S$  на экран.

2. Используя результаты задачи 1, покажите, что дифракционная картина в плоскости, параллельной экрану, останется неизменной, если экран сдвинуть таким образом, что его новое расстояние  $d'_S$  от источника равно первоначальному расстоянию  $d_P$  от плоскости наблюдения.

3. Рассмотрите плоское отверстие, облучаемое перпендикулярно плоской волной. Пусть  $O$  — проекция из точки наблюдения на экран, а  $\rho$  и  $\phi$  — полярные координаты с центром в точке  $O$ . Пусть в этой системе граница отверстия задается выражением  $\phi = \phi(\rho)$ , где  $\phi(\rho)$  — неоднозначная в общем случае функция координаты  $\rho$ , а  $\rho$  изменяется от  $\rho_{\text{мин}}$  до  $\rho_{\text{макс}}$ . Покажите, что дифракционный интеграл Френеля можно переписать

сать в виде одномерного интеграла по переменной  $\rho$ , а именно как

$$u(P) \propto \int_{\rho_{\text{мин.}}}^{\rho_{\text{макс}}} f(\rho) \exp\left(\frac{-ik\rho^2}{2|z-z'|}\right) \rho d\rho;$$

здесь  $f(\rho)$  — длина дуги, полностью содержащейся в отверстии и имеющей радиус  $\rho$  и центр в точке  $O$ . Найдите аналитическое выражение для  $f(\rho)$  в случае круглого и прямоугольного отверстий (см. также задачу 1 в гл. 5).

4. Пусть поле, пропорциональное  $\exp(-2b\rho^2)$ , освещает круглое отверстие радиусом  $a$ . Покажите, что поле в дальней зоне  $G(\theta)$ , где  $\theta$  — угол между направлением наблюдения и нормалью к экрану, представимо в виде разложения Неймана [см. разд. 4.11.3а и выражение (4.11.23) и уравнение (4.11.24)]:

$$G(\theta) \propto \sum_{s=0}^{\infty} G_{2s+1} \frac{J_{2s+1}(v)}{v},$$

где  $v = k a \sin \theta$  и

$$G_1 = \frac{1}{2ba^2} (1 - e^{-2a^2b}), \quad G_3 = -\frac{1}{a^2b} \left[ \left(1 - \frac{1}{a^2b}\right) + \left(1 + \frac{1}{a^2b}\right) e^{-2a^2b} \right],$$

$$\frac{G_{2s+1}}{2s+1} = \frac{G_{2s-1}}{a^2b} + \frac{G_{2s-3}}{2s-3}$$

(см. работу Корнблита [18], с. 215, указанную в литературе к гл. 2 настоящей книги).

5. Пусть амплитуда освещающего круглое отверстие пучка пропорциональна  $f(x) = 0,076 - 0,0441(1 - x^2) + 0,528(1 - x^2)^2 + 0,44$ , причем  $x = \rho/a$ , где  $a$  — радиус отверстия. Нарисуйте распределение поля в дальней зоне и покажите, что величина боковых лепестков диаграммы направленности составляет менее чем  $4 \cdot 10^{-3}$  величины центрального пика ( $\theta = 0$ ), в то время как ширина пучка почти та же, что и при однородном освещении апертуры. Приведенное здесь распределение амплитуды является примером плавно изменяющегося освещения, используемого для ослабления боковых максимумов дифракционной картины, т. е. для увеличения разрешения оптических приборов (особенно микроскопов и телескопов), а также отражательных антенн. В оптике изменение амплитуды освещения достигается с помощью транспарантов, расположенных или в самой апертуре, или в фокальных плоскостях. Этот процесс называют *аподизацией*. (См. работу Корнблита [48], в которой рассматриваются свойства заданного здесь освещения, а также статью Жакино и Руазен-Досье [49], в которой приведен обзор по исследованию аподизации.)

6. Пусть круглое отверстие имеет в центре препятствие в виде диска. Исследуйте свойства поля в дальней зоне, обратив особое внимание на зависимость ширины главного максимума и амплитуды первого бокового максимума от относительных размеров препятствия. На этом примере определите накладываемые на поле освещения условия, позволяющие уменьшить ширину пучка до сколь угодно малого значения (см. статью Торальдо ди Франчия [50]).

#### Раздел 4.11

7. Покажите, что функция Грина  $G$  в свободном пространстве может быть представлена интегралом Зоммерфельда — Отта

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\chi d) \exp[-i(k^2 - \chi^2)^{1/2}|z - z'|] \chi d\chi,$$

где  $d = [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')]^{1/2}$ , а  $\rho, z, \phi$  — цилиндрические координаты точки  $g$ . *Подсказка.* Запишите решение неоднородного волнового уравнения в цилиндрических координатах.

8. Используя интеграл Зоммерфельда — Отта из предыдущей задачи и разложение, следующее из теоремы Графа о сложении функций Бесселя,

$$J_0[\chi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi - \phi')} J_m(\chi\rho) J_m(\chi\rho'),$$

докажите соотношение (4.11.1).

9. Покажите, что в тех случаях, когда  $z$ -компоненты произвольного поля  $E_z$  и  $H_z$  зависят от  $z$  как  $e^{-i\chi z}$ , в области свободного пространства справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{H}_t = -i(\omega^2/c^2 - \chi^2)^{-1} [\chi \nabla_t H_z + \omega/(\zeta_0 c) \hat{z} \times \nabla_t E_z],$$

$$\mathbf{E}_t = i(\omega^2/c^2 - \chi^2)^{-1} (-\chi \nabla_t E_z + \zeta_0 \omega/c \hat{z} \times \nabla_t H_z),$$

где  $\mathbf{E}_t = \hat{\rho} E_\rho + \hat{\phi} E_\phi$  и  $\mathbf{H}_t = \hat{\rho} H_\rho + \hat{\phi} H_\phi$  — поперечные компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в цилиндрической системе координат. Здесь  $\nabla_t = \hat{\rho} \partial/\partial\rho + \hat{\phi} \rho^{-1} \partial/\partial\phi$ .

10. Покажите, что при  $\chi > k_0$ , цилиндрическая волна, расширяющаяся в пустом пространстве до бесконечно большого размера ( $\rho \rightarrow \infty$ ), может быть записана в виде

$$\exp(-i\chi z + im\phi) K_m[(\chi^2 - k_0^2)^{1/2} \rho],$$

где  $K_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя второго рода, убывающие на бесконечности как  $e^{-x}$  (см. гл. 8).

11. Решите скалярное волновое уравнение в сферических координатах и покажите, что в однородной области поле можно разложить в ряд по *сферическим* модам (см. в настоящей книге гл. 2, пример в разд. 2.12.3 и раздел 6.12):

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [U_{nm}^{(\text{out})} h_n^{(2)}(k_0 r) + U_{nm}^{(\text{in})} h_n^{(1)}(k_0 r)] Y_n^m(\theta, \phi).$$

Здесь  $h_n^{(2)}$  и  $h_n^{(1)} = h_n^{(2)*}$  — сферические функции Ханкеля второго и первого рода соответственно. *Подсказка.* См. гл. 6 настоящей книги.

12. Покажите, что электромагнитное поле в пустом пространстве можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (ru) - i\omega\mu_0 \nabla \times (rv),$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times (ru) - i\omega\epsilon_0 \nabla \times (rv),$$

где  $u$  и  $v$  — два решения однородного волнового уравнения, известные как *потенциалы Дебая* (см. статью Папаса [17], указанную в литературе к гл. 1).

13. Используя потенциалы Дебая и асимптотическое разложение сферических функций Ханкеля, докажите, что в дальней зоне поле от источников, находящихся в ограниченной области, можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E'_{nm} \hat{r} \times (\hat{r} \times \nabla) Y_n^m + E''_{nm} (\hat{r} \times \nabla) Y_n^m.$$

*Подсказка.* Выразите поле  $\mathbf{E}$  через потенциалы Дебая из предыдущей задачи, а затем разложите  $u$  и  $v$  по сферическим гармоникам { см. уравнение (168) в работе Папаса [17], указанной в литературе к гл. 1, а также выражения (2.12.43) и (6.12.26) в настоящей книге }.

14. Пусть электрический диполь  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\hat{z}$  ориентирован параллельно

оси  $z$ . Используя интегральное соотношение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV',$$

связывающее векторный потенциал  $\mathbf{A}$  с распределением тока  $\mathbf{J}$ , и подставляя электрическое и магнитное поля в виде функций векторного потенциала  $\mathbf{A}$  [например,  $\mathbf{H} = (1/\mu) \nabla \times \mathbf{A}$ ], с помощью соотношения (4.11.1) напишите разложение поля  $\mathbf{H}$  по цилиндрическим волнам.

#### Раздел 4.12

15. Рассеянное на сфере поле можно представить в виде суперпозиции сферических гармоник. С математической точки зрения выражение для поля есть ряд сферических функций Ханкеля, умноженных на сферические гармоники  $Y_n^m(\theta, \phi)$ . Для скалярной задачи рассеяния волновая функция может быть найдена, если наложить на полную волновую функцию  $u(r, \theta, \phi) = u_i(r, \theta, \phi) + u_d(r, \theta, \phi)$  граничные условия на поверхности сферы. Если падающая волна является плоской и распространяется вдоль оси  $z$ , а полное поле на сфере равно нулю, то покажите, что рассеянное поле можно разложить по сферическим гармоникам следующим образом:

$$u_d(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(2)}(k_0 r) Y_n^m.$$

#### Раздел 4.13

16. Рассмотрите изотропный точечный источник, расположенный в фокусе аксиально-симметричного параболоида с конечной апертурой. Исключая вклад лучей, покидающих источники и не попадающих в параболоид, вычислите в дальней зоне поле, излученное вдоль направления, образующего угол  $\psi$  с осью отражателя. *Подсказка.* Проведите вычисления с использованием дифракционного интеграла на апертуре параболоида с распределением поля, которое можно найти, используя законы геометрической оптики для распространяющихся из источника сферических волн. После этого, учитывая соотношение между отклонением  $h$  луча от оси и углом  $\theta$  между лучом и осью параболоида [ $h(\theta) = 2f(1 - \cos\theta)$ ; см. рис. 4.17], поле в дальней зоне может быть получено из интеграла Фраунгофера

$$u(v) \propto \int_0^1 (1 + \cos\theta) J_0(vx) x dx,$$

где  $x = h/h_{\max}$  и  $v = kh_{\max} \sin\psi$ .

17. Пусть ось  $x$  декартовой системы координат направлена по краю металлической полуплоскости (лезвие ножа), а ось  $z$  совпадает с оптической осью тонкой линзы  $L_1$  без aberrаций. Предполагая, что экран расположен в задней фокальной плоскости  $L_1$ , которая в свою очередь совпадает с передней фокальной плоскостью второй тонкой линзы  $L_2$  без aberrаций, покажите, что поле  $i(x, y)$  в выходной плоскости  $L_2$  связано с распределением амплитуды поля предмета  $o_0(x, y)$  во входной плоскости  $L_1$  следующим интегральным соотношением:

$$i(x, y) = \frac{e^{-ik_0(f_1 + f_2)}}{M} \left[ o\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{o(x', y)}{(x/M) - x'} dx' \right],$$

где  $M = f_2/f_1$  — линейное увеличение афокальной системы, а  $f_i$  — фокусное расстояние линзы  $L_i$ . Это преобразование используется в *шильрен-методе* для анализа конвективных потоков в аэродинамических трубах.

18. Пусть решетка, характеризуемая функцией пропускания  $t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n \exp(inx 2\pi/d)$ , расположена в задней фокальной плоскости линзы, освещаемой плоской волной вдоль оптической оси. Покажите, что вдали от решетки поле пропорционально выражению

$$u(x, y) \propto \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[-ik_0 W_0(x', y')] K\left(\frac{x}{M} - x', \frac{y}{M} - y'\right) dx' dy',$$

где  $W_0$  — функция aberrаций линзы,  $M = d/f$ , причем  $d$  — расстояние от плоскости наблюдения до фокальной плоскости,  $f$  — фокусное расстояние линзы. Функция  $K$  дается выражением

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta) &\propto \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x'', y'') \exp\left(-ik_0 \frac{x''\xi + y''\eta}{f}\right) dx'' dy'' = \\ &= \delta(\eta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n \delta\left(\frac{2\pi}{d}n - \frac{k_0}{f}\xi\right). \end{aligned}$$

Эта система известна как *интерферометр Рончи* и используется для определения aberrаций в оптических системах (см. статью Рончи [51]).

19. Рассмотрите тот же, что и в предыдущей задаче, интерферометр Рончи. Предполагая период решетки  $d$  таким, что только два последовательных порядка [например,  $n$ -й и  $(n+1)$ -й] дают вклад в распределение интенсивности, измеряемое в плоскости на расстоянии  $d$ , покажите, что распределение интенсивности дифрагированного поля дается выражением

$$\begin{aligned} |u^2(x, y)| &\propto \left| 1 + \frac{T_{n+1}}{T_n} \exp\left\{-ik_0 \left[ W_0\left(\frac{x}{M} - \frac{\lambda}{d}f(n+1), \frac{y}{M}\right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - W_0\left(\frac{x}{M} - \frac{\lambda}{d}f(n), \frac{y}{M}\right) \right] \right\} \right|. \end{aligned}$$

Здесь обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

20. Определите форму интерференционных полос в интерферометре Рончи для первичных aberrаций Зайделя. *Подсказка.* Используйте выражение для интенсивности, приведенное в предыдущей задаче, и следующее приближенное выражение:

$$W_0[\xi - (n+1)\alpha, \eta] - W_0(\xi - n\alpha, \eta) \cong -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} W_0(\xi - n\alpha, \eta)$$

(см. работу Торальдо ди Франчия [52]).

21. Рассмотрите поле в дальней области от освещаемой плоской волной собирающей линзы без aberrаций. Вычислите двумя разными способами поле Фраунгофера  $G(v)$  вдоль направления, образующего угол  $\psi$  с оптической осью. Во-первых, запишите  $G$  в виде преобразования Ханкеля поля на выходной плоскости линзы:

$$G(v) \propto \int_0^1 J_0(vx) e^{i\bar{u}x^2} x dx,$$

где  $v = k_0 a \sin \psi$ ,  $\bar{u} = k_0 a^2 / (2f)$ ,  $a$  и  $f$  — это радиус апертуры и фокусное расстояние линзы. Во-вторых, вычислите поле в фокальной плоскости линзы и затем найдите его преобразование Ханкеля. Поскольку поле в фокальной плоскости определяется распре-

делением Эйри  $J_1(v')/v'$ , для которого преобразование Ханкеля пропорционально  $\text{sinc}(\psi f/a)$ , найденное таким образом поле быстро падает до нуля за границей тени. Этот результат противоречит общим выводам теории дифракции. Следовательно, для правильного вычисления поля в дальней области необходимо использовать приведенный выше интеграл. Покажите, что возникшее противоречие объясняется тем фактом, что формула Эйри правильно описывает поле лишь вблизи оптической оси (параксиальное приближение).

22. Покажите, что поле, создаваемое на большом расстоянии объективом, освещаемым сферической волной, пропорционально полю, вычисленному в плоскости вблизи фокуса на расстоянии  $u = k_0 a^2 / (2d)$  от него, где  $d$  — расстояние между выходным зрачком и изображением, формируемым плоской волной, и  $a$  — диаметр зрачка. Рассмотрите изменения в распределении поля в дальней области, вызываемые как сдвигом источника относительно объектива, так и изменением диаметра зрачка. При каких соотношениях между  $a$ ,  $d$  и  $\lambda$  центральное светлое пятно Эйри заменяется темным? Для ответа используйте фотографии из гл. 9 книги Борна и Вольфа [11], указанной в литературе к гл. 1 настоящей книги.

#### Раздел 4.13.5

23. Покажите, что амплитуда поля сферической волны вблизи фокуса малой апертуры без aberrаций может быть представлена в виде (см. приложения В и Д)

$$\begin{aligned} u(\bar{u}, v) &= 2 \int_0^1 J_0(v\rho) e^{i\bar{u}\rho^2/2} \rho d\rho = \frac{2}{\bar{u}} e^{i\bar{u}/2} U_1 + i \frac{2}{\bar{u}} e^{-i\bar{u}/2} U_2 = \\ &= i \frac{2}{\bar{u}} e^{-i\bar{u}/(2\bar{u})} - i \frac{2}{\bar{u}} e^{i\bar{u}/2} V_0 - \frac{2}{\bar{u}} e^{i\bar{u}/2} V_1, \end{aligned}$$

где  $U_n$  и  $V_n$  — функции Ломмеля, определяемые выражениями (В.21) из работы Декано-сидзе [53].

24. Покажите, что вдоль границы тени ( $u = v$ ) апертуры без aberrаций, освещаемой сферической волной, интенсивность поля  $I(v, v)$  дается выражением

$$I(v, v) = \frac{1 - 2J_0(v) \cos v + J_0^2(v)}{v^2} I(0, 0).$$

25. Выведите формулу Рэлея для мощности, проходящей через расположенный в фокальной плоскости сферической линзы без aberrаций диск с нормализованным радиусом  $v_0$  (так называемая *кумулятивная передаточная функция точки*):

$$\int_0^{v_0} I(0, v) v dv = 2I(0, 0) [1 - J_0^2(v_0) - J_1^2(v_0)].$$

26. Покажите, что при малых aberrациях изображение сферической волны для  $y_0 = 1$  дается приближенно выражением

$$\begin{aligned} I(0, v) &= \pi \int_0^1 d\theta \theta J_0(v\theta) \left[ 1 - i \frac{B}{24} R_4^{(0)}(\theta) + i \frac{D}{4} R_2^{(0)}(\theta) \right] + \\ &+ i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\theta \theta \exp[iv\theta \cos(\phi - \psi)] \times \\ &\times \left[ -\frac{C}{2} R_2^{(1)}(\theta) \cos 2\phi + ER_1^{(1)}(\theta) \cos \phi + \frac{F}{3} R_3^{(1)}(\theta) \cos \phi \right] \end{aligned}$$

[см. выражения (4.13.33) и (4.13.34)].

27. Используя следующее из книги Борна и Вольфа (см. ссылку [11, с. 727], в литературе к гл. 1):

$$\int_0^1 R_n^{(m)}(\theta) J_m(v\theta) \theta d\theta = (-1)^{(n-m)/2} \frac{J_{n+1}(v)}{v},$$

вычислите интеграл в предыдущей задаче.

28. Интенсивность  $I(u, v)$  удобно выразить в виде отношения к  $I^*$ , т. е. к интенсивности, которая получалась бы в точке гауссова изображения в отсутствие aberrаций, т. е.

$$i(u, v) = \frac{I(u, v)}{I^*} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \exp[iv\theta \cos(\phi - \psi) - ikW_0 + iu\theta^2/2] \right|^2.$$

Покажите, что в пределе малых aberrаций вычисленная в точке гауссова изображения нормализованная интенсивность  $I'(0, 0)$  пропорциональна среднеквадратичной деформации волнового фронта:

$$I'(u, v) = 1 - k^2 \langle W_0^2 - \langle W_0 \rangle^2 \rangle,$$

где

$$\langle W_0^2 - \langle W_0 \rangle^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (W_0^2 - \langle W_0 \rangle^2).$$

#### Раздел 4.14

29. Пусть отверстие в плоском экране освещается гауссовым пучком. Найдите дифрагированное поле, используя теорию дифракции волны на границе. Рассматривая гауссов пучок как сферическую волну, выходящую из точки на комплексной плоскости, положение которой связано как с размером, так и с координатой перетяжки пучка, а также с направлением пучка уравнениями (5.7,9), вычислите векторный потенциал  $\mathbf{w}$ . В частности, для освещения круглого отверстия под прямым углом найдите поле вдоль оси (см. статью Отиса [54]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Babic V. M., Kirpicnikova N. Y., The Boundary Layer Method in Diffraction Problems, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.
2. Baker B. B., Copson E. T., The Mathematical Theory of Huygens' Principle, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1950.
3. Bowman S. I., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E., Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, North-Holland Publ., Amsterdam, 1969.
4. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1962. [Имеется перевод: Ватсон Г. Теория бесселевых функций. — М.: Наука, 1964.]
5. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.
6. Mittra R., Lee S. W., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan, New York, 1971.
7. Borgnis F. E., Papas C. H. — In: Handbuch der Physik, v. XVI (ed. S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1958, p. 285—422.
8. Van Bladel J., Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1964.
9. Nussbaumer H. J., Fast Fourier Transform and Convolution Algorithm, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1981.
10. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941. [Имеется

- перевод: *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнитизма. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.]
11. *Müller G.*, Grundprobleme der Matematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1957.
  12. *Smythe W. R.*, Static and Dynamic Electricity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1941.
  13. *Clemmow P. C.*, The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, Pergamon, Oxford, 1966.
  14. *Денисюк Ю. Н., Рамишвили Н. М., Чавчанидзе В. В.* Опт. и спектр., 1971, т. 30, с. 1130; см. также:  
*Lohmann A. W., Silva D. A.*, J. Opt. Soc. Am., **61**, 687 (1971);  
*Silva D. A.*, Appl. Opt., **11**, 2613 (1972).
  15. *Sneddon I. N.*, The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, 1972.
  16. *Boivin A.*, Théorie at Calcul des Figures de Diffraction de Révolution, Presses Université Laval, Quebec, 1964.
  17. *Newton R. G.*, The Complex  $j$ -Plane, Benjamin, New York, 1964.
  18. *Streifer W., Kodis R. D.*, Q. Appl. Math., **21**, 285 (1964).
  19. *Schöbe W.*, Acta Math., **92**, 265 (1954).
  20. *Bremmer A.*, Terrestrial Radio Waves, Elsevier, Amsterdam, 1949; см. также:  
*Franz W.*, Zs.Naturforsch., **9A**, 705 (1954).
  21. *Magnus W., Kotin L.*, Numer. Math., **2**, 228 (1960); см. также:  
*Keller J. B., Rubinow S. I., Goldstein M.*, J. Math. Phys., **4**, 829 (1963).
  22. *Nussenzweig H. M.*, J. Math. Phys., **10**, 82 (1969); **10**, 125 (1969).
  23. *Wolf E.*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, **253**, 349 (1959).
  24. *Richards B., Wolf E.*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, **253**, 358 (1959).
  25. *Goodman J. W.*, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: *Гюэмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.]
  26. *Gaskill J. D.*, Linear Systems, Fourier Transforms and Optics, Wiley, New York, 1978.
  27. *Boivin A., Dow J., Wolf E.*, J. Opt. Soc. Am., **57**, 1171 (1977).
  28. *Linfoot E. H.*, Recent Advances in Optics, Oxford Univ. Press, London and New York, 1955.
  - 28a. *Luchini P.*, Comput. Phys. Commun., **31**, 303 (1984).
  29. *Li Y., Wolf E.*, Opt. Commun., **39**, 211 (1981).
  30. *Thompson B. J.*, Prog. Opt., **7**, 169—230 (1969).
  31. *Sommerfeld A.*, Optics, Academic Press, New York, 1954. [Имеется перевод: *Зоммерфельд А.* Оптика. — М.: ИЛ, 1953.]
  32. *Rubinnowicz A.*, Prog. Opt., **4**, 199—240 (1965).
  33. *Gordon W. B.*, J. Math Phys., **16**, 448 (1975).
  34. *Beran M. J., Parrent G. B.*, Theory of Partial Coherence, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964;  
*Glauber R. J.* — In: Quantum Optics and Electronics (eds. C. De Witt, A. Blandin, S. Cohen-Tannoudji), Gordon and Breach, New York, 1965, p. 63—185. [Имеется перевод в кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М.: Мир, 1970, с. 91—280.]  
*Mandel L., Wolf E.*, Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965);  
*Klauder J. R., Sudarshan E. C. G.*, Fundamentals of Quantum Optics, Benjamin, New York, 1968. [Имеется перевод: *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970.]
  35. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., **130**, 2529 (1963); Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
  36. *Sudarshan E. C. G.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 277 (1963).
  37. *Pike E. R.* — In: Quantum Optics (eds. S. M. Kay, A. Maitland), Academic Press, New York, 1970, p. 127.



38. *Arecchi F. T., De Giorgio V.* — In: *Laser Handbook* (eds. F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois), v. 1, North-Holland Publ., Amsterdam, 1972, p. 191—264.
39. *Crosignani B., Di Porto P., Bertolotti M.*, *Statistical Properties of Scattered Light*, Academic Press, New York, 1975.
40. *Welford W. T.*, *Prog. Opt.*, **13**, 267—292 (1976).
41. *Black G., Linfoot E. H.*, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **239**, 522 (1957).
42. *Duffieux P. M.*, *The Fourier Transform and its Application to Optics*, Wiley, New York, 1983.
43. *Linfoot E. H.*, *Fourier Methods in Optical Image Evaluation*, Focal Press, London, 1960.
44. *Toraldo di Francia G.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 799 (1969).
45. *Landau H. J., Pollack H. O.*, *Bell Syst. Tech. J.*, **41**, 1295 (1962).
46. *Gori F., Guattari G.*, *Opt. Commun.*, **7**, 163 (1973).
47. *Gori F., Ronchi L.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 150 (1981).
48. *Cornbleet S.*, *Electron.Lett.*, **2**, 79 (1966).
49. *Jacquinet P., Roizen-Dossier B.*, *Prog. Opt.*, **3**, 29—186 (1964).
50. *Toraldo di Francia G.*, *Nuovo Cimento Suppl.*, **9**, 426 (1952).
51. *Ronchi V.*, *Appl. Opt.*, **3**, 437 (1964).
52. *Toraldo di Francia G.*, *Optical Image Evaluation*, Nat. Bur. Stand., Washington, D. C., 1954.
53. *Dekanosidze E. N.* *Tables of Lommel's Functions of Two Variables*, Pergamon, Oxford, 1960.
54. *Otis G.*, *Opt. Soc. Am.*, **64**, 1545 (1974).

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Cowley J. M.*, *Diffraction Physics*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1984.
- Erkkila J. H.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 197 (1981).
- Федоров В. Б., Митяков В. Г.*, *Опт. и спектр.*, 1984, т. 56, с. 878.
- Li Y., Wolf E.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **1A**, 801 (1984).
- Murata K.* — In: *Progress in Optics*, v. 5, (ed. E. Wolf), North-Holland Publ., Amsterdam, 1966, p. 199—245.
- Northover F. H.*, *Applied Diffraction Theory*, Amer. Elsevier, New York, 1971.
- Yu F. T. S.*, *Optics and Information Theory*, Wiley, New York, 1976.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

## 5.1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на видимую простоту, интегралы Гельмгольца — Кирхгофа и Гюйгенса — Френеля можно вычислить аналитически только в ограниченном числе случаев; вообще же необходимо привлекать численные методы.

Применимость всех численных методов ограничена тем, что при вычислениях можно использовать лишь конечный набор значений поля на опорной плоскости. Это приводит к появлению ошибок, особенно существенных в тех случаях, когда подынтегральные функции являются быстроменяющимися. К сожалению, в большинстве случаев дифракционная картина в дальней области при рассеянии света на препятствиях состоит из контрастных и узких пиков. При этом численный подход становится крайне трудоемким из-за необходимости использования множества конкретных значений поля.

Альтернативой численным методам стала очень популярная техника, основанная на асимптотическом вычислении интегралов [1]. Есть несколько причин такого успеха. Это и простота выражений, и высокая степень точности, достигаемая за счет удержания необходимого числа членов асимптотического ряда, и возможность разделения области поля на участки, в которых предсказывается конкретное поведение поля. Но наиболее важна возможность использования более точного представления поля на опорной апертуре.

Из всех перечисленных преимуществ последнее нуждается в дополнительных комментариях. Обычно наиболее важной задачей является вычисление истинного распределения поля на опорной поверхности, поскольку, если поле здесь известно, то мы можем его определить и во всем пространстве. Вообще говоря, эту задачу нельзя решить точно, и поэтому в большинстве случаев используется приближенное распределение поля, вычисленное или в отсутствие препятствий, если апертура достаточно велика по сравнению с длиной волны (*приближение Кирхгофа*), или в других случаях без учета апертуры (*приближение Бете*). При использовании приближения Кирхгофа поле считается

равным нулю на непрозрачных участках экрана и равным невозмущенному значению на самой апертуре. Это распределение в дальнейшем можно улучшить, используя итерационную процедуру, состоящую в вычислении поля с использованием на каждом шаге значения поля на предыдущем шаге. С практической точки зрения такая стратегия требует для полей изучения простых выражений, допускающих асимптотические представления. С некоторыми приближениями *ad hoc* данный метод применяется, например, для вычисления дифракции на щели. Этот и аналогичные случаи привели к новому направлению, в котором, по сути дела, асимптотические представления являются составными блоками выражений для электромагнитных полей.

Все асимптотические методы, которые мы обсудим, можно считать модификациями методов Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) и *стационарной фазы* (СФ). Первый из них (ВКБ) более применим к дифференциальным уравнениям, а во втором (СФ) рассматриваются интегралы, содержащие быстро осциллирующие функции. В некоторых случаях метод стационарной фазы удобнее заменить методом *наибыстрейшего спуска* (НС), который позволяет точно учесть локализацию на комплексной плоскости стационарных точек фазового множителя.

В простейшем случае дифракционный интеграл сводится к фурье-преобразованию следующего вида:

$$I(k) = \int_a^b g(s) e^{-iks} ds. \quad (5.1.1)$$

Если  $g(s)$  — функция, непрерывная вместе со своими производными порядка меньше, чем  $N$ , то при больших  $k$  можно определить функцию  $I(k)$ , последовательно, применяя интегрирование по частям:

$$I = \frac{1}{-ik} g e^{-iks} \Big|_a^b - \frac{1}{(-ik)^2} \frac{dg}{ds} e^{-iks} \Big|_a^b + \dots + \frac{(-1)^{N-1}}{(-ik)^N} \frac{d^{N-1}g}{ds^{N-1}} e^{-iks} \Big|_a^b + \frac{(-1)^N}{(-ik)^N} \int_a^b \frac{d^N g}{ds^N} e^{-iks} ds. \quad (5.1.2)$$

Последний интеграл в правой части этого выражения можно оценить, используя *теорему Римана — Лебега*, согласно которой если  $\int_a^b |d^N g/ds^N| ds < \infty$ , то мы имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{d^N g}{ds^N} e^{-iks} ds = 0. \quad (5.1.3)$$

Следовательно, процедура интегрирования по частям позволяет вычислить фурье-преобразование вплоть до членов  $O(k^{-N})$ , где  $N$  — максимальное целое число, для которого интеграл от  $|d^N g/ds^N|$  конечен. Это, разумеется, приводит к сильным ограничениям класса рассматриваемых функций. Например, для функции  $g(s) = \sqrt{s}$  такое вычисление при  $a = 0$  и  $b > 0$  возможно лишь до  $N = 1$ , и самое лучшее, что можно сделать, так это записать функцию  $I(k)$  в виде

$$I(k) = \frac{1}{-ik} s^{1/2} e^{-iks} \Big|_0^b + \frac{1}{ik} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^b \frac{e^{-iks}}{\sqrt{s}} ds. \quad (5.1.4)$$

В дальнейшем мы покажем, что  $I(k)$  можно представить в виде асимптотического ряда по большому параметру  $k$ , так что члены высшего по сравнению с  $1/k$  порядка можно получить путем обобщения процедуры интегрирования по частям.

В некоторых случаях встречаются дифракционные интегралы вида

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikas^2} g(s) ds. \quad (5.1.5)$$

При  $k \rightarrow \infty$  можно получить точную оценку этого интеграла, если предположить, что  $g(s)$  является постоянной в окрестности нуля. При этом мы имеем

$$I(k) = \frac{g(0)}{\sqrt{k|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mp i x^2} dx = \frac{g(0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{|a|k}} \begin{cases} e^{-i\pi/4}, & a > 0, \\ e^{i\pi/4}, & a < 0. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Видно, что эта формула получена методом стационарной фазы.

Интегралы в теории углового спектра могут иметь различный вид [см., например, выражения (4.9.2), (4.9.5) и (4.9.6)]. В общем случае их можно записать следующим образом:

$$I(k) = \int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos(\beta - \phi)} S(\beta) d\beta, \quad (5.1.7)$$

где  $S(\beta)$  — некоторая функция величины  $\beta$ , характеризующаяся полюсными сингулярностями и разрезами. Для вычисления  $I(k)$  при больших  $k$  удобно преобразовать контур  $\Gamma$  аналогично тому, как это было сделано в выражении (4.9.15). При этом в  $I(k)$  дают вклад полюсы  $S(\beta)$ , а также интегралы типа (5.1.7), у которых контур  $\Gamma$  заменяется на контур наискорейшего спуска (КНС), и интегралы по контуру  $\Gamma_{\beta}$ , окружающему точки ветвления функции  $S(\beta)$ , если они есть. КНС определяется как контур, который проходит через ту точку на комплексной  $\beta$ -плоскости, где фаза  $k\rho \cos(\beta - \phi)$  стационарна, и затем

следует по траектории наименьшего уменьшения мнимой части  $\cos(\beta - \phi)$ . Вдоль КНС фазовый множитель можно записать как  $\exp[-ik \rho \cos(\beta - \phi)] \propto \exp(-u^2)$ , где  $u$  — вещественная функция величины  $s$  вдоль КНС. Таким образом, используя замену переменных  $s \rightarrow u$ , интеграл можно свести к виду (5.1.6).

Вблизи каустика или фокуса методы ВКБ, СФ и НС приводят к сингулярным полям. Средством устранения этих сингулярностей являются *сравнительные интегралы*, из которых наиболее известны *функции Эйри*, они же — *интегралы радуги*, получившие свое название при объяснении Эйри образования радуги. Умножая эти интегралы сравнения на асимптотический ряд, можно получить полное представление поля, которое справедливо как вблизи, так и вдали от критических участков. Такой подход, имеющий много общего с методом Лангера (разд. 3.3), называют *теорией однородного асимптотического представления* [2—6].

## 5.2. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Подынтегральное выражение в дифракционных интегралах содержит фазовый множитель, который может осциллировать почти всюду сколь угодно быстро, если устремить  $k$  к бесконечности. Это верно всегда, за исключением тех значений переменной интегрирования, при которых обращается в нуль производная фазы. Удобно разделить весь интервал интегрирования на два множества, одно из которых состоит из окрестностей стационарных точек фазы. При этом можно ожидать, что при достаточно больших  $k$  вклад от тех областей, в которых фазовый множитель быстро осциллирует, становится пренебрежимо мал. Действительно, если подынтегральное выражение имеет вид  $g(s) \exp[-ikh(s)]$ , то фаза изменяется на  $2\pi$  при  $\Delta s = 2\pi/[h'(s)k] = O(1/k)$ . Полагая  $k \rightarrow \infty$  при  $h' \neq 0$ , приращение  $\Delta s$  можно сделать сколь угодно малым, так что изменением функции  $g(s)$  на интервале  $s, s + \Delta s$  можно пренебречь и соответствующий интеграл обратиться в нуль. Таким образом, весь интеграл сводится к вкладу от окрестностей точек, в которых  $h' = 0$  (*стационарные точки*). Так как вблизи этих точек фаза приблизительно равна  $k(h_0 + \frac{1}{2}h_0''s^2)$ , соответствующий интеграл вычисляется в явном виде (*метод стационарной фазы*).

Считается, что Стокс [7] был первым, кто еще в 1856 г. использовал преимущества предлагаемого метода и получил приближенное вы-

ражение для интеграла Эйри. Общий метод был предложен лордом Кельвином [8] в 1887 г., а строгое его обоснование было дано Ватсоном [9] в 1918 г. Строгость нашего изложения будет ограничена упрощенным подходом Эрдейи [10, 11], базирующимся на использовании последовательного интегрирования по частям [12]. Прежде всего рассмотрим случай, когда стационарные точки, если они есть, совпадают с конечными точками интервала интегрирования. Затем мы обобщим анализ на интегралы с произвольным числом стационарных точек, расположенных внутри интервала.

Для того чтобы рассмотреть отдельно вклад каждой из критических точек, применим математический метод ван дер Корпута [12, 13]. В этом методе используется специальный класс функций так называемых *нейтрализаторов*, которые равны единице вблизи одного из концов интервала и нулю вблизи другого. Кроме того, производные любого порядка от этих функций равны нулю на обоих концах интервала.

### 5.2.1. Асимптотическое разложение интегралов типа преобразования Фурье с монотонной фазой

В качестве предварительного шага рассмотрим асимптотическое разложение интеграла типа Фурье [14, 15]:

$$I(k) = \int_0^a e^{-ikh(s)} v(s) g(s) ds, \quad (5.2.1)$$

где  $h(s)$  — монотонная функция аргумента  $s$  на интервале  $(0, a)$  и

$$v(s) = \int_s^a \frac{\exp[-1/y + 1/(y-a)] dy}{\int_0^a \exp[-1/y + 1/(y-a)] dy} \quad (5.2.2)$$

— функция, введенная Ван дер Корпутом [13], которая называется *нейтрализатором*, причем

$$v(0) = 1, \quad v(a) = 0. \quad (5.2.3)$$

Функция  $v(s)$  обладает также тем свойством, что при приближении  $s \in (0, a)$  к концам интервала все производные функции  $v(s)$  обращаются в нуль. Предположим, кроме того, что в интервале  $(0, a)$  функции  $h$  и  $g$  можно записать в виде

$$h(s) = h_0 + s^\rho u(s), \quad (5.2.4a)$$

$$g(s) = s^\gamma v(s), \quad (5.2.4b)$$

где  $u$  и  $v$  — аналитические функции переменной  $s$ , отличные от нуля при  $s = 0$ . Пусть, кроме того,  $0 > \operatorname{Re} \gamma > -1$  и  $\rho > 0$ . Поскольку  $s^\rho |u(s)|$  — возрастающая функция переменной  $s$ , можно перейти к другой переменной, определяемой следующим образом:

$$x^\rho = s^\rho |u(s)|, \quad (5.2.5)$$

где выбирается та ветвь, для которой  $x$  — возрастающая функция переменной  $s$ . Заменяя в (5.2.1)  $s$  на  $x$ , получаем

$$I(k) = \exp(-ikh_0) \int_0^{x(a)} \exp(-ik\epsilon x^\rho) x^\gamma f(x) v(x) dx, \quad (5.2.6)$$

где  $x > 0$ ,  $\epsilon = \operatorname{sgn} u(0)$  и

$$f(x) = (g(s)/|h(s) - h_0|)^{\gamma/\rho} ds/dx. \quad (5.2.7)$$

Если  $f(x)$  можно продифференцировать  $N$  раз, то, на что первоначально указал Эрдейи (см. работу Блейстейна и Хандельсмана [14], разд. 3.4), интеграл в (5.2.6) можно записать в виде полинома относительно  $1/k$  с помощью последовательного интегрирования по частям:

$$I(k) \exp(ikh_0) = - \sum_{n=0}^{N-1} h^{(-n-1)}(x; k) \frac{d^n}{dx^n} [v(x)f(x)] \Big|_0^{x(a)} + R_N, \quad (5.2.8)$$

где

$$R_N = (-1)^N \int_0^{x(a)} h^{(-N)}(x; k) \frac{d^N}{dx^N} [v(x)f(x)] dx \quad (5.2.9)$$

$$h^{(-n-1)}(x; k) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_x^{x+\infty(-ie)^{1/\rho}} dx_n \int_{x_n}^{x_n+\infty(-ie)^{1/\rho}} dx_{n-1} \cdots \int_{x_1}^{x_1+\infty(-ie)^{1/\rho}} dx_0 x_0^\gamma \exp(-ik\epsilon x_0^\rho) = \\ &= -\frac{1}{n!} \int_x^{x+\infty(-ie)^{1/\rho}} (x_0 - x)^n x_0^\gamma \exp(-ik\epsilon x_0^\rho) dx_0. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Последнее тождество нетрудно доказать, изменяя порядок интегрирования. В частности,

$$\begin{aligned} h^{(-n-1)}(0, k) &= -\frac{1}{n!} \int_0^{\infty(-ie)^{1/\rho}} x_0^{n+\gamma} \exp(-ik\epsilon x_0^\rho) dx_0 = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\Gamma[(n+\gamma+1)/\rho]}{\rho k^{(n+\gamma+1)/\rho}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\epsilon \frac{n+\gamma+1}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Гаусса. Наличие функции-нейтрализатора приводит к тому, что вклад граничной точки  $x = x(a)$  тождественно равен нулю и разложение (5.2.8) с помощью соотношения (5.2.11) можно переписать в виде

$$I(k) \exp(ikh_0) = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma[(n+\gamma+1)/\rho] \exp[-i(\pi/2)\varepsilon(n+\gamma+1)/\rho]}{k^{(n+\gamma+1)/\rho}} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} + R_N. \quad (5.2.12)$$

Можно показать (см. работу [14, с. 99, выражение (3.5.46)]), что

$$|h^{(-n-1)}(x; k)| < \frac{x^\gamma}{n!} \int_0^\infty \sigma^n \exp(-k\sigma^\rho) d\sigma = \frac{x^\gamma \Gamma[(n+1)/\rho]}{n! \rho k^{(n+1)/\rho}}. \quad (5.2.13)$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{(N+\gamma+1)/\rho} R_N = \frac{1}{\rho N!} \Gamma\left(\frac{N+\gamma+1}{\rho}\right) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\varepsilon \frac{N+\gamma+1}{\rho}\right) \frac{d^N f}{dx^N} \Big|_{x'=0}, \quad (5.2.14)$$

откуда находим

$$R_N = O(k^{-(N+\gamma+1)/\rho}). \quad (5.2.15)$$

Если  $f$  можно продифференцировать бесконечное число раз, то  $N$  можно выбрать сколь угодно большим. Следовательно, в (5.2.12) можно формально заменить  $N$  на  $\infty$ , опустив  $R_N$  и заменив знак равенства знаком асимптотического равенства (т. е. знак  $=$  переходит в  $\sim$ ). Если теперь ввести функцию

$$a(s) = (dx/ds)^{-1}, \quad (5.2.16)$$

то мы можем написать следующее выражение:

$$(d^n/dx^n) f(x) = [a(s) d/ds]^n a(s) g(s) |h(s) - h_0|^{-\gamma/\rho}, \quad (5.2.17)$$

подстановка которого в (5.2.12) окончательно дает

$$I(k) \sim \exp(-ikh_0) \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{k^{(n+\gamma+1)/\rho}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\varepsilon \frac{n+\gamma+1}{\rho}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n+\gamma+1}{\rho}\right) \left(a \frac{d}{ds}\right)^n (ag|h - h_0|^{-\gamma/\rho})|_{s=0}. \quad (5.2.18)$$

Последнее разложение можно использовать в интеграле (5.2.1), если в подынтегральное выражение ввести функцию-нейтрализатор. Для этого нужно воспользоваться следующим тождеством:



$$\begin{aligned}
 I(k) &= \int_0^a e^{-ikh(s)} g(s) ds = \int_0^a e^{-ikh(s)} v(s) g(s) ds + \int_0^a e^{-ikh(s)} [1 - v(s)] g(s) ds \equiv \\
 &\equiv I_0(k) + I_a(k).
 \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

В частности,  $I_a(k)$  можно переписать в виде

$$I_a(k) = \exp(-ikh_a) \int_{x(0)}^0 \exp(-ik\varepsilon_a x^{\rho_a}) x^{\gamma_a} f_a(x) v(x) dx, \tag{5.2.20}$$

где  $x(0) < 0$ ,  $\varepsilon_a = \operatorname{sgn} u(a)$ , а показатели степени  $\gamma_a$ ,  $\rho_a$  и  $h_a$  определяются выражениями

$$h(s) = h_a + (s - a)^{\rho_a} u_a(s), \tag{5.2.21a}$$

$$g(s) = (s - a)^{\gamma_a} v_a(s), \tag{5.2.21б}$$

в то время как

$$x = (s - a) |u_a(s)|^{1/\rho_a}, \tag{5.2.21в}$$

$$f_a(x) = [g(s)/|h(s) - h_a|^{\gamma_a/\rho_a}] (ds/dx). \tag{5.2.21г}$$

Теперь в выражении (5.2.20) можно сделать замену  $x \rightarrow -x$  и использовать разложение (5.2.18). Таким образом, мы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I_a(k) &= \exp(-ikh_a) (-1)^{\gamma_a} \int_0^{-x(0)} \exp[-ik(-1)^{\rho_a} x^{\rho_a} \varepsilon_a] x^{\gamma_a} f_a(-x) v(x) dx \sim \\
 &\sim \exp(-ikh_a) \frac{(-1)^{\gamma_a}}{\rho_a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma[(n + \gamma_a + 1)/\rho_a]}{n! k^{(n + \gamma_a + 1)/\rho_a}} \times \\
 &\times \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \varepsilon_a (-1)^{\rho_a} \frac{n + \gamma_a + 1}{\rho_a}\right] \left. \frac{d^n}{dx^n} f_a(x) \right|_{x=0},
 \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

где  $(-1)^{\gamma_a} = e^{i\pi\gamma_a}$  и  $(-1)^{\rho_a} = e^{i\pi\rho_a}$ .

### 5.2.2. Обобщение метода СФ на дифракционные интегралы с несколькими стационарными и сингулярными точками

Рассмотрим одномерный дифракционный интеграл вида

$$u(\mathbf{r}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_a^b u(x', 0) \frac{e^{-ikR}}{R^{1/2}} \hat{z} \cdot \hat{R} dx'. \tag{5.2.23}$$

Если  $u(x', z)$  — лучевое поле вида  $A \exp(-ikS)$ , то  $u(\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$I(k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_a^b g(s) e^{-ikh(s)} ds, \quad (5.2.24)$$

где через  $s$  мы обозначили  $x'$ ,  $g(x') = A(x')R^{-1/2}\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ , а  $h(x') = R(x') + S(x')$ . Если  $h$  — ограниченная функция переменной  $s$ , а  $g$  и ее производные имеют конечное число разрывов, то интервал  $(a, b)$  можно разбить на конечное число меньших интервалов, отделенных друг от друга *критическими точками* подинтегрального выражения (т. е. точками разрыва функций  $h$  и  $g$  и их производных, граничными точками  $a$  и  $b$ , а также *стационарными точками* функции  $h$ ). Пусть критические точки можно упорядочить следующим образом:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b. \quad (5.2.25)$$

В каждом из интервалов  $h(s)$  является монотонной функцией переменной  $s$ , непрерывной вместе со всеми своими производными. Те точки  $s$ , для которых  $h'(s) = 0$ , называются *стационарными точками* функции  $h(s)$ . Теперь для каждого из интервалов можно использовать асимптотические разложения (5.2.18) и (5.2.22), чтобы вычислить вклады  $I_i^+$  и  $I_i^-$  от правой и левой окрестностей каждой из критических точек  $a_i$ , так что

$$I(k) = \sum_{i=0}^m (I_i^+ + I_i^-). \quad (5.2.26)$$

Заметим, что в граничных точках  $I_a^-$  и  $I_b^+$  опускаются.

В общем случае, используя (5.2.18) и (5.2.22), имеем

$$I_{i(\rho, \gamma)}^\pm \sim k^{(1/2) - (\gamma+1)/\rho} \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \rho} \exp(-ikh_i + i\pi/4) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\pm \frac{\Gamma[(n + \gamma + 1)/\rho]}{n! k^{n/\rho}} \left(a \frac{d}{ds}\right)^n \left[ \frac{a(s)g(s)}{|h - h_i|^{\gamma/\rho}} \right]_{s=a_i}. \quad (5.2.27)$$

Здесь  $\rho$  и  $\gamma$  — индексы критических точек  $a_i$  при подходе слева (—) или справа (+), в то время как

$$C_n^+ = \exp[-i(\pi/2)\varepsilon(n + \gamma + 1)/\rho], \quad (5.2.28a)$$

$$C_n^- = (-1)^{n+\gamma} \exp[-i(\pi/2)\varepsilon(-1)^\rho(n + \gamma + 1)/\rho]. \quad (5.2.28b)$$

В частности, если  $h$  и  $g$  непрерывны в точке  $a_i$ , то функция  $a(s)$ , определяемая выражением (5.2.16), также непрерывна и

$$\begin{aligned}
I_{i(\rho,\gamma)} &= I_{i(\rho,\gamma)}^+ + I_{i(\rho,\gamma)}^- \sim k^{1/2-(1+\gamma)/\rho} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\rho} \exp\left(-ikh_i + i\frac{\pi}{4}\right) \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + (-1)^{n+\gamma} \exp\left\{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon[(-1)^\rho - 1] \frac{n+\gamma+1}{\rho}\right\} \right] \times \\
&\times \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon \frac{n+\gamma+1}{\rho}\right] \frac{\Gamma[(n+\gamma+1)/\rho]}{n!k^{n/\rho}} \times \\
&\times \left[ a(s) \frac{d}{ds} \right]^n \left[ \frac{a(s)g(s)}{|h-h_i|^{\gamma/\rho}} \right] \Big|_{s=a_i}
\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

### 5.2.3. Вклады стационарных точек

В случае когда в точке  $a_i$  функция  $h(s)$  непрерывна, а ее производные порядка меньше чем  $\rho$  равны нулю, точка  $a_i$  называется *стационарной точкой порядка  $\rho$* . В частности, для  $\rho = 2$  и  $\gamma = 0$  выражение (5.2.29) дает

$$\begin{aligned}
I_{(2,0)} &\sim \frac{\exp[i(1-\varepsilon)\pi/4 - ikh]}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n)!k^n} \times \\
&\times \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\varepsilon n\right) \left(a \frac{d}{ds}\right)^{2n} [a(s)g(s)] \Big|_{s=a_i} = \\
&= \exp\left[i(1-\varepsilon)\frac{\pi}{4}\right] 2^{-(1/2)} \exp(-ikh) \left\{ ag + \frac{\exp[-i(\pi/2)\varepsilon]}{4k} \times \right. \\
&\quad \left. \times [(aa'^2 + a^2a'')g + 3a^2a'g' + a^3g''] + O(k^{-2}) \right\},
\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

где для простоты обозначений мы опустили аргумент  $a_i$  и отметили штрихом производную по  $s$ . Следующие члены разложения читатель сможет найти в книге Дингла [16].

Теперь нетрудно показать, что

$$a(a_i) = [2/\varepsilon k''(a_i)]^{1/2}, \tag{5.2.31a}$$

$$a'(a_i) = -\frac{1}{3}(h'''/h'')a(a_i), \tag{5.2.31б}$$

$$a''(a_i) = \left[\frac{1}{4}(h^{IV}/h'') + (11/36)(h'''/h'')^2\right]a(a_i). \tag{5.2.31в}$$

Подставляя эти выражения вновь в (5.2.30), окончательно получаем

$$I_{(2,0)} \sim \frac{\exp[i(1-\varepsilon)\pi/4 - ikh]}{(\varepsilon h'')^{1/2}} \left\{ g + \frac{\exp[-i(\pi/2)\varepsilon]}{2kh''\varepsilon} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left[ \frac{5}{12} \left( \frac{h'''}{h''} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{h^{IV}}{h''} \right] g - \frac{h'''}{h''} g' + g'' \right] + O(k^{-2}) \right\}, \quad (5.2.32)$$

где все величины вычислены при  $s = a_i$ . Заметим, что главный член асимптотического ряда не зависит от  $k$  [см. выражение (E1) в приложении].

Выполняя аналогичные преобразования, получаем для  $I_{(3,0)}$ :

$$I_{(3,0)} \sim \frac{k^{1/6} \exp(i\pi/4 - i\varepsilon\pi/6 - ikh)}{3(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[(n+1)/3]}{n! k^{n/3}} \exp\left(-i\frac{\pi}{6}\varepsilon n\right) \times \\ \times \left\{ 1 + (-1)^n \exp\left[i\frac{\pi}{3}\varepsilon(n+1)\right] \right\} \left( a \frac{d}{ds} \right)^n [a(s)g(s)] \Big|_{s=a_i}. \quad (5.2.33)$$

В этом случае

$$a(a_i) = [6/\varepsilon h'''(a_i)]^{1/3}, \quad (5.2.34)$$

так что

$$I_{(3,0)} \sim \frac{k^{1/6} \exp(i\pi/4 - i\varepsilon\pi/6 - ikh)}{3(2\pi)^{1/2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[ 1 + \exp\left(i\varepsilon\frac{\pi}{3}\right) \right] \left( \frac{6}{\varepsilon h'''} \right)^{1/3} g + O(k^{-1/6}). \quad (5.2.35)$$

#### 5.2.4. Вклады граничных точек

В граничных точках  $a$  и  $b$ , если  $g$  не равна нулю, мы имеем  $\gamma = 0$ ,  $\rho = 1$  и [см. выражение (E1) в приложении E]

$$I_{a(1,0)} \sim \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh_a)}{(2\pi k)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^n} \left( \frac{1}{h'} \frac{d}{ds} \right)^n \frac{g}{h'} \Big|_{s=a} = \quad (5.2.36a) \\ = \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh_a)}{(2\pi k)^{1/2}} \left[ \frac{g_a}{h'_a} + \frac{1}{ik} \frac{h'_a g'_a - g_a h''_a}{h_a'^3} + O(k^{-2}) \right],$$

$$I_{b(1,0)} \sim - \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh_b)}{(2\pi k)^{1/2}} \left[ \frac{g_b}{h'_b} + \frac{1}{ik} \frac{h'_b g'_b - g_b h''_b}{h_b'^3} + O(k^{-2}) \right]. \quad (5.2.36b)$$

В случае же когда  $g$  обращается в нуль, скажем в точке  $a$ , мы имеем  $\gamma = 1$  и

$$\begin{aligned}
 I_{a(1,1)} &\sim \frac{\exp(-i3\pi/4 - ikh_a)}{(2\pi)^{1/2} k^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(ik)^n} \left( \frac{1}{h'} \frac{d}{ds} \right)^n \left[ \frac{g}{h'(h-h_a)} \right] = \\
 &= \frac{\exp(-i3\pi/4 - ikh_a)}{(2\pi)^{1/2} k^{3/2}} \left[ \frac{g'_a}{h_a^2} + \frac{2}{ik} \frac{g''_a h'_a - 3g'_a h''_a}{2h_a^4} + O(k^{-2}) \right]. \quad (5.2.37)
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что пренебречь вкладом граничных точек нельзя даже в том случае, когда поле в них равно нулю.

### 5.2.5. Вклады точек разрыва

Для точек разрыва функций  $g$  или  $h$  при  $\rho = 1$  и  $\gamma = 0$  первые два слагаемых асимптотического разложения записываются в виде

$$\begin{aligned}
 I_{(1,0)} &= \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh^+)}{(2\pi k)^{1/2}} \left( \frac{g^+}{h'^+} + \frac{1}{ik} \frac{h'^+ g'^+ - g^+ h''^+}{h'^+{}^3} \right) - \\
 &- \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh^-)}{(2\pi k)^{1/2}} \left[ \frac{g^-}{h'^-} + \frac{1}{ik} \frac{h'^- g'^- - g^- h''^-}{(h'^-)^3} \right] + O(k^{-5/2}). \quad (5.2.38)
 \end{aligned}$$

### 5.2.6 Асимптотическое выражение для дифракционных интегралов

Если собрать все главные члены в полученных интегралах, то для  $\rho = 1$  можно записать

$$\begin{aligned}
 I(k) &= \sum_i' \frac{e^{-ikh_i}}{(h_i'')^{1/2}} g_i + \left( \frac{e^{-ikh_a}}{h_a'} g_a - \frac{e^{-ikh_b}}{h_b'} g_b \right) \frac{e^{-i\pi/4}}{(2\pi k)^{1/2}} + \\
 &+ \frac{e^{-i\pi/4}}{(2\pi k)^{1/2}} \sum_i'' \left( \frac{e^{-ikh_i^+}}{h_i'^+} g_i^+ - \frac{e^{-ikh_i^-}}{h_i'^-} g_i^- \right) + O(k^{-1}), \quad (5.2.39)
 \end{aligned}$$

где сумма  $\sum'$  включает в себя все стационарные точки, а  $\sum''$  — все точки разрыва.

Учитывая равенство  $h = S + R$  [ср. с выражениями (5.2.23) и (5.2.24)], непосредственно получаем, что стационарные точки соответствуют корням уравнения

$$h' = (\mathbf{V}'S + \mathbf{V}'R) \cdot \hat{\mathbf{x}}_s = (\hat{\mathbf{S}}' + \hat{\mathbf{R}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0. \quad (5.2.40)$$

Поскольку векторы  $\hat{\mathbf{S}}'$  и  $-\hat{\mathbf{R}}$  направлены вдоль  $\hat{\mathbf{x}}$ , уравнение (5.2.40) может быть удовлетворено лишь при  $\hat{\mathbf{S}}' = -\hat{\mathbf{R}}$ . Следовательно,

$$h'' = S'' + (z - z')^2 / R^3 = [(1/\rho_c) + (1/R)] (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{R}})^2, \quad (5.2.41)$$

здесь через  $\rho_c$  обозначен радиус кривизны волнового фронта при  $x_i = a_i$ , так что

$$g_i / (h_i'')^{1/2} = [\rho_c / (\rho_c + R)]^{1/2} A(a_i), \quad (5.2.42)$$

$$\sum_i' \frac{\exp(-ikh_i)}{(h_i'')^{1/2}} g_i = \sum_i' \exp\{-ik[S(a_i) + R(a_i)]\} A(a_i) \left(\frac{\rho_c}{\rho_c + R}\right)^{1/2}. \quad (5.2.43)$$

В выражении (5.2.43) сразу же можно узнать главный член разложения поля в ряд Луненберга — Клейна.

Если теперь обозначить через  $\phi_a'$  угол между лучом, падающим в граничную точку  $a$ , и направлением единичного вектора  $-\hat{x}$ , а через  $\phi_a$  —

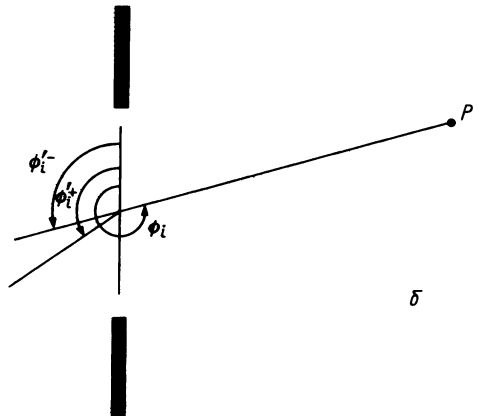
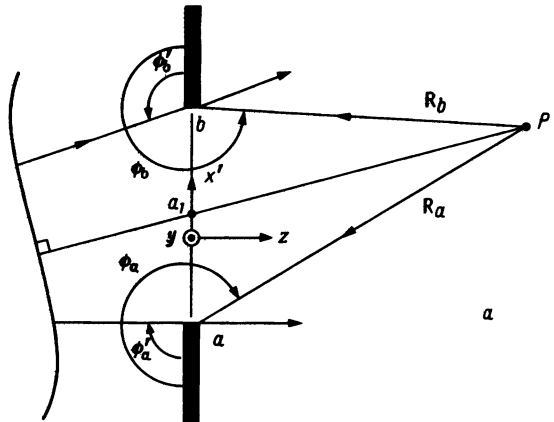


Рис. 5.1. Геометрические представления, используемые при вычислении вкладов в дифракционный интеграл от границ отверстия и стационарных точек ( $a$ ), а также от точек разрыва фазы ( $b$ ).

угол (больший чем  $\pi$ ) между векторами  $-\hat{R}_a$  и  $-\hat{x}$  (см. рис. 5.1, а), то мы имеем

$$h'_a = \cos \phi_a + \cos \phi'_a. \quad (5.2.44)$$

Следовательно, вклад от граничной точки  $a$  можно записать в виде

$$I_a \sim \exp\{-ik[S(a) + R(a)]\} \frac{A(a)}{R_a^{1/2}} \frac{-2 \sin \phi_a}{\cos \phi_a + \cos \phi'_a} \frac{\exp(-i\pi/4)}{(8\pi k)^{1/2}}. \quad (5.2.45)$$

Аналогично, рассматривая точку  $b$  и точку разрыва функций  $h$  и  $g$ , окончательно получаем (см. рис. 5.1, б, на котором определены все углы)

$$\begin{aligned} I(k) \sim & \sum_i' \exp\{-ik[S(a_i) + R(a_i)]\} A(a_i) \left( \frac{\rho_c}{\rho_c + R} \right)^{1/2} + \\ & + \frac{\exp(-i\pi/4)}{(8\pi k)^{1/2}} \exp\{-ik[S(a) + R(a)]\} \frac{A(a)}{R(a)^{1/2}} \frac{-2 \sin \phi_a}{\cos \phi_a + \cos \phi'_a} + \\ & + \frac{\exp(-i\pi/4)}{(8\pi k)^{1/2}} \exp\{-ik[S(b) + R(b)]\} \frac{A(b)}{R(b)^{1/2}} \frac{-2 \sin \phi_b}{\cos \phi_b + \cos \phi'_b} + \\ & + \sum_i'' \frac{\exp(-i\pi/4)}{(8\pi k)^{1/2}} \left[ -\exp[-ik(S_i^+ + R_i)] \frac{A_i^+}{R_i^{1/2}} \frac{-2 \sin \phi_i'}{\cos \phi_i + \cos \phi_i'^+} + \right. \\ & \left. + \exp[-ik(S_i^- + R_i)] \frac{A_i^-}{R_i^{1/2}} \frac{-2 \sin \phi_i'}{\cos \phi_i + \cos \phi_i'^-} \right] \equiv u_g + u_b + u_\Delta. \quad (5.2.46) \end{aligned}$$

Здесь  $u_g$  относится к стационарным точкам, а  $u_b$  и  $u_\Delta$  — соответственно к граничным точкам и точкам разрыва. Член  $u_g$  совпадает с представлением поля в рамках геометрической оптики, в то время как остальные члены учитывают дифракционные эффекты, связанные с конечностью волнового фронта и с разрывами фазы и амплитуды.

Теперь следует переписать  $u_b$  в виде функции падающего поля  $u_i$ :

$$u_b = D_1(\phi_a, \phi'_a) u_i(a) e^{-ikR(a)} R(a)^{-1/2} + D_1(\phi_b, \phi'_b) u_i(b) e^{-ikR(b)} R(b)^{-1/2}, \quad (5.2.47)$$

где введен *дифракционный коэффициент*  $D_1$ , определяемый следующим образом (см. уравнение (27) в статье Келлера [1]):

$$D_1(\phi, \phi') = [e^{-i\pi/4}/(8\pi k)^{1/2}] (-2 \sin \phi) / (\cos \phi + \cos \phi'). \quad (5.2.48)$$

Согласно этому выражению, граница апертуры полностью описывается своими дифракционными коэффициентами. Однако выражение (5.2.47) получено в приближении Кирхгофа, поскольку поле  $u_i$  определяется как падающее поле, вычисленное в отсутствие экрана. В следую-

щей главе мы увидим, что можно учесть и изменение падающего поля за счет самого экрана. При этом выражение (5.2.47) остается справедливым и при использовании невозмущенного падающего поля. Достаточно применить лишь другие выражения для дифракционных коэффициентов, как это было предложено Зоммерфельдом при решении канонической задачи о дифракции плоской волны на полуплоскости.

### 5.2.7. Устранение СФ-сингулярностей с помощью сравнительных интегралов

Асимптотические выражения, рассмотренные выше, становятся сингулярными, когда  $h''(s_i) = 0$  или стационарная точка подходит близко к граничной. Для того чтобы избавиться от этих сингулярностей и получить асимптотически правильное представление дифракционного интеграла, мы можем заменить его *сравнительным интегралом*, который в асимптотическом представлении, приведенном в предыдущем разделе, имеет те же самые сингулярности. Этот интеграл обычно выбирают из класса известных специальных функций, таких, как комплексный интеграл Френеля  $F(x)$ , функция Эйри  $Ai(x)$  или функция параболического цилиндра  $D_{-\frac{1}{2}}(e^{i\pi/4}x)$ . В окрестности тех значений параметров, для которых обычное разложение расходится, дифракционный интеграл нужно представить в виде произведения сравнительного интеграла на асимптотический ряд, который принимает конечное значение при выполнении условия сингулярности. В большинстве случаев точное вычисление суммы ряда не требуется, так как сравнительный интеграл с достаточной степенью точности равен искомому полю, что, однако, верно лишь до тех пор, пока мы находимся достаточно далеко от критических областей, так что обычные разложения справедливы. Иными словами, выражение, полученное с помощью сравнительных интегралов, постепенно и непрерывно переходит в ряд Луненберга — Клейна. Поэтому представление, основанное на сравнительных интегралах, называют *однородным*, а соответствующий подход — *однородной асимптотической теорией*. В следующих разделах мы рассмотрим наиболее интересные частные случаи.

## 5.3. ГРАНИЦЫ ТЕНИ; СТАЦИОНАРНАЯ ТОЧКА ВБЛИЗИ ГРАНИЧНОЙ

Полученное в разд. 5.2.6 выражение для вклада в дифракционный интеграл от граничных точек сингулярно при  $\phi_a - \phi'_a = \pi$ , т. е. в тех случаях, когда дифрагированный луч параллелен лучу, падающему на



границу  $a$  (рис. 5.1,  $a$ ). С геометрической точки зрения продолженный падающий луч разделяет области света и тени, т. е. определяет границы тени, проектируемой апертурой. Поэтому поверхность, образуемая лучами, касающимися края апертуры, называется границей тени. При освещении щели цилиндрической волной граница тени сводится к двум полуплоскостям. Если ограничиться в случае цилиндрического поля лишь анализом его распределения на плоскости, то границей тени естественно и удобно называть две полупрямые, получаемые в сечении истинной границы тени плоскостью.

Мы уже неоднократно обращали внимание читателя на сингулярное поведение поля вблизи границы тени. Благодаря совпадению граничной точки интеграла и его стационарной точки такое поведение аналогично сингулярности вклада в дифракционный интеграл от граничных точек. В принципе эту аномалию можно исключить при более точном асимптотическом вычислении интеграла.

В качестве предварительного шага заметим, что главный член в асимптотическом ряде, представляющем вклад стационарной точки  $\alpha$ , дается выражением

$$I_\alpha \sim \frac{\exp(-i\pi/4 - ikh_\alpha)}{\lambda^{1/2}} g(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iks^2 u_\alpha^0) ds, \quad (5.3.1)$$

где  $u_\alpha^0 = u_\alpha(0) = h''(\alpha)/2$  и  $s_\alpha = 0$ . В случае когда вблизи  $\alpha$  находится и граничная точка, этот интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} I_\alpha &\sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(i\pi/4 - ikh_\alpha) g(\alpha) \int_{s_\alpha}^{\infty} \exp(-iks^2 u_\alpha^0) ds \\ &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(-ikh_\alpha) \frac{g(\alpha)}{(ku_\alpha^0)^{1/2}} F(\xi) = u_i(P) F(\xi), \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

где  $u_i(P)$  — падающее поле в точке наблюдения  $P$ , а  $F(\xi)$  — комплексный интеграл Френеля, учитывающий переход от освещенной области к темной. Здесь  $\xi$  — так называемый *параметр обхода*, определяемый выражением

$$\xi \equiv \sqrt{k(h_\alpha - h_a)} = \sqrt{ku_\alpha^0 s_a}. \quad (5.3.3)$$

Напомним, что  $kh$  — это фаза поля в точке  $P$ , создаваемого цугами волн, выходящих из точки апертуры  $P'(s)$ . Следовательно,  $k(h - h_a) = \xi^2$  представляет собой разность между фазой поля, связанного с идущим без возмущения лучом, и фазой поля, дифрагированного на границе апертуры. Если использовать терминологию гео-

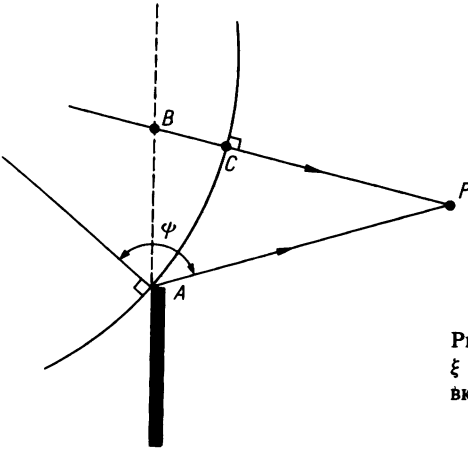


Рис. 5.2. К вычислению параметра обхода  $\xi = [k_0(AP - CP)]^{1/2}$  при определении вкладов в поле в точке  $P$  от точек стационарной фазы ( $C$ ) и границы ( $A$ ).

метрической оптики, то  $h_\alpha - h_a$  является разностью длин оптических путей луча, достигающего точки  $P$  без отклонения, и луча, дифрагированного на границе. Обращаясь к рис. 5.2, имеем

$$\xi = \sqrt{k_0([AP] - [CP])} \simeq -(2k\rho)^{1/2} \cos(\psi/2); \quad (5.3.4)$$

здесь  $\rho = [AP]$  и использован тот факт, что луч в точке  $C$  почти параллелен лучу, проходящему через  $A$ . Знак перед квадратным корнем выбран положительным в области тени и отрицательным в освещенной зоне. На рис. 5.3 схематически отмечена переходная область, окружающая границу тени при освещении прямой кромки плоской волной. Ниже мы покажем, что указанная граница имеет параболическую форму, которая соответствует параметру обхода, равному  $\pm \sqrt{2\pi}$ .

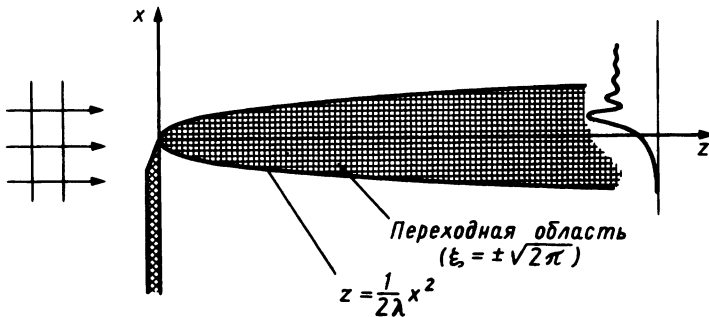


Рис. 5.3. Переходная область вблизи границы тени при освещении полуплоскости плоской волной.

### 5.3.1. Свойства переходной функции $F(x)$

Функция, описывающая переход через границу тени, является *комплексным интегралом Френеля*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} \int_x^\infty e^{-it^2} dt. \quad (5.3.5)$$

Это целая трансцендентная функция, которую можно выразить через интегралы Френеля  $C_1(x)$  и  $S_1(x)$  (рис. 5.4):

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[C_1(x) - iS_1(x)](1 + i), \quad (5.3.6)$$

$$|F(x)| = \frac{1}{2}[1 + 2C_1^2 + 2S_1^2 - 2C_1 - 2S_1]^{1/2}, \quad (5.3.7)$$

где

$$C_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^x \cos t^2 dt, \quad (5.3.8)$$

$$S_1(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^x \sin t^2 dt. \quad (5.3.9)$$

Все значения  $F$  на комплексной плоскости при  $-\infty < x < +\infty$  можно получить с помощью *спирали Корню* (рис. 5.5). Интересным свойством этой кривой является то, что  $ds = |dx|$ , т. е.  $|dx|$  соответствует длине кривой, измеренной вдоль спирали.

Из поведения функции  $F(x)$  можно заключить, что для  $x < -\sqrt{\pi}$  мы имеем  $F(x) \cong 1$ , а для  $x > \sqrt{\pi}$   $F(x) \cong 0$ . Отсюда следует простое приближенное правило: *дифракционные эффекты от края поверхно-*

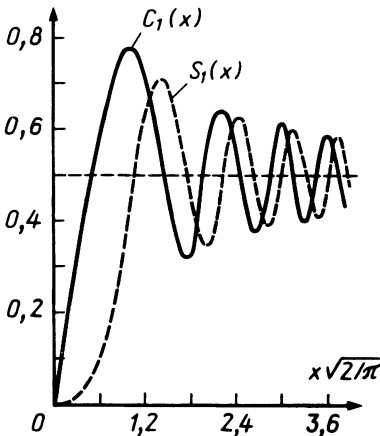


Рис. 5.4. Интегралы Френеля.

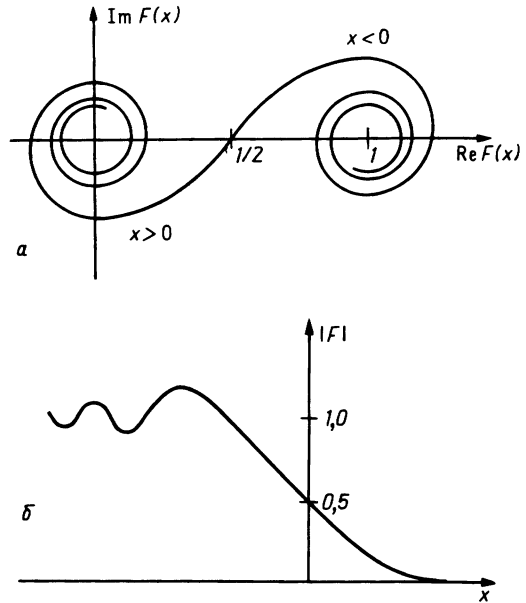


Рис. 5.5. *a* — спираль Корню;  
*б* — амплитуда функции  $F$ .

сти становятся существенными, когда параметр обхода лежит между  $-\sqrt{\pi}$  и  $\sqrt{\pi}$ . Если выразить это условие через длины оптических путей, то разность хода должна быть меньше чем  $\lambda/2$ .

В качестве примера рассмотрим точечный источник  $S$ , поле от которого определяется в точке  $P$ . Пусть между  $S$  и  $P$  (рис. 5.6) расположен прямой край полуплоскости и отлинием источника от точечного можно пренебречь. Практически поле будет описываться приближением геометрической оптики, когда

$$(h^2/2)[(1/d_1) + (1/d_2)] \gg \lambda/2. \quad (5.3.10)$$

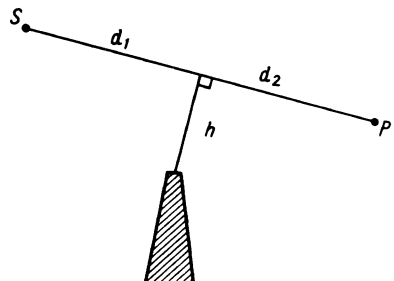


Рис. 5.6. Геометрия, используемая при вычислении параметра обхода ( $S$  — источник;  $P$  — точка наблюдения) в случае дифракции на препятствии, показанном заштрихованной области.

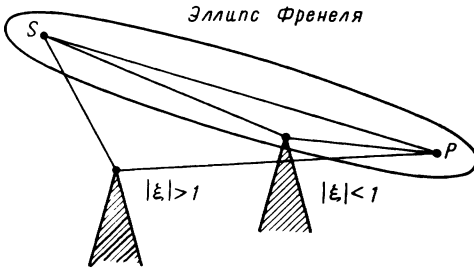


Рис. 5.7. Различное по отношению к эллипсу Френеля положение дифракционных препятствий ( $P$  — точка наблюдения;  $S$  — источник). Поле в точке  $P$  существенно изменяется только за счет препятствия, оказавшегося внутри эллипса Френеля.

Если рассмотреть эллипс Френеля с фокусами в точках  $S$  и  $P$  и полуосью  $a = \lambda/4 + SP/2$  (рис.5.7), то можно сказать, что препятствие, если оно лежит вне эллипса, не изменит наблюдаемого поля. Этот результат был обобщен Кравцовым и Орловым на случаи более сложных полей [18].

### 5.3.2. Асимптотическое поведение функции $F(x)$

При изучении асимптотического поведения дифрагированного поля полезно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\begin{aligned}
 G(x) &= -xe^{-i\pi/4 - ix^2} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-t^2}}{t^2 + ix^2} dt - \text{res} \left( \frac{xe^{-i\pi/4}}{t^2 + ix^2} \right) = \\
 &= -xe^{-i\pi/4 - ix^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2 + ix^2} dt. \tag{5.3.11}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\text{res}$  — вычет в верхней полуплоскости комплексной переменной  $t$  (т. е.  $\text{Im}t > 0$ ). В первом случае контур интегрирования связывает  $x = -\infty$  с  $x = +\infty$ , оставляя справа полюсы подынтегрального выражения. Функция  $G$  является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением прямой линии  $x = \pm |x| e^{i\pi/4}$ , которая является разрезом. Функция  $G$  разрывна при переходе через разрез, и разность ее значений на двух берегах разреза равна 1. Это легко проверить, используя приведенное интегральное представление функции  $G$  и замечая, что скачок связан лишь с изменением  $\text{res}()$ .

Теперь заметим, что для положительных вещественных  $x$  функция  $G(x)$  сводится к  $F(x)$ . Таким образом, в общем виде имеем

$$F(x) = U_F(-x) + G(x), \tag{5.3.12}$$

где  $U_F(-x)$  равна 0 на нижней стороне разреза [т. е. при  $\text{Im}(xe^{-i\pi/4}) < 0$ ] и единице в противном случае. Введение функции  $U_F$  позволяет компенсировать разрывность функции  $G$ .

Можно показать, что при интегрировании по частям последнего интеграла в (5.3.11) функция  $G(x)$  допускает следующее асимптотическое представление:

$$G(x) \sim \hat{F}(x) \left[ 1 + \sum_{n=1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(-2)^n x^{2n} i^n} \right], \quad (5.3.13)$$

где

$$\hat{F}(x) = (1/2\sqrt{\pi})(1/x)e^{-i(x^2 + \pi/4)}. \quad (5.3.14)$$

Поскольку это разложение применимо для любых значений фазы величины  $x$ , окончательно получаем

$$F(x) \sim U_F(-x) + \hat{F}(x) + O(1/x^2), \quad |x| \gg 1. \quad (5.3.15)$$

### 5.3.3. Асимптотическое представление поля

Используя представление для  $F$  (5.3.15), получаем

$$I_a \sim u_i [U_F(-\xi) + \hat{F}(\xi)], \quad (5.3.16)$$

если величина  $|\xi|$  достаточно большая. В соответствии с этим в случае когда стационарная точка приближается к граничной, мы можем пренебречь изолированным вкладом от последней и просто умножить падающее оптическое поле  $u_i$  на переходную функцию  $F$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} u(P) &= u_i U_F(-\xi) + u_i G(\xi) = u_i U_F[(2k\rho)^{1/2} \cos(\psi/2)] + \\ &+ u_i G[-(2k\rho)^{1/2} \cos(\psi/2)] \equiv u_g + u_d; \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

здесь  $u_d \equiv u_i G$ .

### 4.3.4. $F(x)$ при малых аргументах

При малых  $x$  функцию  $F$  можно аппроксимировать первыми членами ее разложения в степенной ряд:

$$F(x) \simeq \frac{1}{2} - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} x \left\{ 1 - \frac{i}{1!3} x^2 - \frac{x^4}{2!5} + i \frac{x^6}{3!7} + \cdots \right\}. \quad (5.3.18)$$

В частности,  $F(0) = 1/2$ ,  $F(1, 6) \simeq -0,16$ ,  $F(-1, 6) \simeq 1,16$ .

#### 5.4. КАУСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ; ДВЕ СОСЕДНИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

С приближением точки наблюдения  $P$  к каустике два или более лучей проходят через  $P$  почти в одном и том же направлении. Математически это означает (рис. 5.8), что у функции  $h(s)$  две или более стационарных точек весьма близки друг к другу. Для определенности предположим, что имеются две такие точки, например  $s_1$  и  $s_2$ . Поскольку  $h'(s) = 0$  в точках  $s_1$  и  $s_2$ , между ними должна быть точка, скажем  $s_0$ , в которой  $h''(s_0) = 0$ . Если поместить теперь начало координат в  $s_0$ , то главный член асимптотического приближения для дифракционного интеграла можно получить, записывая

$$I_\alpha \sim \frac{\exp(i\pi/4 - ikh_\alpha)}{\sqrt{\lambda}} g_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ik(u_\alpha^1 s + \frac{1}{6} u_\alpha^3 s^3)] ds, \quad (5.4.1)$$

где мы обозначили через  $\alpha$  точку  $s_0 = 0$ , а обозначения  $u_\alpha^1$  и  $u_\alpha^3$  использовали соответственно для первой и третьей производных функции  $h$  в точке  $s_0$ . Необходимо заметить, что  $s_0$  не является стационарной точкой и поэтому производная  $u_\alpha^1$  отлична от нуля. В случае когда  $s_1$  очень близка к  $s_2$ , мы имеем

$$u_\alpha^1 + \frac{1}{2} u_\alpha^3 s_1^2 = 0, \quad (5.4.2a)$$

$$u_\alpha^3 s_1 = h''(s_1) \simeq -h''(s_2), \quad (5.4.2b)$$

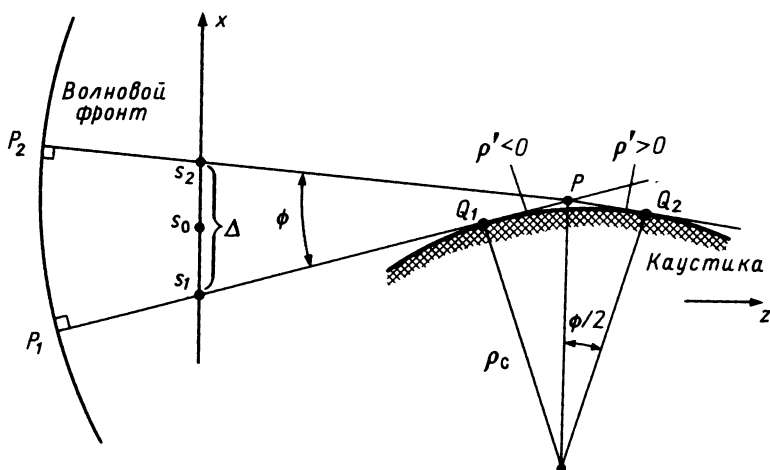


Рис. 5.8. Геометрия, используемая при вычислении поля вблизи каустики.

так что

$$u_\alpha^1 = -\frac{1}{2}h''(s_1)s_1 = \frac{1}{4}h_1''\Delta, \quad (5.4.3a)$$

$$u_\alpha^3 = h''(s_1)/s_1 = -2h_1''/\Delta, \quad (5.4.3b)$$

$$s_1 = -\frac{1}{2}\Delta. \quad (5.4.3b)$$

Здесь  $\Delta$  — расстояние между двумя стационарными точками. Интеграл в правой части выражения (5.4.1) — это функция Эйри  $Ai$  (см. разд. 3.3. и рис. 5.9). Таким образом, мы можем написать

$$\begin{aligned} I_\alpha &\sim \frac{\exp(i\pi/4 - ikh_\alpha)}{\sqrt{\lambda}} g_\alpha 2\pi \left(\frac{2}{ku_\alpha^3}\right)^{1/3} Ai\left[ku_\alpha^1 \left(\frac{2}{ku_\alpha^3}\right)^{1/3}\right] = \\ &= (2\pi k)^{1/2} \exp(i\pi/4 - ikh_\alpha) g_\alpha \left(-\frac{\Delta}{kh_1''}\right)^{1/3} Ai\left[-\frac{1}{4}(k^2 h_1''^2 \Delta^4)^{1/3}\right]. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Однако известно, что [см. разд. 5.2.6, уравнение (5.2.41)]

$$h_1'' = [(R + \rho)/R\rho](\hat{z} \cdot \hat{R})^2 \simeq -(\rho'/R^2)(\hat{z} \cdot \hat{R})^2, \quad (5.4.5)$$

$$\Delta^2 = (R^2 \sin^2 \phi)/(\hat{z} \cdot \hat{R})^2, \quad (5.4.6)$$

где знакпеременная величина  $\rho' = |\rho| - R$  равна расстоянию, измеренному вдоль луча, от  $P$  до каустики (величина  $\rho'$  положительна, когда  $P$  лежит между центром кривизны  $Q$  и апертурой, и отрицательна в противном случае), а  $\phi$  — угол, образованный двумя лучами, проходящими через  $P$ . Используя выражения (5.4.5) и (5.4.6), получаем соотношение

$$\left(-\frac{\Delta}{kh_1''}\right)^{1/3} = [R/(\hat{z} \cdot \hat{R})][\sin \phi/(k\rho')]^{1/3}. \quad (5.4.7)$$

Из простого геометрического рассмотрения можно показать, что при малых  $\phi$  величины  $\rho'$ ,  $\phi$  и радиус кривизны каустики  $\rho_c$  связаны простым соотношением (рис. 5.8)

$$\phi \simeq 2|\rho'|/\rho_c. \quad (5.4.8)$$

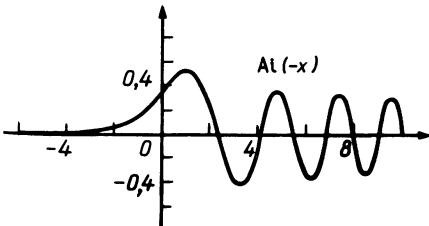


Рис. 5.9. График функции Эйри  $Ai(x)$  для  $-10 \leq x \leq 6$ . Функция  $Ai(x)$  осциллирует при отрицательных значениях  $x$  и экспоненциально затухает при  $x \rightarrow \infty$ .



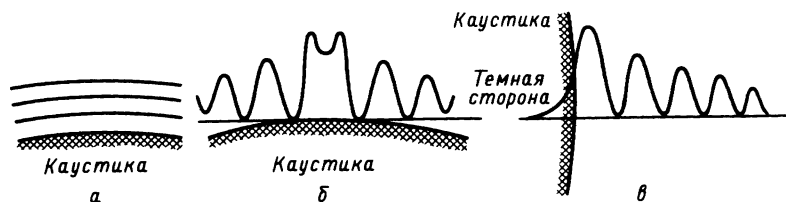


Рис. 5.10. *а* — интерференционные полосы вблизи каустики; *б* — изменение амплитуды поля вдоль луча; *в* — изменение амплитуды поля в перпендикулярном каустике направлении.

Поэтому, заменив  $g_\alpha$  на  $AR^{-1/2}$  и положив  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$ , окончательно получаем

$$I_\alpha(\rho') \sim (2\pi k)^{1/2} \exp(i\pi/4 - ikh_\alpha) AR^{1/2} \left( \frac{2}{k\rho_c} \right)^{1/3} \text{Ai} \left[ - \left( \frac{k^2 \rho'^6}{4\rho_c^4} \right)^{1/3} \right]. \quad (5.4.9)$$

Поскольку произведение  $AR^{1/2}$  постоянно вдоль луча, правая часть выражения (5.4.9) не зависит от положения опорной плоскости  $z = 0$ . Функция  $I(\rho')$  схематически показана на рис. 5.10, *в*. На каустике имеем

$$I_\alpha(0) \sim 0.355(2\pi k)^{1/2} AR^{1/2} \left( \frac{2}{k\rho_c} \right)^{1/3} \exp(i\pi/4 - ikh_\alpha), \quad (5.4.10)$$

в то время как на некотором расстоянии от нее функцию Эйри можно заменить ее асимптотическим выражением [см. (3.3.6)], так что можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_\alpha(\rho') &= A \left( \frac{R}{|\rho'|} \right)^{1/2} \exp(-ikh_\alpha) \{ \exp[ik\rho'^3/(3\rho_c^2)] - i \exp[-ik\rho'^3/(3\rho_c^2)] \} = \\ &= u_g(P, Q_1) + u_g(P, Q_2), \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

где  $u_g(P, Q_i) = A(R/|\rho'|)^{1/2} \exp[-ik(h_\alpha - \rho'^3/(3\rho_c^2))]$  представляет собой поле вдоль луча, проходящего через точки  $P$  и  $Q_i$ ; величина  $\rho'$  положительна, если  $Q_i$  лежит вне отрезка  $PP_i$ , где  $P_i$  — точка пересечения с волновым фронтом. Два луча интерferируют, что приводит к типичной осциллирующей картине (рис. 5.10, *б*). Следует заметить, что каждое из полей при прохождении по касательной к каустике претерпевает сдвиг фазы  $\pi/2$ . Кроме того, эффективное волновое число изменяется как  $k(\rho') = k(1 - \rho'^2/\rho_c^2)$ . Это позволяет говорить, что вблизи каустики волна «замедляется».

Возвращаясь вновь к выражению (5.4.9), заметим, что  $\rho'^2 = 2\rho_c\rho$ ,

где  $\rho$  — расстояние по нормали от точки  $P$  до каустики. Следовательно, выражение (5.4.9) можно переписать в виде

$$I_x(\rho) \sim (2\pi k)^{1/2} AR^{1/2} \left(\frac{2}{k\rho_c}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{i\pi}{4} - ikh_a\right) \text{Ai}\left[-2\left(\frac{k}{2\rho_c^2}\right)^{2/3} \rho_c \rho\right]. \quad (5.4.12)$$

В этом выражении  $\rho$  можно считать положительной или отрицательной величиной в зависимости от того, в тени или в светлой области лежит точка  $P$ . На рис. 5.10, в приведено распределение поля вдоль нормали к каустике.

### 5.5. ПОЛЕ ВБЛИЗИ ДВУМЕРНОГО ОСТРИЯ КАУСТИКИ; МОДЕЛЬ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОГО ОТКЛИКА ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФОКУСИРОВКИ И АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В предыдущем разделе мы показали, что структура поля вблизи простой каустики, создаваемая распространяющейся цилиндрической волной, имеющей сферические аберрации, зависит от кривизны каустики. При этом изменение поля в перпендикулярном каустике направлении выражается через интеграл Эйри. Вблизи острия (точки возврата) каустики (см. рис. 2.15 и 2.16 в гл. 2) из-за интерференции трех или более лучей распределение поля становится значительно более сложным. Эту ситуацию можно описать, рассматривая дифракционный интеграл, у которого три стационарные точки функции  $h(s)$  близки друг к другу. В соответствии с этим мы можем изучить поле, анализируя сравнительный интеграл

$$I(k) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b \exp[-i(as + bs^2 + cs^4)] ds. \quad (5.5.1)$$

Заметим, что отсутствие в данном выражении члена  $s^3$  не ограничивает общности рассмотрения, поскольку этот член всегда может быть исключен простым сдвигом координаты  $s$ .

Для того чтобы найти физическую модель, приводящую к интегралу (5.5.1), рассмотрим щель шириной  $w = |b - a|$ , освещаемую однородным полем с фазой  $-kS(s) = ks^2/(2f) - (B/4)(s/w)^4$ , где  $f$  — расстояние от фокуса до апертуры, а  $B$  служит мерой сферических аберраций [см. разд. 2.15 и 4.13, а также выражение (4.13.34)]. При этом дифрагированное поле записывается в виде

$$I(k) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b \exp\left\{i\left[\frac{kx}{2z}s + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)s^2 + \frac{Bs^4}{4w^4}\right]\right\} ds. \quad (5.5.2)$$

Вблизи фокуса ( $x \approx 0, z \approx f$ ) три стационарные точки фазового множителя стремятся слиться в одну точку, а именно с самим фокусом. Это означает, что каустика поля имеет вершину в параксиальном фокусе. Однако мы можем сразу получить уравнение каустики в случае, когда совпадают две стационарные точки. А именно, проанализируем кубическое уравнение  $h'(s) = 0$ , которое при  $z \approx f$  имеет вид

$$s^3 + [(\bar{u}w^2s)/B] + [(w^3v)/(2B)] = 0, \quad (5.5.3)$$

где  $v = k\text{ЧА } x$  и  $\bar{u} = k(\text{ЧА})^2(z - f)$  — оптические координаты точки, в которой определяется поле. Отсюда мы видим, что два корня совпадают при условии, когда

$$\bar{u}^3 = -(27/16)Bv^2. \quad (5.5.4)$$

Если пренебречь вкладом граничных точек, то выражение (5.5.2) можно переписать в виде [19]

$$I(k) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(Vt + Ut^2 + t^4)] dt \equiv I(V, U), \quad (5.5.5)$$

где  $U$  и  $V$  — безразмерные координаты, связанные с  $\bar{u}$  и  $v$  соотношением

$$U = \bar{u}/B^{1/2}, \quad V = v/(2^{1/2}B^{1/4}). \quad (5.5.6)$$

Несобственный интеграл  $I(V, U)$  был вычислен Перси, и на рис. 5.11 представлены построенные им линии уровня модуля величины  $I$ . Заметим, что главный фокус образуется на оси  $U$  при  $U \cong -1,8$ . Слева от острия каустики имеется система трех лучей, лежащих между двумя ветвями каустики. Интерференция этих лучей приводит к образованию сложной системы максимумов и минимумов, хорошо видных на рис. 5.11. В то же время справа существует лишь одно семейство лучей, так что  $I$  убывает монотонно.

Вдоль оси  $U$  функцию  $I(U, 0)$  можно выразить через функцию параболического цилиндра  $D_{-1/2}$  (см. справочник Абрамовица и Стегана [4], указанный в литературе к гл. 2 настоящей книги):

$$I(U, 0) = 2 \int_0^{\infty} \exp[-i(Ut^2 + t^4)] dt \propto D_{-1/2}(\exp(i\pi/4)2^{-1/2}U). \quad (5.5.7)$$

Вспоминая, что  $D_{-1/2}(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(d^2/dx^2)D_{-1/2}(x) - \frac{1}{4}x^2D_{-1/2}(x) = 0, \quad (5.5.8)$$

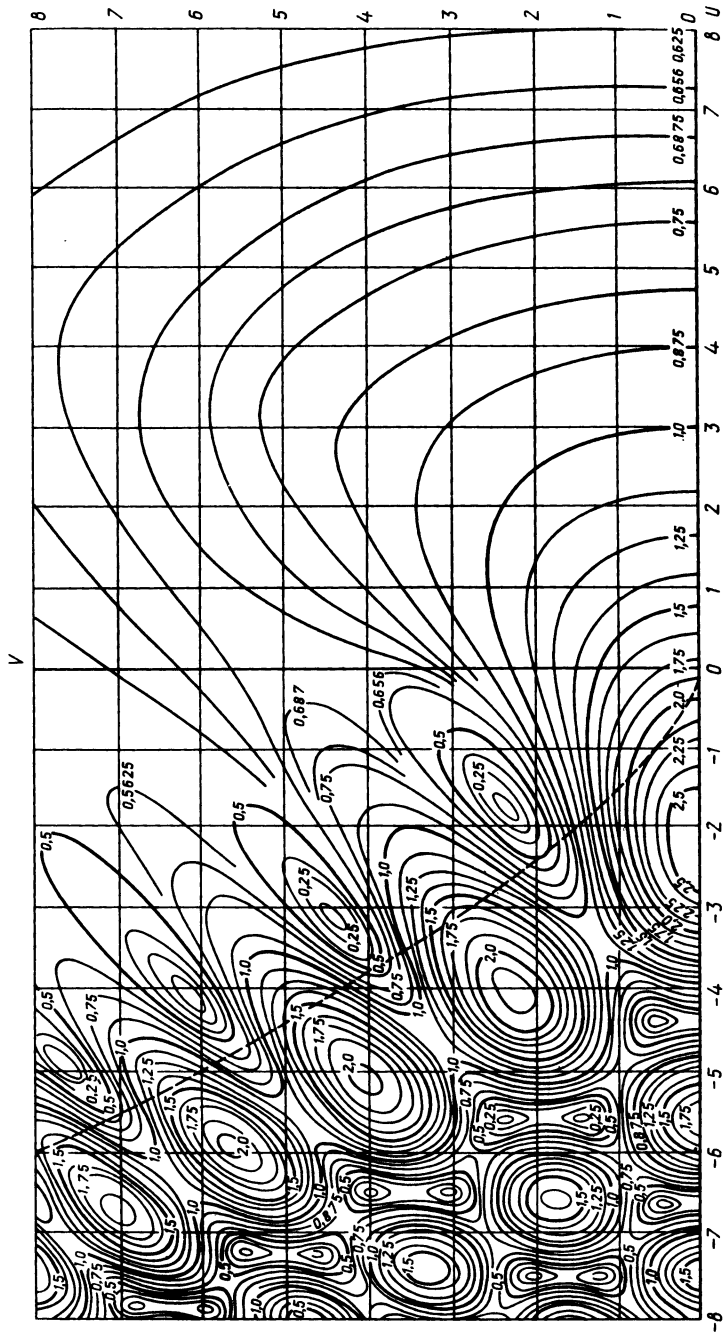


Рис. 5.11. Линии уровня функции  $I(V, U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(Vt + Ut^2 + t^4)] dt$ , вычисленные Перси. (Из работы [19].)

можно сразу показать, что

$$(d^2/du^2)I(U, 0) + \frac{1}{16}U^2 I(U, 0) = 0. \quad (5.5.9)$$

Это уравнение можно сравнить с уравнением Эйри (3.3.2); оба имеют точку поворота в начале координат, но разного порядка. В то время как функция Эйри  $A_i$  убывает экспоненциально при  $x \rightarrow \infty$ , в нашем случае при  $U \gg 1$  мы имеем

$$I(0, U) \sim (A_{\pm}/|U|^{1/2}) \sin(U^2/8 + \phi). \quad (5.5.10)$$

## 5.6. МЕТОД НАИБЫСТРЕЙШЕГО СПУСКА

В некоторых случаях из-за медленной сходимости асимптотического ряда, представляющего дифракционный интеграл, метод стационарной фазы применять нельзя. Это особенно явно проявляется в одном важном частном случае, когда распределение поля на опорной плоскости является гауссовым. Рассмотрим следующий дифракционный интеграл:

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikas^2 - bs^2 - ics) ds = \\ &= \frac{\exp\{-k^2 c^2/[4(b + ika)]\}}{(2a - 2ib/k)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

где  $a$  и  $b$  — вещественные числа. Если положить  $g(s) = \exp(-bs^2)$  и  $h(s) = as^2 + cs$ , то используя выражение (5.2.32), получаем

$$I(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp[(c^2/4)(ik/a - b/a^2)]. \quad (5.6.2)$$

Это выражение отличается от точного результата (5.6.1), особенно в тех случаях, когда  $c^2 k^2$  и  $b$  сравнимы с  $ka$ . С физической точки зрения  $I(k)$  представляет собой поле с гауссовым распределением  $u(x, 0) \propto \exp(-bx^2)$  в направлении  $\theta = \arcsin c$  на расстоянии  $z = 1/(2a)$ . В дальней зоне при  $a \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow \infty$ ), точное выражение (5.6.1) имеет асимптотику  $\exp(-k^2 \theta^2/4b)$ , в то время как разложение (5.6.2) приводит к  $\exp(-bx^2)$ . Отсюда следует, что метод стационарной фазы не может правильно описать расходимость пучка при его распространении.

Улучшить метод стационарной фазы можно за счет введения комплексной функции  $h(s) = as^2 + cs - ibs^2/k$ . Обобщение фазовой функции на комплексные значения аргумента приводит к некоторым

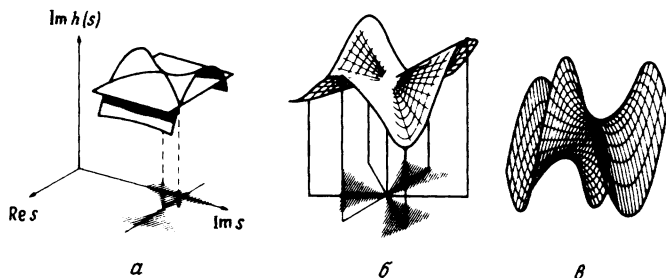


Рис. 5.12. Примеры поверхностей вблизи простой седловой точки (а), седловой точки второго порядка (называемой также «обезьяньим седлом») (б) и двух седловых точек (в). Заштрихованные области представляют проекции соответствующих долин на плоскость  $xу$ .

проблемам, связанным с решением уравнения  $h'(s) = 0$ , которое в общем случае будет иметь комплексные корни. Если эти корни не являются вещественными, то не будет и точек на вещественной оси, где вещественная и мнимая части величины  $h'$  одновременно обращаются в нуль. Эту трудность можно преодолеть, изменяя контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил через комплексные корни  $s_j$  уравнения  $h' = 0$ . Вследствие того, что функция  $h(s)$  предполагается

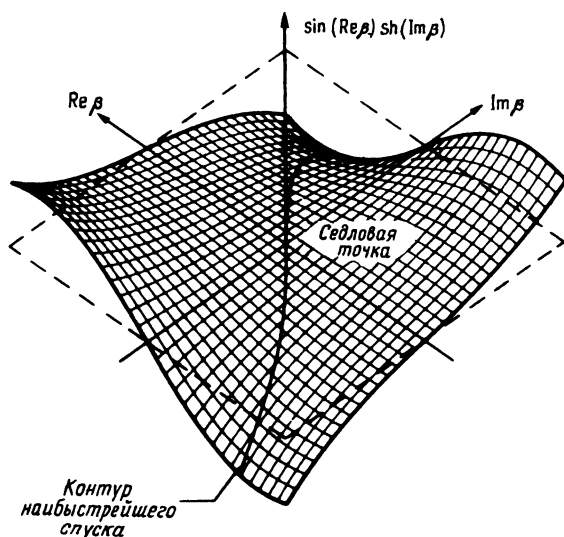


Рис. 5.13. Трехмерный график функции  $\sin(\operatorname{Re} \beta) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \beta) = \operatorname{Im} \sin(\beta)$  (с любезного разрешения П. Лучини).

аналитической, вблизи точки  $s_s$  функции  $\operatorname{Re} h(s)$  и  $\operatorname{Im} h(s)$  описывают квадратичные поверхности с седловой точкой в  $s_s$ . В соответствии с этим стационарные точки функции  $h(s)$  называются *седловыми точками* [14] (рис. 5.12 и 5.13).

Если  $h(s)$  — аналитическая функция, то она удовлетворяет *дифференциальным уравнениям Коши — Римана*

$$\partial \operatorname{Im} h / \partial s'' = \partial \operatorname{Re} h / \partial s', \quad \partial \operatorname{Im} h / \partial s' = -\partial \operatorname{Re} h / \partial s'', \quad (5.6.3)$$

где  $s = s' + is''$ . С геометрической точки зрения эти уравнения означают, что семейства кривых  $\operatorname{Im} h(s) = \text{const}$  и  $\operatorname{Re} h(s) = \text{const}$  взаимно ортогональны. Следовательно, кривая  $\operatorname{Re} h = \text{const}$  всюду касательна градиенту  $\operatorname{Im} h$ . Кривая  $\operatorname{Re} h = \text{const}$  представляет собой путь, вдоль которого  $\operatorname{Im} h$  изменяется наиболее быстро (рис. 5.14 и 5.15). Вследствие этого кривую  $\operatorname{Re} h = \text{const}$  называют *контуром наибыстрейшего спуска* (или *подъема*). В дальнейшем мы будем использовать сокращенное название КНС, подразумевая при этом *проходящий через седловую точку контур наибыстрейшего спуска для функции  $\operatorname{Im} h$* .

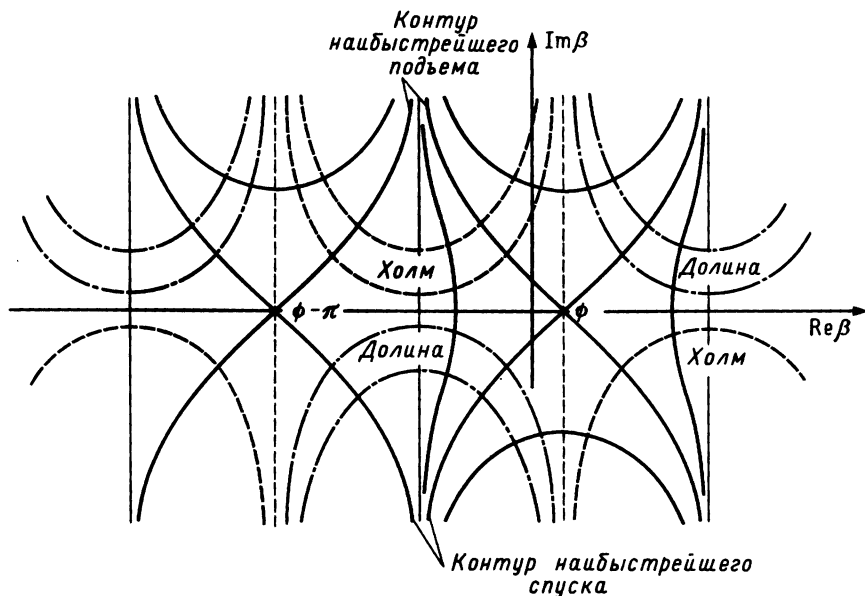


Рис. 5.14. Долина и холмы функции  $\operatorname{Im} \cos(\beta - \phi)$ . Непрерывные кривые —  $\operatorname{Re} \cos(\beta - \phi) = \text{const}$ ; штриховые кривые —  $\operatorname{Im} \cos(\beta - \phi) = \text{const} > 0$ ; штрихпунктирные кривые —  $\operatorname{Im} \cos(\beta - \phi) = \text{const} < 0$ .

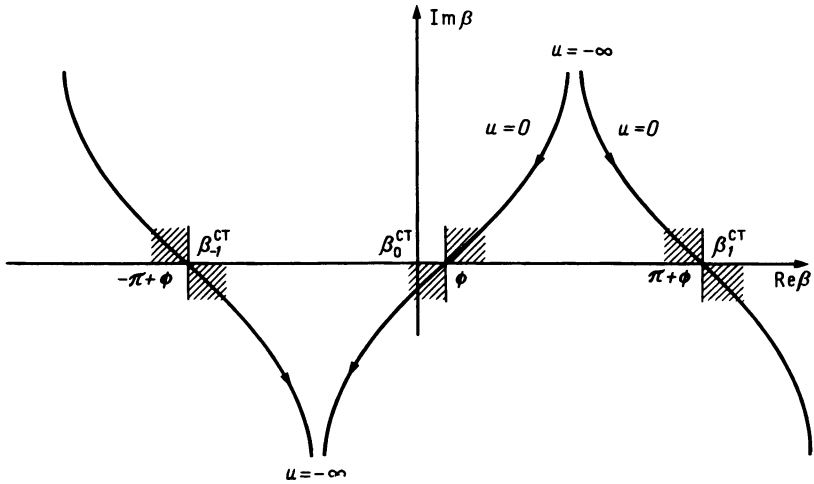


Рис. 5.15. Контуры наивысшего спуска функции  $\cos(\beta - \phi)$ .

Предположим на время, что седловая точка единственная и  $\text{Im } h(s_s) > \text{Im } h(s)$ . Тогда сделанные нами предварительные замечания свидетельствуют о необходимости изменить путь интегрирования, проходящий вдоль вещественной оси, на КНС. Таким образом, можно написать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I(k) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\lambda^{1/2}} \left[ \left( \int_{\text{КНС}} + \int_{\Gamma_B} \right) g e^{-ikh(s)} ds + \sum_q r_q e^{-ikh(s_q)} \right] \equiv \\
 &\equiv I_{\text{КНС}} + I_{\Gamma_B} + \frac{e^{i\pi/4}}{\lambda^{1/2}} \sum_q r_q e^{-ikh(s_q)}, \quad (5.6.4)
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma_B$  — набор контуров, окружающих разрезы функции  $g(s)$ , если таковые есть, а  $r_q$  —  $q$ -й вычет в полюсе функции  $g$ , лежащем между первоначальным контуром и КНС +  $\Gamma_B$ . Преимущество разделения интеграла на две части, одна из которых вычисляется вдоль КНС, связано с тем, что вдоль КНС функцию  $h(s)$  можно записать в виде  $h(s) = \text{Re } h(s_s) + i \text{Im } h(s)$ . Следовательно, замечая, что вдоль КНС функция  $\text{Im } h$  имеет единственный максимум в точке  $s_s$  и при отходе от него монотонно уменьшается, можно выполнить следующее преобразование:

$$s \rightarrow u = \pm \sqrt{\text{Im } h(s_s) - \text{Im } h(s)}, \quad (5.6.5)$$



где  $s \in \text{КНС}$ . Следовательно, в выражении (5.6.4) интеграл, вычисляемый вдоль КНС, можно преобразовать к виду

$$I_{\text{КНС}} = e^{-ikh(s_*)} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} g[s(u)] e^{-ku^2} \frac{ds}{du} du. \quad (5.6.6)$$

При  $k \rightarrow \infty$  множитель  $e^{-ku^2}$  быстро убывает при удалении от точки  $u = 0$  и главный вклад в интеграл дают значения  $g$  вблизи седловой точки. Таким образом,

$$I_{\text{КНС}} = e^{-ikh(s_*)} g(s_*) / [h''(s_*)]^{1/2}. \quad (5.6.7)$$

В частности, интеграл углового спектра в выражении (4.9.12) запишется в виде

$$I_{\text{КНС}} = \int_{\text{КНС}} S(\beta) e^{-ik\rho \cos(\beta - \phi)} d\beta = S(\phi) \left( \frac{2\pi}{k\rho} \right)^{1/2} e^{i\pi/4 - ik\rho}. \quad (5.6.8)$$

Последнее выражение подтверждает, что интеграл углового спектра при вычислении его по КНС можно рассматривать как цилиндрическую волну с угловым распределением  $S(\phi)$  (ср. с разд. 4.9.2).

### 5.6.1. Полюс вблизи седловой точки

В некоторых случаях седловая точка лежит вблизи полюса подынтегрального выражения. Это особенно часто имеет место, когда поле рассматривается в представлении углового спектра. В этих случаях можно записать интеграл в следующем конкретном виде:

$$I(k) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s - s_p} e^{-ks^2} ds, \quad (5.6.9)$$

где  $s_p$  — полюс вблизи седловой точки  $s_s = 0$ . Если  $s_p \approx 0$ , а  $f(s)$  является практически постоянной в интервале  $|s| < k^{-1/2}$ , то интеграл в (5.6.9) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} f(0) \int_0^{\infty} e^{-ks^2} \left( \frac{1}{s - s_p} - \frac{1}{s + s_p} \right) ds = \\ &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} f(0) s_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ks^2)}{s^2 - s_p^2} ds = \\ &= -i(2\pi k)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4} - ks_p^2\right) f(0) G \left[ \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) k^{1/2} s_p \right], \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

где  $G(x)$  определяется выражением (5.3.11). В частности, интеграл

$$I(k) = \int_{\text{КНС}} \frac{f(\beta)}{\beta - \beta_p} \exp[-ik\rho \cos(\beta - \phi)] d\beta, \quad (5.6.11)$$

вычисляемый вдоль контура наибоыстрейшего спуска, проходящего через  $\beta = \phi$ , можно привести к виду (5.6.9), если использовать подстановку  $i\rho \cos(\beta - \phi) = s^2 + i\rho$  и учесть тот факт, что для  $\beta \approx \phi$  имеем  $\beta - \phi \approx e^{i\pi/4} s (2/\rho)^{1/2}$ . Поступая таким образом [см. выражение (E.2) в приложении E], имеем

$$\begin{aligned} I(k) &\approx \exp(-ik\rho) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f[\beta(s)] \exp(-ks^2)}{s - (\beta_p - \phi)(1 - i)\sqrt{\rho/2}} ds = \\ &\approx -2\pi i \exp[-ik\rho \cos(\beta_p - \phi)] G\left[(\beta_p - \phi) \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/2}\right] f(\phi). \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

### 5.6.2. Точка ветвления вблизи седловой точки

Рассмотрим интеграл

$$I(k) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iks}}{\sqrt{a^2 + s^2}} ds = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{a}} e^{-ka}. \quad (5.6.13)$$

Для него все члены асимптотического разложения по степеням  $1/k$  тождественно равны нулю, так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^n I(k) = 0$  при всех положительных целых  $n$ . Преодолеть эту трудность можно, опираясь на то, что в знаменателе стоит величина  $\sqrt{a^2 + s^2}$ , имеющая две точки ветвления при  $s_b = \pm ia$ . Если в предыдущем разделе мы рассматривали полюсные сингулярности подынтегрального выражения, то теперь необходимо сделать следующий шаг, а именно учесть близкое расположение к контуру интегрирования точек ветвления.

Задача, к которой мы здесь обращаемся, связана с получением точного представления следующего класса интегралов [см. выражения (E3) и (E4) в приложении E]

$$I_{\pm}(k) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \int_{\Gamma} (s - s_b)^{\pm 1/2} g(s) e^{-ikh(s)} ds, \quad (5.6.14)$$

где  $\Gamma$  — произвольный контур в комплексной  $s$ -плоскости (рис. 5.16). Квадратный корень в подынтегральном выражении предполагается однозначно определенным, по крайней мере при движении  $s$  вдоль  $\Gamma$ .

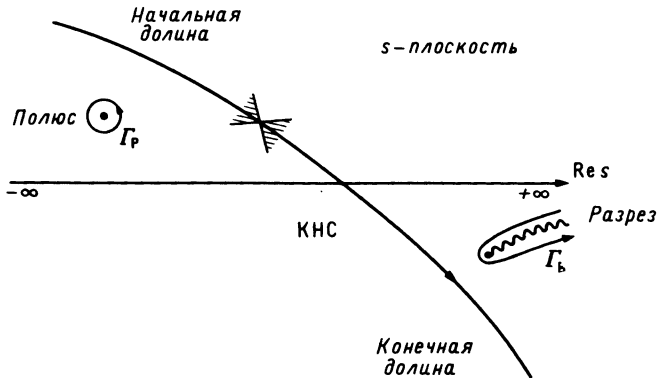


Рис. 5.16. Контур наибоыстрейшего спуска, проходящий вблизи полюса и разреза.

Это означает, что разрез в плоскости  $s$  сделан в точке  $s_b$  и идет параллельно вещественной оси в направлении к  $s = -\infty$ .

Если преобразовать контур интегрирования к суммарному контуру, включающему в себя контур  $\Gamma_b$ , окружающий точку ветвления и соответствующий разрез, то можно рассмотреть отдельно вклад в  $I(k)$  одного лишь интеграла по  $\Gamma_b$ . При этом заметим, что для  $\Gamma_b$ , близкого к полупрямой  $s = s_b - x$ ,  $x > 0$ , можно использовать следующее приближение:

$$(s - s_b)^{1/2} = iw, \quad (5.6.15)$$

где  $w > 0$  для  $s$  на верхнем берегу контура  $\Gamma_b$  и  $w < 0$  на нижнем. В соответствии с этим при  $w$ , изменяющемся от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $s$  будет описывать обход по контуру  $\Gamma_b$ . Таким образом, если мы заменим переменную интегрирования  $s$  на  $w$ , то контур  $\Gamma_b$  преобразуется в прямую  $(-\infty, +\infty)$ . В частности, для  $I_-(k)$  [см. (5.6.14)] имеем

$$I_-(k) = 2i \frac{\exp(i\pi/4)}{\lambda^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} g[s(w)] \exp\{-ikh[s(w)]\} dw. \quad (5.6.16)$$

Функция  $h[s(w)]$  имеет седловую точку при  $w = 0$ , которая дает вклад в  $I_-(k)$ , а именно

$$I_{-s_b}(k) \sim -2 \frac{\exp[-ikh(s_b)]}{[2h'(s_b)]^{1/2}} \left[ g(s_b) + \frac{1}{ik} \frac{1}{8h'} \left( 3 \frac{h''}{h'} g - 2g'' \right) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \quad (5.6.17)$$

здесь функции с необозначенным аргументом вычисляются при  $s = s_b$ . Поступая аналогичным образом, получаем следующее выражение

для  $I_+(k)$ :

$$I_+(k) = -2i \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 g[s(w)] \exp\{-ikh[s(w)]\} dw \sim$$

$$\sim -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\exp[-ikh(s_b)] g(s_b)}{[h'(s_b)]^{3/2} ik}. \quad (5.6.18)$$

Здесь в отличие от выражения (5.6.17) главный член содержит множитель  $k^{-1}$ , так что вклад от точки ветвления стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Следует заметить, что каждый из этих двух асимптотических вкладов стремится к бесконечности при приближении точки ветвления к стационарной точке, так как в знаменателях выражений (5.6.17) и (5.6.18) содержится  $h'$ .

Возвращаясь к тому интегралу, с которого начинался этот раздел, заметим, что его можно переписать в виде

$$I = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \int_{\Gamma_a} \frac{1}{\sqrt{s+ia}} g(s) \exp[-ikh(s)] ds, \quad (5.6.19)$$

где  $g(s) = (s - ia)^{-1/2}$  и  $h(s) = s$ . Таким образом, используя выражение (5.6.17), получаем непосредственно правую часть выражения (5.6.13).

## 5.7. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В разд. 4.9 мы показали, что поле отраженной от плоскости раздела двух диэлектриков цилиндрической ТЕ-волны представляется интегралом Зоммерфельда [см. выражение (4.9.25)], подынтегральное выражение которого имеет точки ветвления. Следовательно, используя угловой спектр, этот интеграл можно записать в виде (см. задачу 13)

$$u_r(\rho, \phi) = \frac{i}{4\pi} \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{\cos 2\beta + 2(n^2 - \cos^2 \beta)^{1/2} \sin \beta - n^2}{1 - n^2} \times$$

$$\times \exp\{-ik_1[-x_s \cos \beta + z_s \sin \beta +$$

$$+ \rho \cos(\beta - \phi)]\} d\beta \equiv I_{\text{КНС}} + I_{\Gamma_b}, \quad (5.7.1)$$

где  $k_1$  относится к среде 1, содержащей источник, и  $n_2$  — показатель преломления среды 2,  $n = n_2/n_1$ . Слагаемое  $I_{\text{КНС}}$  представляет собой вклад седловой точки, а  $I_{\Gamma_b}$  — вклад контура  $\Gamma_b$ , окружающего часть

разреза, возникновение которого связано с функцией  $(n^2 - \cos^2\beta)^{1/2}$ , причем  $\Gamma_b$  расположен между точкой ветвления

$$\beta_b = q\pi - \arccos n$$

и точкой пересечения с КНС (см. рис. 4.12,  $\sigma$ ). Координаты  $x_s$  и  $z_s$  — это координаты источника, а  $x = \rho \cos\phi$  и  $z = \rho \sin\phi$  — координаты точки наблюдения (рис. 4.11).

Для вычисления  $I_{\text{КНС}}$  заметим прежде всего, что седловая точка  $\beta_s$  является корнем уравнения

$$\operatorname{tg} \beta_s = (z + z_s)/(x - x_s), \quad (5.7.2)$$

что позволяет дать геометрическую интерпретацию точки  $\beta_s$ . А именно,  $\beta_s$  представляет собой угол, образованный осью  $x$  и вектором, связывающим зеркальное изображение источника, расположенного в точке  $x_s, -z_s$ , с точкой наблюдения.

Используя затем выражение (5.6.8) (см. задачу 14), нетрудно получить

$$I_{\text{КНС}} \sim -[\exp(-i\pi/4 - ik_1\bar{\rho})/(8\pi k_1\bar{\rho})^{1/2}]r_s(\beta_s); \quad (5.7.3)$$

здесь  $\bar{\rho} = [(x - x_s)^2 + (z + z_s)^2]^{1/2}$  — расстояние между изображением источника и точкой, где определяется поле, а  $r_s$  — коэффициент отражения Френеля. Таким образом,  $I_{\text{КНС}}$  представляет конгруэнцию лучей, выходящих из источника, достигающих поверхности раздела и отраженных по законам Снеллиуса и Френеля.

### 5.7.1. Боковые волны

В случае когда среда, содержащая источник и точку наблюдения, является оптически более плотной по сравнению с граничащей с ней средой, мы имеем  $n < 1$ . Следовательно, в этом случае точки ветвления вещественны и контур наибоыстрейшего спуска пересекает разрез только тогда, когда  $\beta_s > \pi - \arccos n$  или  $\arccos n > \beta_s$ . Предположим, что выполнено первое неравенство. При этом мы имеем

$$I_{\Gamma_b} = \frac{\exp(i\pi/4)}{\lambda_1^{1/2}} \int_{\Gamma_b} (\cos\beta - n)^{1/2} g(\cos\beta) \exp[-ik_1 h(\cos\beta)] d(\cos\beta); \quad (5.7.4)$$

здесь

$$\begin{aligned} h(\cos\beta) &= -x_s \cos\beta + z_s \sin\beta + \rho \cos(\beta - \phi), \\ g(\cos\beta) &= -[\lambda_1^{1/2}/(2\pi)] \exp(i\pi/4)(n + \cos\beta)^{1/2}/(1 - n^2). \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Используя затем результат интегрирования (5.6.8), где  $\xi_b = n$ , получаем

$$I_{\Gamma_b} \sim \frac{\exp(i\pi/4)}{(2\pi)^{1/2}} n^{1/2} (1-n^2)^{-1/4} \times \\ \times \frac{\exp\{-ik_1[(x-x_s)n + (z+z_s)(1-n^2)^{1/2}]\}}{\{k_1[-(z+z_s)n + (x-x_s)(1-n^2)^{1/2}]\}^{3/2}}. \quad (5.7.6)$$

Если переписать теперь выражение для фазы в виде

$$nk_1[(x-x_s) - (z+z_s)n(1-n^2)^{-1/2}] + k_1(z_s+z)(1-n^2)^{-1/2},$$

то можно считать, что эта фаза связана с лучом, который распространяется от источника до границы раздела под критическим углом  $\theta_c = \arcsin n$ , затем после преломления во второй среде распространяется параллельно границе и, наконец, покидает ее, преломляясь под углом  $\theta_c$  и попадая в точку наблюдения (рис. 5.17). Если обозначить через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  расстояния, пройденные по этим трем отрезкам, то выражение (5.7.6) можно переписать следующим образом:

$$I_{\Gamma_b} \sim \frac{\exp(i\pi/4)}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n^{1/2}}{(1-n^2)} \frac{\exp[-ik_1(L_1 + nL_2 + L_3)]}{(k_1L_2)^{3/2}}. \quad (5.7.7)$$

Из-за приграничного характера распространения этой волны ее и назвали *боковой волной*. Ее амплитуда убывает пропорционально расстоянию, пройденному вдоль границы раздела, в степени  $3/2$ . То что эта волна затухает более сильно, чем цилиндрическая волна (т. е.  $-L^{-1/2}$ ), обусловлено утечкой энергии при распространении вдоль бокового пути (см. книгу Бреховских [7], указанную в литературе к гл. 3 настоящей книги).

Проведенное выше рассмотрение основывалось на предположении

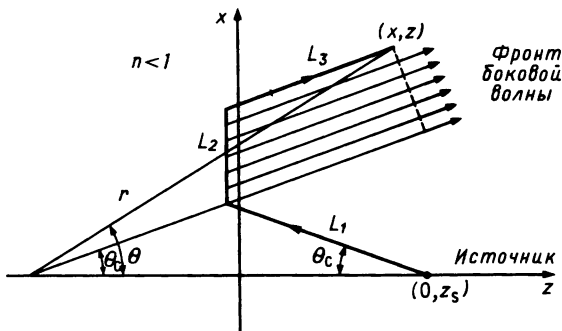


Рис. 5.17. Геометрическое рассмотрение задачи о возбуждении боковой волны.

о том, что в обеих средах волна распространяется без потерь. Легко доказать, что с небольшими изменениями выражение (5.7.6) остается справедливым и для сред при наличии потерь. В частности, если потери есть только в среде, содержащей источник, то при смещении точки наблюдения параллельно границе раздела величина  $I_{\Gamma_b}$  с расстоянием  $x$  убывает в соответствии со степенным законом, в то время как величина  $I_{\text{КНС}}$  убывает по экспоненциальному закону. Это приводит к тому, что вклад от боковых волн становится преобладающим по сравнению с вкладом, определяемым в приближении геометрической оптики. Качественно можно представить себе, что в этих случаях лучи стремятся распространяться вдоль поверхности, чтобы избежать потерь в объеме среды, однако эти волны не следует путать с поверхностными волнами, рассматриваемыми в разд. 3.21 и 3.22 (см. гл. 3 настоящей книги). Действительно, в то время как амплитуда поверхностной волны убывает экспоненциально в перпендикулярном направлении, боковые волны сравнительно глубоко проникают в обе среды.

Боковые волны существуют также и при освещении границы раздела точечными источниками. При этом основные свойства этих волн сохраняются без изменения, единственное отличие связано с возникновением в выражении (5.7.6) дополнительного множителя  $\rho^{-1/2} = [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2]^{-1/4}$  (см. [книгу 3, с. 514], указанную в литературе к гл. 2). Таким образом, в случае когда граница раздела освещается волной, излучаемой точечным источником, мы имеем

$$I_{\Gamma_b} \propto \exp[-i(k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_1 L_3)] / [\rho^{1/2} (k_1 L_2)^{3/2}]. \quad (5.7.8)$$

Возникновение этого дополнительного множителя можно объяснить эвристически, считая, что полная мощность, переносимая боковой волной, сохраняется постоянной.

Наконец, следует заметить, что записанные выше асимптотические выражения применимы лишь в том случае, когда седловая точка не очень близка к точке ветвления. Нетрудно показать, что при  $\beta_s \rightarrow \beta_c$  имеем  $L_2 \rightarrow 0$  и выражение (5.7.7) становится сингулярным. В этом случае более точно интеграл можно вычислить с помощью найденной Фоком переходной функции, связанной с функцией параболического цилиндра порядка  $1/3$  (см. книгу Бреховских [7], указанную в литературе к гл. 3 настоящей книги).

## 5.7.2. Эффект Гуса — Хенхена

Рассмотренные выше интегралы  $I_{\text{КНС}}$  и  $I_{\Gamma_b}$  являются аналитическими функциями координат источника  $x_s$  и  $z_s$ . Поэтому выражения (5.7.3) и (5.7.6) можно использовать и в том случае, когда  $x_s$  и  $z_s$  — комплексные величины:

$$x_s = \text{Re } x_s - ib \sin \psi, \quad (5.7.9a)$$

$$z_s = \text{Re } z_s + ib \cos \psi; \quad (5.7.9b)$$

здесь  $b$  и  $\psi$  — произвольные вещественные величины. Если ввести новую систему декартовых координат  $\xi$ ,  $\zeta$  (рис. 5.18) с центром в точке  $\text{Re } x_s$ ,  $-\text{Re } z_s$ , повернутую на угол  $\psi$  относительно системы координат  $x$ ,  $z$ , то легко показать, что  $\xi_s = 0$  и  $\zeta_s = -ib$ . Следовательно, расстояние  $\bar{\rho}$  от точки наблюдения до изображения источника можно записать в виде

$$\bar{\rho} = [\xi^2 + (\zeta + ib)^2]^{1/2} \cong \zeta + ib + \frac{1}{2}\xi^2/(\zeta + ib), \quad (5.7.10)$$

справедливом для точек, близких к оси  $\zeta$ . Подставляя это выражение для  $\bar{\rho}$  в выражение (5.7.3), получаем поле с комплексным эйконаллом (см. разд. 2.7):

$$I_{\text{КНС}} \sim -\frac{\exp(-i\pi/4)\lambda_1^{1/2}}{4\pi} \frac{1}{(\zeta + ib)^{1/2}} \times \\ \times \exp\left[-ik_1\left(\zeta + ib + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\zeta^2 + b^2}\zeta\right) - \frac{1}{2}\frac{k_1 b}{\zeta^2 + b^2}\xi^2\right] r_s(\beta_s). \quad (5.7.11)$$

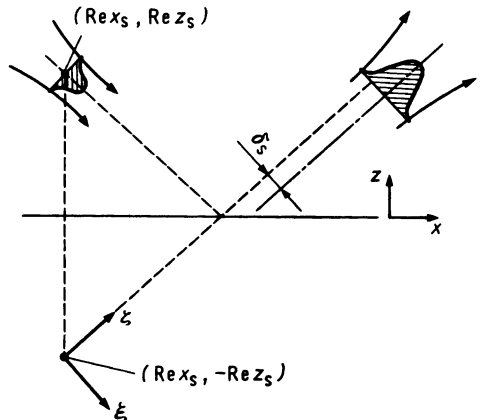


Рис. 5.18. Отражение гауссова пучка. Показано, что при учете эффекта Гуса — Хенхена отраженный пучок испытывает смещение на расстояние  $\delta_s$ .



Таким образом, вдоль направления  $\xi$  (см. разд. 2.7.1) поле имеет гауссово распределение с шириной  $w^2 = 2(\xi^2 + b^2)/(k_1, b)$ . Однако нельзя пренебрегать и множителем  $r_s(\beta_s)$ , который в общем случае является функцией точки наблюдения [см. выражение (5.7.2)].

Рассмотрим важный частный случай, когда гауссов пучок претерпевает полное отражение. При этом модуль коэффициента отражения равен единице, а его фаза  $2\phi_s$  определяется выражением (3.20.6). Если точка наблюдения находится от оси  $\zeta$  на небольшом расстоянии (что имеет место для достаточно узкого) гауссова пучка, то можно записать следующее выражение:

$$r(\beta_s) = \exp[2i\phi_s(\beta_s)] = \exp[2i\phi_s(\bar{\beta}_s) + 2i(d\phi_s/d\beta_s)d\beta_s], \quad (5.7.12)$$

где величина  $d\beta_s$  связана со смещением виртуального источника отраженного пучка соотношением (5.7.2), которое можно переписать в виде

$$\bar{\beta}_s + d\beta_s = \frac{1}{2}\pi + \psi + \operatorname{arctg}[\xi/(\zeta + ib)] \cong \frac{1}{2}\pi + \psi + \xi/(\zeta + ib), \quad (5.7.13)$$

где  $\psi$  — угол между аксиальным направлением гауссова пучка (ось  $\zeta$ ) и осью  $z$ . Однако из выражения (3.20.6) (см. гл. 3 настоящей книги) после подстановки  $\theta = \bar{\beta}_s - \frac{1}{2}\pi = \psi$  получаем

$$\frac{d\phi_s}{d\beta_s} = -\frac{\cos \bar{\beta}_s}{(\cos^2 \beta_s - n^2)^{1/2}} = \frac{\sin \psi}{(\sin^2 \psi - \sin^2 \theta_c)^{1/2}} \equiv \phi'_s, \quad (5.7.14)$$

где  $\theta_c = \arcsin(n)$  — критический угол для поверхности раздела.

Подставляя выражения (5.7.13) и (5.7.14) в (5.7.12), выражение (5.7.11) можно переписать в виде

$$I_{\text{КНС}} \sim -\frac{\exp(-i\pi/4)\lambda_1^{1/2}}{4\pi} \frac{1}{(\zeta + ib)^{1/2}} \exp\left\{-ik_1\left[\zeta + ib + \frac{1}{2}\frac{(\xi - \delta_s)^2}{\zeta + ib} - \frac{1}{2}\frac{\delta_s^2}{\zeta + ib} - 2\frac{\phi_s(\psi)}{k_1}\right]\right\}, \quad (5.7.15)$$

где  $\delta_s = 2\phi'_s/k_1$ . Отсюда следует, что при полном отражении дисперсия фазы коэффициента отражения Френеля приводит к смещению пучка в направлении, перпендикулярном его оси. В частности, для  $s$ -волны (см. задачу 19) это смещение запишется в виде

$$\delta_s = (2/k_1)[\sin \psi/(\sin^2 \psi - \sin^2 \theta_c)^{1/2}]. \quad (5.7.16)$$

В выражение (5.7.15) входит лишь главный член асимптотического разложения интеграла. Можно показать, что при  $\psi \rightarrow \pi/2$  следующий член разложения становится сравнимым с первым. В частности, при

падении пучка под углом скольжения выражение (5.7.16) дает конечное смещение, которое не имеет физического смысла. В действительности  $\delta_s \rightarrow 0$  при  $\psi \rightarrow \pi/2$  (см. книгу Бреховских [7], указанную в литературе к гл. 3 настоящей книги).

Из-за малости множителя  $k_1^{-1}$  смещение  $\delta_s$  можно достоверно оценить только в том случае, когда угол падения близок к критическому. Однако для  $\psi$ , близких к  $\theta_c$ , седловая точка  $\beta_s$  приближается к точке ветвления настолько, что асимптотические вклады величин  $I_{\text{КНС}}$  и  $I_{\Gamma_b}$  уже нельзя разделить. В этом случае необходимо использовать соответствующую переходную функцию.

Боковое смещение оптического пучка наблюдали Гус и Хенхен в 1947 г. [20], подтвердив таким образом то, что электромагнитные волны [21] испытывают такие же смещения, какие ранее наблюдались у ультразвуковых волн. Совсем недавно [22] наблюдались смещения на нескольких длинах волн пучка, падающего на плоскую четырехслойную структуру. Большое смещение происходит вследствие зависимости коэффициента отражения от угла падения. Действительно, как мы уже отмечали в разд. 3.18, функция  $r(k_x)$  имеет, вообще говоря, несколько полюсов в комплексной  $k_x$ -плоскости. Отраженное поле можно представить в виде, аналогичном (5.7.1), в котором подынтегральное выражение заменяется на

$$u_r(\rho, \phi) \propto \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{f(\beta)}{(\cos \beta - \cos \beta_1)} \times \\ \times \exp\{-ik_1[-x_s \cos \beta + z_s \sin \beta + \cos(\beta - \phi)]\} d\beta, \quad (5.7.17)$$

где  $f(\beta) = r(\beta)(\cos \beta - \cos \beta_1)$ , а  $\beta_1$  — ближайший к КНС полюс коэффициента отражения. Асимптотическое вычисление этого интеграла показывает, что отраженный пучок смещается относительно зеркальной траектории в том случае, когда комплексный полюс  $\beta_1$  близок к КНС. Так как  $\beta_1$  связан с модой утечки многослойной структуры (см. разд. 3.18), большое боковое смещение можно объяснить тем [23], что падающий луч возбуждает волну утечки, которая распространяется на некоторое расстояние параллельно плоским границам раздела мультислой, а затем переизлучается в полупространство, содержащее источник. Тщательный выбор параметров многослойной структуры позволяет получить очень большое смещение. Этот эффект можно использовать для создания устройств связи в системах интегральной оптики.

## 5.8. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Займемся теперь вычислением интеграла  $I(k)$ , возникающего в связи с использованием цилиндрических координат. Обычно такой интеграл записывается в следующем виде:

$$I(k) = \frac{k}{L} \int_0^a f(s) J_m \left( ks \frac{\rho}{L} \right) \exp \left[ -ik \frac{s^2 + \rho^2}{2L} - ikT(s) \right] s ds \quad (5.8.1)$$

[см., например, выражение (4.11.4)], где  $f(s)$  и  $T(s)$  зависят от величины на опорной плоскости  $z = z'$ . В частности, для опорного поля с вращательной симметрией, обращающегося в нуль вне границ круглой апертуры радиусом  $a$ ,  $f(s)$  и  $T(s)$  равны соответственно произведению амплитуды  $A(s)$  на фазовый множитель  $-i \exp(-ikL)$  и эйконалу  $S(s)$ . Действительно, в этом случае правые части выражений (5.8.1) и (4.11.19) совпадают, если  $J_m = J_0$  и  $|z - z'| = L$ .

Если записать  $J_m$  следующим образом (см. справочник Абрамовица и Стегана [4, с. 364], указанный в литературе к гл. 2 настоящей книги):

$$J_m(\zeta) = [2/(\pi\zeta)]^{1/2} \frac{1}{2} [P(m, \zeta) + iQ(m, \zeta)] \exp\{i[\zeta - (m/2 + 1/4)\pi]\} + \\ + [2/(\pi\zeta)]^{1/2} \frac{1}{2} [P(m, \zeta) - iQ(m, \zeta)] \exp\{-i[\zeta - (m/2 + 1/4)\pi]\}, \quad (5.8.2)$$

где  $P$  и  $Q$  — медленноменяющиеся функции переменной  $\zeta$ , которые при больших  $\zeta$  равны соответственно единице и нулю, то  $I(k)$  можно переписать в виде [см. статью Саусуэлла (1978) в библиографии]:

$$I(k) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\lambda^{1/2}} \int_0^a g_1(s) \exp[-ikh_1(s)] ds + \\ + \frac{\exp(i\pi/4)}{\lambda^{1/2}} \int_0^a g_2(s) \exp[-ikh_2(s)] ds, \quad (5.8.3)$$

причем для вращательно-симметричных полей мы имеем

$$g_1(s) = [-i/(L\rho)^{1/2}] e^{-ikL} A(s) s^{1/2} [P(0, ksp/L) + iQ(0, ksp/L)], \quad (5.8.4a)$$

$$h_1(s) = (s - \rho)^2 / (2L) + S(s), \quad (5.8.4б)$$

$$g_2(s) = -e^{-2ikL} g_1^*(s), \quad (5.8.4в)$$

$$h_2(s) = (s + \rho)^2 / (2L) + S(s). \quad (5.8.4г)$$

Главные члены разложения интегралов можно вычислить с помощью выражений (5.2.32) и (5.2.36), и при использовании соотношения  $s^{1/2}(P + iQ) - s^{1/2}$  (при  $k \rightarrow \infty$ ) получаем

$$\begin{aligned}
 I(k) \exp(ikL + i\pi/2) \sim & \sum_p A(s_p) \left[ \frac{s_p}{\rho(1 + LS''(s_p))} \right]^{1/2} \exp[-ikh_1(s_p)] + \\
 & + \sum_q A(s_q) \left[ \frac{s_q}{\rho(1 + LS''(s_q))} \right]^{1/2} \exp[-ikh_2(s_q)] - \\
 & - \frac{L^{1/2} \exp(-i\pi/4)}{(2\pi k \rho)^{1/2}} A(a) \left\{ \left[ \frac{a}{a - \rho + LS'(a)} \right]^{1/2} \times \right. \\
 & \times \exp[-ikh_1(a)] + \left[ \frac{a}{a + \rho + LS'(a)} \right]^{1/2} \times \\
 & \left. \times \exp[-ikh_2(a)] \right\}, \tag{5.8.5}
 \end{aligned}$$

где  $s_p$  и  $s_q$  — точки стационарной фазы функций соответственно  $h_1$  и  $h_2$ , а третий член представляет собой вклад от граничной точки  $s = a$ . Другая граница ( $s = 0$ ) не дает вклада в  $I(k)$ , поскольку  $s^{1/2}(P + iQ) = 0$  при  $s = 0$ . Записанные выше выражения будут использованы в разд. 7.18 при вычислении поля в неустойчивых резонаторах.

Как видно из выражения (5.8.5), уменьшение амплитуды поля с расстоянием  $L$  до апертуры определяется по существу множителем

$$\left\{ \frac{s_p}{\rho[1 + LS''(s_p)]} \right\}^{1/2}, \tag{5.8.6}$$

который отличается от аналогичной величины [см. выражение (5.2.43)], полученной для цилиндрических полей, дополнительным множителем  $(s_p/\rho^{1/2})$ . Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае волновые фронты в отличие от цилиндрических волновых фронтов имеют два различных конечных радиуса кривизны.

Если точка наблюдения лежит на оптической оси ( $\rho = 0$ ), то удобнее обратиться непосредственно к интегралу (5.8.1), который принимает вид

$$I(k) = -i \exp(-ikL) \left( \frac{k}{L} \right) \int_0^a A(s) \exp \left\{ -ik \left[ \frac{s^2}{2L} + S(s) \right] \right\} s ds, \tag{5.8.7}$$

где волна предполагается вращательно-симметричной. Если  $A(s) = 1$  и  $S(s) = -s^2/(2f) + Bs^4/(4w^4k)$  (см. разд. 5.5), причем  $w = 2a$ , то выражение (5.8.7) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I(k) &= -i \exp(-ikL) \frac{k}{2L} \int_0^{a^2} \exp \left\{ -ik \left[ \left( \frac{1}{2L} - \frac{1}{2f} \right) x + \frac{Bx^2}{4w^4k} \right] \right\} dx = \\
 &= -i \exp(-ikL) \frac{k}{2L} \exp \left[ ik^2 \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right) \frac{4a^4}{B} \right] \times \\
 &\quad \times \int_0^{a^2} \exp \left[ -i \frac{B}{4w^4} \left[ x + \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right) \frac{4w^4k}{B} \right]^2 \right] dx = \\
 &= -8\pi N \left( \frac{\pi}{B} \right)^{1/2} \exp \left[ i \frac{\pi}{4} - ikL + ik^2 \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right) \frac{4a^4}{B} \right] \times \\
 &\quad \times \left\{ F \left[ \frac{8a^2k}{B^{1/2}} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right) \right] - F \left[ \frac{B^{1/2}}{8} + \frac{8a^2k}{B^{1/2}} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{f} \right) \right] \right\}. \quad (5.8.8)
 \end{aligned}$$

Здесь  $N = a^2/(L\lambda)$  — число Френеля апертуры, а  $F(\zeta)$  — комплексный интеграл Френеля [выражение (5.3.5)], причем для простоты мы предположили, что  $B > 0$ .

Этот результат позволяет сделать некоторые важные заключения о свойствах поля. Если расстояние от точки наблюдения до фокуса таково, что

$$|1/L - 1/f| 8a^2k > 10B^{1/2}, \quad (5.8.9)$$

то интеграл Френеля можно аппроксимировать его асимптотическим значением [выражение (5.3.15)] и таким образом получить выражение, совпадающее с полем, вычисленным в приближении геометрической оптики. И наоборот, отрезок оптической оси, на котором нарушается приближение геометрической оптики, имеет длину  $|L - f|$ , определяемую выражением

$$|L - f| \cong (B^{1/2}/1,6\pi NA^2)\lambda. \quad (5.8.10)$$

При  $B = 0$ , используя первый интеграл в (5.8.8), нетрудно вычислить поле, амплитуда которого дается выражением

$$|u(\rho = 0, L)| = \left| \frac{\sin[k(1/(4L) - 1/(4f))a^2]}{L[1/(2L) - 1/(2f)]} \right|. \quad (5.8.11)$$

В частности, если отверстие освещается плоской волной ( $1/f = 0$ ), выражение (5.8.11) принимает вид

$$|u(\rho = 0, L)| = 2|\sin[ka^2/(4L)]|. \quad (5.8.12)$$

Это означает, что интенсивность поля осциллирует, уменьшаясь до нуля при  $L_q = a^2/(2q\lambda)$ , а при больших расстояниях ( $L \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю как  $1/L^2$ . Отсюда следует, что дифрагированное на отверстии поле ведет себя практически как сферическая волна, только если расстояние  $L$  до точки наблюдения много больше, чем  $a^2/\lambda$ . Таким образом, если  $N$  — число Френеля отверстия относительно точки наблюдения, то поле на оси равно нулю при  $N(L) = 2q$  и описывается сферической волной лишь при  $N \ll 1$ .

Можно рассмотреть также и комплексные  $f$ :

$$1/f = (1/f_r) + i/(kw^2). \quad (5.8.13)$$

Этот случай соответствует освещению апертуры гауссовым полем при наличии сферических aberrаций. При этом поле на оси не является более осциллирующей функцией расстояния  $L$  и может быть вычислено непосредственной подстановкой комплексного аргумента в интегралы Френеля.

Аналогичные осцилляции можно наблюдать вдоль оптической оси, когда волна, возмущенная сферическими aberrациями третьего и пятого порядка, подходит к фокусу линзы Тессара, как показано на рис. 5.19 (заимствованном из работы Фоке [24]).

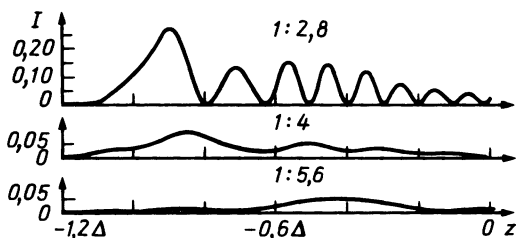


Рис. 5.19. Интенсивность поля на оптической оси вблизи фокуса линзы Тессара, вычисленная Фоке [24а] для трех апертур (1:2,8; 1:4; 1:5,6). Безразмерный параметр  $\Delta$  соответствует определенной в (4.13.21) оптической координате  $\bar{u}$ , относящейся к расстоянию между фокусом бокового луча и параксиальным фокусом:  $\Delta = (1/2)k_0 \text{ЧА}^2 z_{\text{сф}}$ , где  $z_{\text{сф}}$  — продольная сферическая aberrация бокового луча с отклонением от оси на высоту  $\rho_0$ . Распределение поля вычислялось с учетом первичных и вторичных сферических aberrаций в предположении, что  $z_{\text{сф}}$  зависит от  $\rho_0$  в виде  $z_{\text{сф}} = -(1/2)f^2(I\rho_0^2 + I^*\rho_0^4)$ . Остальные параметры:  $f = 52,5$  мм,  $\rho_0 = 9,15$  мм,  $z_{\text{сф}} = 0,42$  мм и  $\Delta = -75$  при  $\lambda = 546$  нм.

## 5.9 ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ ИЗ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ; МЕТОД ЧЕСТЕРА — ФРИДМАНА — УРСЕЛЛА (ЧФУ)

В разд. 5.4 мы получили главные члены асимптотического ряда, к которому можно прийти с помощью метода, предложенного в 1956 г. Честером и др. [25]. Он основан на замене переменной  $s \rightarrow u$ , определяемой неявным соотношением

$$-ih(s) = \frac{1}{3}u^3 - \zeta u - ih[s(0)], \quad (5.9.1)$$

где  $\zeta$  — параметр, учитывающий взаимное положение двух седловых точек функции  $h$ . Можно показать, что это преобразование однородно регулярно вблизи  $s = 0$ . Если разложить теперь  $g ds/du$  в степенной ряд

$$g(s) \frac{ds}{du} = \sum_m p_m (u^2 - \zeta)^m + \sum_m q_m u (u^2 - \zeta)^m \quad (5.9.2)$$

и подставить этот ряд в дифракционный интеграл (5.2.24), то получим

$$I_\alpha(k) \sim \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \sum_m p_m \int_{-i\infty}^{i\infty} (u^2 - \zeta)^m \exp \left[ k \left( \frac{u^3}{3} - \zeta u \right) \right] du + \right. \\ \left. + \sum_m q_m \int_{-i\infty}^{i\infty} u (u^2 - \zeta)^m \exp \left[ k \left( \frac{u^3}{3} - \zeta u \right) \right] du \right\} e^{-ikh_\alpha}. \quad (5.9.3)$$

Введем теперь следующие функции:

$$F_m(\zeta, k) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (u^2 - \zeta)^m \exp \left[ k \left( \frac{u^3}{3} - \zeta u \right) \right] du, \quad (5.9.4a)$$

$$G_m(\zeta, k) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} u (u^2 - \zeta)^m \exp \left[ k \left( \frac{u^3}{3} - \zeta u \right) \right] du, \quad (5.9.4b)$$

которые связаны между собой рекуррентными соотношениями

$$F_m = -(2/k)(m-1)G_{m-2}, \quad (5.9.5a)$$

$$G_m = -(1/k)(2m-1)F_{m-1} - (2/k)(m-1)\zeta F_{m-2}. \quad (5.9.5b)$$

Эти соотношения легко получить, проводя в (5.9.4) интегрирование по частям. В частности,

$$F_0 = k^{-1/3} \text{Ai}(\zeta k^{2/3}), \quad G_0 = -k^{-2/3} \text{Ai}'(\zeta k^{2/3}). \quad (5.9.6)$$

Если эти функции подставить в ряд (5.9.3), то получим

$$I_\alpha(k) \sim 2\pi i \frac{\exp(i\pi/4 - ikh_\alpha)}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{g_0(\zeta)}{k^{1/3}} \text{Ai}(\zeta k^{2/3}) + i \frac{g_1(\zeta)}{k^{2/3}} \text{Ai}'(\zeta k^{2/3}) \right]; \quad (5.9.7)$$

здесь

$$g_0(\zeta) = p_0 - \frac{q_1 + 2\zeta q_2}{k} + 4\frac{p_3}{k^2} + \dots, \quad (5.9.8a)$$

$$g_1(\zeta) = -q_0 + 2\frac{p_2}{k} + \dots. \quad (5.9.8b)$$

## 5.10. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯ, ДИФРАГИРОВАННОГО НА ОТВЕРСТИИ

В разд. 4.14 мы показали, что возбуждение в точке  $P$ , производимое сферической волной от источника  $S$ , дифрагированной на отверстии  $A$ , можно представить в виде суммы лучевого поля  $u_g$  и поля  $u_b$ , возникающего на границе отверстия [граничной дифрагированной волны (ГВД)].

С математической точки зрения введение граничной дифрагированной волны позволяет свести двумерный дифракционный интеграл к интегралу по контуру. Это преобразование облегчает асимптотическое вычисление поля. Действительно, мы уже научились получать асимптотические ряды для одномерных определенных интегралов, имеющих разрывы в подынтегральных выражениях. Теперь осталось применить полученные формулы к интегралу вида [см. (4.14.19)]

$$u_b = -\frac{1}{(4\pi)^2 R_s} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta') e^{-ik(r'+s')} d\phi = u_{b,I} + u_{b,II}, \quad (5.10.1)$$

где  $u_{b,I}$  включает в себя все вклады от точек стационарной фазы [т. е.  $\partial(r'+s')/\partial\phi = 0$ ], а  $u_{b,II}$  связано с точками разрыва производных  $\theta'(\phi)$  и  $r'(\phi) + s'(\phi)$ . Последние локализованы в вершинах границы отверстия.

Что касается точек стационарной фазы, то они имеют очень простую геометрическую интерпретацию. Действительно, если обозначить через  $s$  криволинейную координату границы отверстия, а через  $\hat{e}$  — единичный вектор, касательный к границе, то (см. рис. 5.20)

$$(\partial/\partial\phi)(r'+s') = 0 \rightarrow (\partial/\partial s)(r'+s') = \hat{e} \cdot \nabla(r'+s') = \hat{e} \cdot (\hat{r}' + \hat{s}') = 0. \quad (5.10.2)$$

Как следствие, в стационарной точке падающий луч образует с тангенциальным вектором  $\hat{e}$  угол  $\beta$ , равный углу между вектором  $\hat{e}$  и лучом, дифрагированным вдоль  $\hat{r}'$ . Это свойство позволяет сделать вывод о том, что все лучи, дифрагированные в точке границы  $Q_e$ , образуют полуконус, ось которого параллельна касательному к границе вектору, а угол  $\beta$  равен углу между падающим лучом и границей.



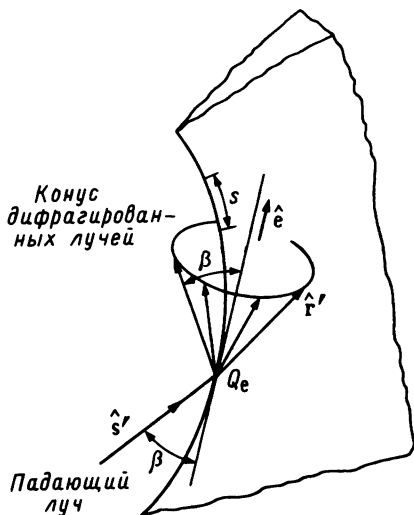


Рис. 5.20. Конус лучей, дифрагированных в точке  $Q_e$  на границе отверстия.

Благодаря этому геометрическому представлению дифракцию на ребре отверстия можно рассматривать как локальное образование конической конгруэнции лучей. Таким образом, дифракция сферической волны на отверстии есть образование конических конгруэнций вдоль границы отверстия. При этом граничная дифрагированная волна в точке  $P$  будет определяться вкладом дифрагированных лучей, выходящих из различных точек границы отверстия и проходящих через  $P$  (рис. 5.21). Такая картина более или менее эквивалентна объяснению Т. Юнга, согласно которому падающий луч претерпевает отражение

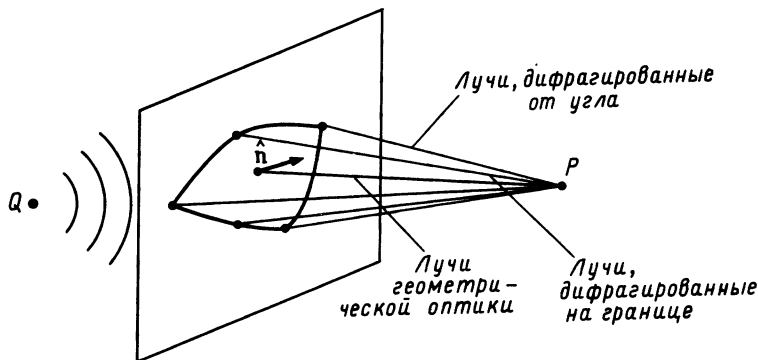


Рис. 5.21. Схематическое представления поля в точке  $P$ , создаваемого за счет суммирования лучей геометрической оптики и лучей, дифрагированных на границе и в углах отверстия.

на границе, в результате чего возникают распределенные по конусу отраженные лучи.

### 5.10.1. Каустика дифрагированных лучей

Конгруэнция лучей, дифрагированных на границе отверстия, полностью аналогична конгруэнциям, рассмотренным в гл. 2. Заметим прежде всего, что граница сама по себе является каустикой дифрагированных лучей. Действительно, по определению каустикой называют геометрическое место точек, где сечение элементарной лучевой трубки стягивается в отрезок. Именно это имеет место на кромке отверстия. Следовательно, отличительной особенностью таких конгруэнций является, то что одна из поверхностей каустики сводится к криволинейному контуру. Форма и положение второй поверхности каустики определяется конкретной геометрией задачи дифракции (рис. 5.22) [26].

Рассмотрим для примера прямолинейную кромку, освещаемую из точечного источника  $S$ . Построив дифрагированные лучи, нетрудно убедиться в том, что второй каустикой (рис. 5.23) является окружность, проходящая через  $S$ . Эта окружность лежит в плоскости, перпендикулярной кромке, а ее центр — на самой кромке. Следовательно, на каждом дифрагированном луче будет два фокуса. Один из них ( $F_1$ ) совпадает с точкой пересечения с кромкой, а другой ( $F_2$ ) лежит на том же расстоянии от  $F_1$ , что и  $F_1$  от источника. С геометрической

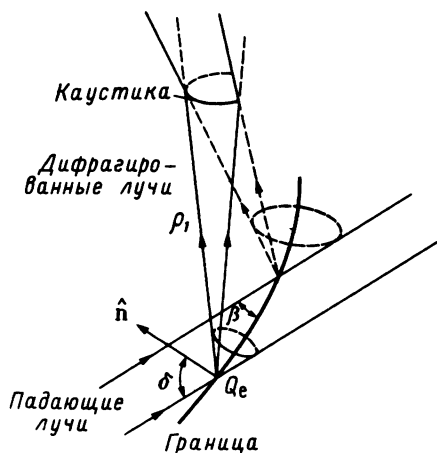


Рис. 5.22. Геометрия в задаче о дифракции пучка лучей на краю отверстия. (Из работы [1]).

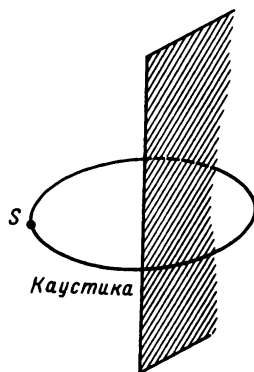


Рис. 5.23. Круговая каустика лучей, дифрагированных на прямолинейном крае, освещаемом точечным источником.

точки зрения присутствие кромки эквивалентно преобразованию начальной конгурэнции, имеющей центр в точке  $S$ , в конгруэнцию, каустики которой представляют собой прямую линию и окружность.

Для криволинейной границы вторая каустика определяется огибающей конгруэнции дифрагированных лучей, которая задается параметрически выражением (см. приложение I в статье Келлера [26])

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(s)] \cdot \hat{\mathbf{e}}(s) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(s)| \cos \beta(s); \quad (5.10.3)$$

здесь  $s$  — длина дуги границы,  $\hat{\mathbf{e}}$  — единичный вектор, касательный к границе в точке  $s$ , а  $\mathbf{r}_c$  — координата точки  $Q_c$  на границе. Дифференцируя это уравнение по  $s$ , получаем второе уравнение, которое вместе с (5.10.3) определяет векторы  $\dot{\mathbf{r}}_c$  каустики, т. е.

$$(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e) \cdot \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\rho} - 1 + \beta |\dot{\mathbf{r}}_c - \dot{\mathbf{r}}_e| \sin \beta + \frac{(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{e}} \cos \beta}{|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e|} = 0; \quad (5.10.4)$$

здесь точка сверху буквы означает производную по  $s$ ,  $\rho$  — радиус кривизны границы, а  $\hat{\mathbf{n}}$  — главная нормаль границы (см. разд. 2.4.2), направленная от центра кривизны. Теперь, используя (5.10.3), можно заменить  $(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{e}}$  на  $|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e| \cos \beta$ , так что уравнение (5.10.4) приобретает вид

$$|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e| (\cos \delta + \rho \dot{\beta} \sin \beta) = \rho \sin^2 \beta, \quad (5.10.5)$$

где  $\cos \delta = (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{n}} / |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e|$ . Таким образом, расстояние (с учетом знака)  $\rho_1 = -|\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_e|$  от границы до каустики запишется в виде

$$\rho_1 = -\rho \sin^2 \beta / (\rho \dot{\beta} \sin \beta + \cos \delta). \quad (5.10.6)$$

Следуя нашему первоначальному определению, величина  $\rho_1$  должна быть отрицательной. Однако в последнем выражении  $\rho_1$  может быть как отрицательной, так и положительной. Неравенство  $\rho_1 > 0$  означает, что каустика является *виртуальной* и лежит на противоположной стороне от дифрагированного луча. Следовательно, вычисление необходимо начинать с выражения для дифрагированных лучей, аналогично (5.10.3), с той лишь разницей, что знак минус перед величиной  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|$  нужно заменить на плюс.

Для прямой кромки имеем

$$\rho_1 = -\sin \beta / \dot{\beta} \quad (> 0). \quad (5.10.7)$$

В этом случае величина  $\rho_1$  одна и та же для всех лучей, выходящих из одной и той же точки  $Q_c$ . Нетрудно проверить, что для точечного источника  $S$  величина  $\rho_1$  совпадает с расстоянием от  $Q_c$  до  $S$ , так что каустикой является окружность, проходящая через  $S$  и лежащая в плоскости, перпендикулярной кромке, причем центр этой окружности располагается на кромке (рис. 5.23).

В случае когда  $\beta' = 0$ , имеем

$$\rho_1 = -\rho \sin^2 \beta / \cos \delta, \quad (5.10.8)$$

так что величина  $\rho_1$  положительна при  $\cos \delta < 0$ ; иными словами,  $\rho_1$  положительна, когда проекция дифрагированных лучей на  $\hat{n}$  является отрицательной. В частности, для плоского отверстия, освещаемого в перпендикулярном к нему направлении, мы имеем  $\beta = \pi/2$ , так что  $\rho = -\rho_1 \cos \delta$ . Это означает, что перпендикулярная проекция каустики на плоскость апертуры совпадает с центром кривизны самой апертуры. Таким образом, *каустикой является цилиндр, перпендикулярный апертуре и в сечении совпадающий с эволютой границы отверстия* (рис. 5.24). Для круглого отверстия каустика стягивается в прямую линию, проходящую через центр круга. Цилиндр, продолженный за плоскость апертуры, представляет собой виртуальную каустику дифрагированных лучей, образующих угол больше чем  $\pi/2$  с нормалью  $\hat{n}$  к границе. В общем случае наличие вещественной каустики обусловлено сильным дифрагированным полем. В разд. 5.8 мы уже приводили пример, когда поле дифрагирует на круглом отверстии.

В случае когда апертура не состоит из прямолинейных отрезков, каустики существуют лишь в ограниченных областях. Таким образом, соответствующие усиления или ослабления поля можно заметить лишь для отверстий, границы которых криволинейны. В определен-

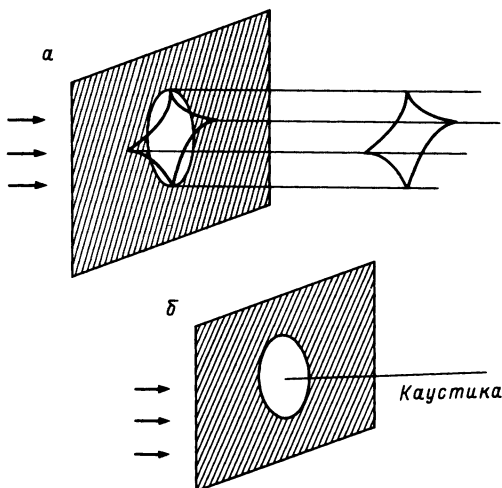


Рис. 5.24. Цилиндрические каустики, образуемые лучами, дифрагированными на отверстии в плоском экране, освещаемом плоской волной. Сечение цилиндра является эволютой границы отверстия. *a* — общий случай; *b* — круговое отверстие. Каустика сводится к нормали, проходящей через центр.

ном смысле можно сказать, что они оказывают фокусирующее влияние на дифрагированные лучи.

В заключение следует подчеркнуть, что проведенное нами рассмотрение каустик не зависит от способа возбуждения дифрагированных лучей. Если даже лучи, попадающие на границу, вышли не из одного источника, выводы данного раздела остаются справедливыми.

### 5.10.2. Дифракция на острие

Для того чтобы вычислить  $u_{b,1}$ , можно применить формулы разд. 5.2, положив  $h(s) = r'(s) + s'(s)$  и  $g(s) = \lambda^{1/2} \exp(-i\pi/4)(1 - \cos\theta') / [(4\pi)^2 R_s]$ . При этом получаем

$$u_{b,1} = \frac{\lambda^{1/2} \exp(-i\pi/4)}{(4\pi)^2 R_s} (1 - \cos\theta'_s) \exp[-ik(r'_s + s'_s)] \left| \frac{\partial^2(r' + s')}{\partial\phi^2} \right|^{-1/2}; \quad (5.10.9)$$

здесь  $\varepsilon = \text{sgn}[\partial^2(r' + s')/\partial\phi^2]$ , а  $r'_s, s'_s$  и  $\theta'_s$  — координаты стационарной точки. Производная  $\partial^2(r' + s')/\partial\phi^2$  вычисляется следующим образом. Во-первых, заметим, что

$$ds'/ds = \cos\beta, \quad (5.10.10)$$

и поэтому

$$d^2s'/ds^2 = -\dot{\beta} \sin\beta. \quad (5.10.11)$$

Кроме того, для вектора  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_e(s) - \mathbf{r}(P)$  имеем

$$\mathbf{r}'(s + ds) = \mathbf{r}'(s) + \hat{\mathbf{e}}(s) ds + \hat{\mathbf{n}}(s) ds^2 / [2\rho(s)], \quad (5.10.12)$$

где  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\rho$  — соответственно нормаль и радиус кривизны отверстия. Следовательно,

$$\begin{aligned} r'(s + ds) &= r'(s) + \hat{r}' \cdot \hat{e} ds + \frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}' \cdot \hat{n}}{\rho} + \frac{1 - (\hat{r}' \cdot \hat{e})^2}{r'} \right] ds^2 = \\ &= r'(s) - \sin(\beta) ds + \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos(\delta)}{\rho} + \frac{\sin^2(\beta)}{r'} \right] ds^2; \end{aligned} \quad (5.10.13)$$

здесь  $\cos\delta$  совпадает с величиной, введенной в (5.10.5). Окончательно уравнения (5.10.11) и (5.10.13) сводятся к виду

$$\frac{d^2}{ds^2}(r' + s') = -\dot{\beta} \sin\beta - \frac{\cos\delta}{\rho} + \frac{\sin^2\beta}{r'} = \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{\rho_1} \right) \sin^2\beta, \quad (5.10.14)$$

где мы заменили  $\cos\delta$  на  $-\rho\beta\sin\beta - \rho\sin^2\beta/\rho_1$  [см. выражение (5.10.6)]. Используя выражение (4.14.20), получаем

$$ds/d\phi = [(1 - \cos\theta')/R_s][r's'(1 + \cos\theta')]/[\hat{e} \cdot (\hat{r}' \times \hat{s}')]. \quad (5.10.15)$$

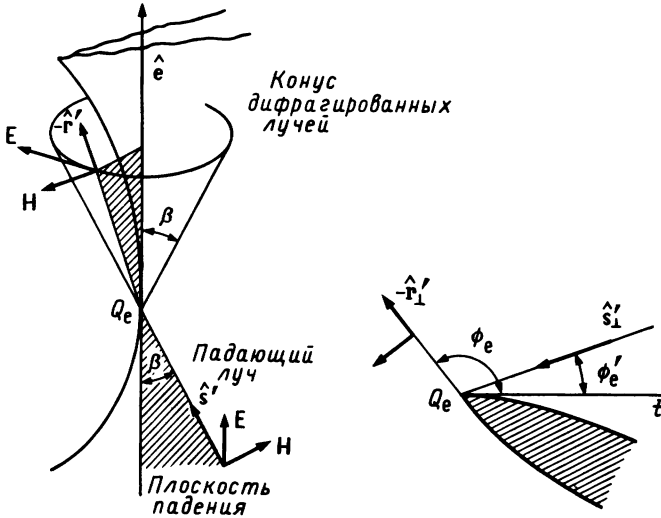


Рис. 5.25. Геометрия, используемая при вычислении поля, дифрагированного на острие.

Для того чтобы вычислить  $\cos \theta'$  и  $\hat{e} \cdot (\hat{r}' \times \hat{s}')$ , разложим векторы  $\hat{r}'$  и  $\hat{s}'$  на составляющие вдоль вектора  $\hat{e}$  и в плоскости, перпендикулярной  $\hat{e}$ . Если обозначить через  $\phi_e$  и  $\phi_e'$  углы, образованные проекциями векторов  $-\hat{r}'$  и  $\hat{s}'$  и касательными к поверхности экрана векторами  $\hat{t}$  (рис. 5.25), то можно показать, что

$$1 + \cos \theta' = 1 + \hat{r}' \cdot \hat{s}' = 1 - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos(\phi_e - \phi_e') =$$

$$= 2 \sin^2 \beta \cos^2 \left( \frac{\phi_e - \phi_e'}{2} \right), \quad (5.10.16)$$

$$\hat{e} \cdot (\hat{r}' \times \hat{s}') = -\sin^2 \beta \sin(\phi_e - \phi_e'), \quad (5.10.17)$$

так что

$$ds/d\phi = -[(1 - \cos \theta')/R_S] \operatorname{ctg} [(\phi_e - \phi_e')/2] r' s'. \quad (5.10.18)$$

Как следствие, объединяя уравнения (5.10.14) и (5.10.18), получаем

$$\frac{d^2}{d\phi^2} (r' + s') = \frac{ds}{d\phi} \frac{d(r' + s')}{ds} \frac{d}{ds} \frac{ds}{d\phi} + \left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 \frac{d^2(r' + s')}{ds^2} =$$

$$= \sin^2 \beta \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r'} \right) \left( \frac{1 - \cos \theta'}{R_S} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\phi_e - \phi_e'}{2} \right) r'^2 s'^2, \quad (5.10.19)$$

поскольку условие  $d(r' + s')/ds = 0$  соответствует стационарной точке.

Окончательно выражение (5.10.9) с учетом (5.10.19) запишется в виде

$$u_{b,I} = \lambda^{1/2} e^{-i\pi/4} \frac{e^{-ik(r'+s')}}{(4\pi)^2 s'} \operatorname{tg} \left( \frac{\phi_e - \phi'_e}{2} \right) \frac{1}{\sin \beta} \left[ \frac{\rho_1}{r'(r' + \rho_1)} \right]^{1/2} =$$

$$= D_K(\phi_e, \phi'_e; \beta) u_i(Q_e) e^{-ikr'} \left[ \frac{\rho_1}{r'(\rho_1 + r')} \right]^{1/2}, \quad (5.10.20)$$

где  $u_i(Q_e) = \exp(-iks')/(4\pi s')$  — амплитуда волны, падающей на граничную точку  $Q_e$ , а  $D_K$  — коэффициент дифракции, аналогичный величине  $D_1$ , введенной в разд. 5.2.6, и совпадающий с выражением (29) из работы Келлера и др. [27], причем

$$D_K(\phi_e, \phi'_e; \beta) = [e^{-i\pi/4}/(8\pi k)^{1/2}] (1/\sin \beta) \operatorname{tg} [(\phi_e - \phi'_e)/2]. \quad (5.10.21)$$

Миамото и Вольф (см. книгу Рабиновича [32], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги) показали, что при освещении апертуры произвольным лучевым полем дифрагированную волну в пределе малых длин волн можно представить с помощью ГДВ. Поэтому если проследить снова за всеми выполненными выше преобразованиями, то нетрудно прийти к заключению, что выражения (5.10.20) и (5.10.21) остаются справедливыми для любых падающих лучевых полей  $u_i$ . Келлер и др. [27] получили выражение (5.10.20), используя асимптотическое разложение дифракционного интеграла. При этом они нашли такое же выражение для коэффициента  $D_K$  (индекс К означает, что дифракционное поле вычислялось с использованием замкнутой интегральной формулы Гельмгольца — Кирхгофа). Заметим здесь, что  $D_K$  отличается от коэффициента  $D_1$  в выражении (5.2.48), за исключением случая, когда  $\phi_e - \phi'_e \cong \pi$ . В разд. 6.2 мы еще вернемся к обсуждению этого расхождения.

### 5.10.3. Дифракция от угла

На угловой части апертуры производная  $r'(\phi) + s'(\phi)$  терпит разрыв. Поэтому для вычисления вклада  $u_{b,II}$  дифракции от угла можно использовать формулу (5.2.38), которая дает

$$u_{b,II} = - \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{1/2} e^{-i\pi/2} \frac{1}{(2\pi k)^{1/2}} \frac{e^{-ik(r'+s')}}{(4\pi)^2 R} (1 - \cos \theta') \delta \frac{1}{d(r' + s')/d\phi}; \quad (5.10.22)$$

здесь  $\delta(\dots)$  указывает на наличие разрыва функции в правой части выражения.

Далее, используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}(r' + s') &= \frac{1 - \cos \theta'}{R} r' s' \frac{\cos[(\phi' - \phi)/2]}{\sin[(\phi' - \phi)/2]} (\hat{r}' + \hat{s}') \cdot \hat{e} = \\ &= \frac{1 - \cos \theta'}{R} r' s' \frac{1 + \cos \theta'}{(\hat{r}' \times \hat{s}') \cdot \hat{e}} (\hat{r}' + \hat{s}') \cdot \hat{e}, \end{aligned} \quad (5.10.23)$$

после простых алгебраических преобразований получаем

$$\begin{aligned} u_{b,II} &= -\frac{i}{k} u_i(Q_e) \frac{e^{-ikr'}}{4\pi r'} \delta \frac{(\hat{r}' \times \hat{s}') \cdot \hat{e}}{(\hat{r}' + \hat{s}') \cdot \hat{e}} = \\ &= -\frac{i}{k} u_i(Q_e) \frac{e^{-ikr'}}{4\pi r'} \frac{(\hat{s}' - \hat{r}') \cdot (\hat{e}_- \times \hat{e}_+)}{[(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_+][(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_-]} = \\ &= C_K u_i(Q_e) \frac{e^{-ikr'}}{r'}, \end{aligned} \quad (5.10.24)$$

здесь  $\hat{e}_+$  и  $\hat{e}_-$  — единичные векторы, касательные к границе на двух сторонах углового препятствия. Таким образом, угол апертуры приводит к образованию сферической волны, характеризуемой *коэффициентом угловой дифракции*

$$C_K = -\frac{i}{4\pi k} \frac{(\hat{s}' - \hat{r}') \cdot (\hat{e}_- \times \hat{e}_+)}{[(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_+][(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_-]}, \quad (5.10.25)$$

который можно выразить через углы, указанные на рис. 5.26.

В заключение заметим, что при преобразовании с помощью этой формулы Мэгги — Рабиновича интеграла Гельмгольца — Кирхгофа в контурный интеграл отверстие, освещаемое сферической волной, дает поле, которое представляет собой суперпозицию вкладов поля геометрической оптики ( $u_g$ ), стационарных граничных точек ( $u_{b,I}$ ) и углов (если таковые имеются) ( $u_{b,II}$ ):

$$\begin{aligned} u(P) = u_g + u_{b,I} + u_{b,II} &= C \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \sum' D_K u_i(Q_e) e^{-ikr'} \left[ \frac{\rho_1}{r'(\rho_1 + r')} \right]^{1/2} + \\ &+ \sum'' C_K u_i(Q_e) \frac{e^{-ikr'}}{r'}; \end{aligned} \quad (5.10.26)$$

здесь  $C = 1$  в геометрически освещенной области.

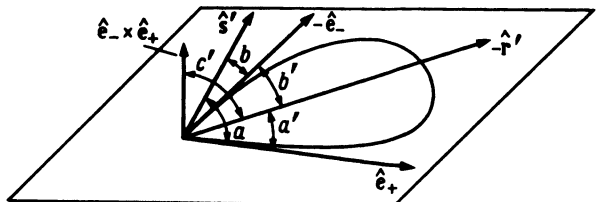


Рис. 5.26. Геометрия для вычисления коэффициента угловой дифракции.



Лучи, дающие вклад в  $u_{b,1}$ , образуют конус вокруг касательной к границе, причем угол раствора конуса равен углу  $\beta$ , образуемому падающим лучом и границей отверстия. Вершинная (угловая) точка действует как точечный источник с диаграммой направленности  $C_K$ , которая сингулярна на конусах  $(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_+ = 0$  и  $(\hat{s}' + \hat{r}') \cdot \hat{e}_- = 0$ , что аналогично появлению границы тени.

То, что мы показали на примере облучения препятствия сферической волной, остается справедливым и для более общих лучевых полей. Это легко доказать непосредственным вычислением интеграла Гельмгольца — Кирхгофа [27] с использованием хорошо известных формул [24, 28].

### 5.11. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЙ ПО ПЛОСКИМ ВОЛНАМ

В гл. 1 и 4 мы показали, что при весьма общих условиях гармонически зависящее от времени поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , распространяющееся в изотропной или анизотропной среде, можно представить в однородном полупространстве  $z > 0$  с помощью его разложения по плоским волнам.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \exp[-i\Phi(\mathbf{k}) - i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y, \quad (5.11.1)$$

где  $k_z = k_z(k_x, k_y)$  — функция величин  $k_x$  и  $k_y$ , определяемая из дисперсионного уравнения  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$  (см. гл. 1), а  $\mathbf{E}_0$  и  $\Phi$  — соответственно амплитуда и фаза нормальной волны, распространяющейся вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Если  $k_x$  и  $k_y$  лежат внутри некоторой области  $D_H$ , имеющей в общем случае форму эллипса, то  $k_z$  является вещественным и положительным, в то время как вне области  $D_H$  величина  $k_z = -i|k_z|$  является мнимой.

В большинстве случаев приведенный выше интеграл невозможно вычислить аналитически и приходится находить его асимптотическое выражение, отыскивая стационарные точки [24, 29—33]. В частности, если  $\mathbf{E}_0$  — достаточно гладкая функция величин  $k_x$  и  $k_y$ , то можно записать следующее приближенное выражение:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim 2\pi i \sum_n \varepsilon_n \frac{\exp(-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - i\Phi_n)}{|\Delta|^{1/2}} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}_n) + \mathbf{E}_{II}(\mathbf{r}), \quad (5.11.2)$$

где суммирование распространяется на стационарные векторы  $\mathbf{k}_n$ ,

$$x + (\partial k_z / \partial k_x) z + \partial \Phi / \partial k_x = 0, \quad (5.11.3a)$$

$$y + (\partial k_z / \partial k_y) z + \partial \Phi / \partial k_y = 0 \quad (5.11.36)$$

[здесь частные производные по  $k_x(k_y)$  вычисляются при фиксированных  $k_y(k_x)$ ], а  $\Delta$  дается выражением

$$\Delta = \left( z \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial k_x^2} \right) \left( z \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial k_y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x \partial k_y} z + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial k_x \partial k_y} \right)^2 \quad (5.11.4)$$

Кроме того,  $\Phi_n = \Phi(\mathbf{k}_n)$  и

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если } \Delta > 0 & \text{и } z \partial^2 k_z / \partial k_x^2 + \partial^2 \Phi / \partial k_x^2 > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta > 0 & \text{и } z \partial^2 k_z / \partial k_x^2 + \partial^2 \Phi / \partial k_x^2 < 0, \\ i, & \text{если } \Delta < 0. \end{cases} \quad (5.11.5)$$

Наконец, вектор  $\mathbf{E}_{11}(\mathbf{r})$  учитывает вклады сингулярных точек фазы  $\Phi(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ .

### 5.11.1. Анизотропная среда

Седловую точку  $\mathbf{k}_n$  можно определить, используя уравнение  $\Phi = \text{const}$  и для каждого направления  $\hat{\mathbf{k}}$  откладывая из начала прямоугольной системы координат два волновых числа ( $k_1$  и  $k_2$ ) распространяющихся в этом направлении волн. Таким образом, можно получить двулистную поверхность волновых векторов, один лист которой соответствует значениям  $\mathbf{k}_1$ , а другой —  $\mathbf{k}_2$  (см. задачу 14). При этом в соответствии с уравнениями (5.11.3) нормаль к поверхности в точке  $\mathbf{k}_n$  является параллельной вектору  $\mathbf{g}$ .

В кристаллооптике принято представлять зависимость фазовых скоростей  $v_1$  и  $v_2$  от направлений вектора  $\hat{\mathbf{k}}$  или вектора Пойнтинга, используя соответственно *нормальную* и *лучевую поверхности* (см. разд. 1.4.1). Расстояние от точки на этих поверхностях до центра пропорционально либо  $v_1$ , либо  $v_2$ . Эти два метода различаются тем, что на нормальной поверхности значения  $v_{1,2}$  откладывают вдоль направления  $\hat{\mathbf{k}}$ , в то время как на лучевой поверхности — вдоль вектора Пойнтинга, связанного с вектором  $\mathbf{k}$ . Можно показать, что нормальная и лучевая поверхности связаны между собой простым геометрическим соотношением (см. книгу Зоммерфельда [31], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги): *лучевая поверхность является огибающей плоскостей, проходящих через вершину вектора  $\hat{\mathbf{k}}v_{1,2}$  и перпендикулярных  $\hat{\mathbf{k}}$ .*

Когда среда изотропна и  $\Phi = 0$ , уравнение (5.11.4) принимает более простой вид:

$$\Delta = z^2 k^2 / k_z^4, \quad (5.11.6)$$

При этом вектор  $\mathbf{k}_n$  параллелен  $\mathbf{r}$ , так что представление (5.11.2) дает

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi i (k e^{-ikr}/r)(z/r) \mathbf{E}_0(k\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.11.7)$$

Выражение (5.11.7) можно использовать для асимптотического вычисления интеграла углового спектра, причем необходимо положить  $d\gamma d\beta = -dk_x dk_y / (k^2 \sin \beta)$ .

## 5.12. ФОРМУЛА УИЛЛИСА

Вычисление дифракционных интегралов может быть основано на разложении в ряд неосциллирующих частей подынтегрального выражения вблизи краевых точек интервала интегрирования. Следуя методу Уиллиса (рассмотренному Баракá [34]), запишем следующее разложение в ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x) G(k, x) e^{-ax} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \int_0^\infty G(k, x) x^n e^{-ax} dx \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g^{(n)}(0)}{n!} \Phi^{(n)}(\alpha), \end{aligned} \quad (5.12.1)$$

где мы предположили, что функцию  $g(x)$  можно разложить в ряд Тейлора вблизи точки  $z = 0$ . Полагая  $\alpha \rightarrow 0$ , получаем

$$\int_0^\infty g(x) G(k, x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g^{(n)}(0)}{n!} \Phi^{(n)}(0). \quad (5.12.2)$$

Например, полагая  $G(k, x) = \sin(kx)/x$ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{x} e^{-ax} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha^3}{3k^3} - \frac{\alpha^5}{5k^5} + \dots = \\ &= \Phi(0) + \Phi^{(1)}(0)\alpha + \frac{1}{2}\Phi^{(2)}(0)\alpha^2 + \dots, \end{aligned} \quad (5.12.3)$$

и поэтому

$$\int_0^\infty g(x) \frac{\sin(kx)}{x} dx \cong \left(\frac{\pi}{2}\right)g(0) + \frac{g^{(1)}(0)}{k} - \frac{g^{(3)}(0)}{3k^3} + \dots \quad (5.12.4)$$

Аналогичное выражение приведено в приложении E, формула (E5).

## ЗАДАЧИ

### Раздел 5.2.

1. Вычислите поле, дифрагированное на отверстии в плоском экране, освещаемом в перпендикулярном к нему направлении плоской волной. Представьте дифракционный интеграл в том же виде, что в задаче 3 из гл. 4 настоящей книги и сделайте замену переменных  $x = \rho^2$ . Покажите, что поле определяется только вкладом от граничных точек. Поскольку  $f(\rho)$  обращается в нуль при  $\rho = \rho_{\text{макс}}$ , можно использовать выражение

(5.2.37). Кроме того, рассмотрите случай, когда любая граничная точка соответствует углу апертуры. При этом учтите, что при использовании переменной  $x$  соответствующие индексы дифракционного интеграла равны:  $\rho = 1$  и  $\gamma = 1/2$ .

2. Используя следующее интегральное представление функции Бесселя для вещественных  $\nu$  и  $\beta \neq 0$ ,  $\pi$ :

$$J_\nu(\nu \sec \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \nu(\theta - \sec \beta \sin \theta) d\theta - \\ - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu(t + \sec \beta \operatorname{sh} t)} dt,$$

докажите формулу Дебая

$$J_\nu(\nu \sec \beta) = \left( \frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta} \right)^{1/2} \cos \left[ \nu(\beta - \operatorname{tg} \beta) + \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

при  $\nu \rightarrow \infty$ . *Подсказка.* Используйте метод стационарной фазы, учитывая, что

$$0 < \int_0^\infty e^{-\nu(t + \sec \beta \operatorname{sh} t)} dt < \int_0^\infty e^{-\nu t} dt = \frac{1}{\nu},$$

а также то, что функция  $f(\theta) = \theta - \sec \beta \sin \theta$  является стационарной при  $\theta = \beta$  и  $f''(\beta) = \operatorname{tg} \beta$ .

3. Покажите, что

$$J_\nu(\nu) = (1/\pi)\Gamma(4/3)(6/\nu)^{1/3} 3^{1/6}/2 + O(\nu^{-2/3}).$$

*Подсказка.* Используйте метод стационарной фазы, учитывая то, что  $J_\nu(\nu) = J_\nu(\nu \sec \beta)$  при  $\beta = 0$ . В этом случае фаза  $f(\theta) = \theta - \sec \beta \sin \theta$ , введенная в предыдущей задаче, является стационарной в граничной точке  $\theta = 0$  интегрального представления функции Бесселя. Кроме того,  $f''(0) = 0$  и  $f'''(0) = 1$ . В соответствии с этим используйте выражение (5.2.18) при  $\rho = 3$  и  $\gamma = 0$ .

### Раздел 5.6

4. Рассмотрите холмы, долины и контуры наибыстрейшего спуска и подъема функции  $\cos z$  (рис. 5.14), которая входит в подынтегральное выражение углового представления поля. Докажите, что КНС можно записать в виде

$$\operatorname{Re} z = n\pi + (-1)^n \operatorname{gd}(\operatorname{Im} z),$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — целые числа, а  $\operatorname{gd}(x)$  — так называемый гудерманиан [см. уравнение (4.3.117) в справочнике Абрамовица и Стегана [4], указанного в литературе к гл. 4 настоящей книги]:

$$\operatorname{gd}(x) = 2 \arctg e^x - \pi/2.$$

5. Найдите холмы, долины и контуры наибыстрейшего спуска и подъема функции  $\operatorname{Re}(z - z^3/3)$ , входящей в интегральное представление функции Эйри.

6. Исследуйте холмы, долины, а также контуры наибыстрейшего спуска и подъема функции  $\cos z + b(z - \pi/2)$ , входящей в интегральное представление функций Бесселя и Ханкеля при  $b > 1$  и  $b < 1$ .

7. Найдите главный член асимптотического представления функции Ханкеля  $H_n^{(2)}(x)$ , используя интегральное представление, которое можно получить, основываясь

на фурье-преобразовании (4.8.6) двумерной функции Грина [выражение (4.7.5)] при  $k_y = 0$ .

8. Покажите, что седловыми точками функции  $\cos z + z - \pi/2$  являются точки второго порядка  $z_s = \pi/2 + 2\pi n$  (обезьяньи седла), в то время как КНС имеют направления  $\theta = -\pi/6, -5\pi/6, +\pi/2$  и определяются уравнением  $\sin(z' - z_s) \operatorname{ch} z'' = z' - z_s$ .

9. Используя результаты двух предыдущих задач, покажите, что главный член асимптотического разложения функции  $H_n^{(2)}(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет вид

$$H_n^{(2)}(n) \sim -[\Gamma(1/3)/(\pi n^{1/3})](4/27)^{1/6} e^{-2\pi i/3}.$$

10. Рассмотрите функцию Эйри  $\operatorname{Ai}(x)$ , определяемую интегралами

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-x\tau + \tau^3/3} d\tau.$$

Проведя замену переменных  $\tau = x^{1/2} z$ , где выбрана главная ветвь квадратного корня, можно записать

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left[x^{3/2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right] dz \quad (x > 0),$$

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{|x|^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-i|x|^{3/2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right] dz \quad (x < 0).$$

Если же выбрать контур интегрирования  $L_0$  в комплексной  $z$ -плоскости (рис. 5.27), то функция Эйри запишется в виде

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi i} \int_{L_0} \exp\left[x^{3/2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right] dz \quad (x > 0).$$

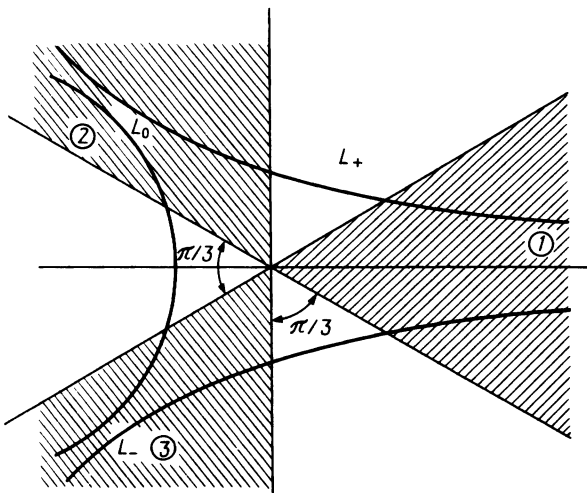


Рис. 5.27. Контур для вычисления функций Эйри  $\operatorname{Ai}$  и  $\operatorname{Bi}$ .

Наконец, метод стационарной фазы дает

$$\text{Ai}(x) \sim \sin(2|x|^{3/2}/3 + \pi/4)/(\pi^{1/2}|x|^{1/4}) \quad (x < 0).$$

Докажите записанные выше соотношения.

11. Используя результаты задачи 10, покажите, что при  $x > 0$  замена контура  $L_0$  на КНС, проходящий через седловую точку  $z = -1$ , приводит к следующему интегральному представлению:

$$\text{Ai}(x) = \frac{x^{1/2} \exp\left(-2\frac{x^{3/2}}{3}\right)}{2\pi i} \int_0^\infty \exp(-sx^{3/2}) \left( \frac{1}{z_+^2 - 1} - \frac{1}{z_-^2 - 1} \right) ds,$$

где  $z_+(s)$  и  $z_-(s) = z_+^*(s)$  являются решениями уравнения  $s = (1/3)z^3 - z - 2/3 = (1/3)(z - 2)(z + 1)^2$ . Учитывая затем соотношение

$$1/(z_+^2 - 1) - 1/(z_-^2 - 1) = (2i/s^{1/2}) - (15/72)is^{1/2} + \dots,$$

покажите, что

$$\text{Ai}(x) \sim \exp\left(-2\frac{x^{3/2}}{3}\right) / (2\pi^{1/2}x^{1/4}) \quad (x > 0).$$

12. Функция Эйри  $\text{Vi}(x)$  имеет такое же интегральное представление, как и  $\text{Ai}(x)$ , за исключением лишь того, что контур интегрирования  $L_0$  нужно заменить на  $L_+ - L_-$  (рис. 5.27). Покажите, что при  $x > 0$  функция  $\text{Vi}(x)$  асимптотически стремится к следующему выражению:

$$\text{Vi}(x) \sim \exp(2x^{3/2}/3)/(\pi^{1/2}x^{1/4}).$$

### Раздел 5.7

13. Вычислите поле, дифрагированное на плоской границе раздела между двумя диэлектриками, освещаемой цилиндрической р-волной. *Подсказка.* Используйте выражение (5.7.1), изменив в нем подынтегральное выражение с учетом р-поляризации волны.

14. Вычислите следующий за главным член асимптотического разложения интеграла  $I_{\text{КНС}}$  определяемого выражением (5.7.1), если главный член разложения дается выражением (5.7.3). *Подсказка.* Для вычисления члена второго порядка используйте представление (5.2.32).

15. Вычислите боковое смещение гауссова пучка, имеющего р-поляризацию волны, когда он полностью отражается плоской границей раздела двух сред.

16. Вычислите асимптотическое поле, дифрагированное на многослойной структуре, в которой возбуждаются волны утечки. Для этого, воспользовавшись однородным асимптотическим выражением (5.6.12), выразите интеграл типа Зоммерфельда (5.7.17) через комплексный интеграл Френеля (см. статью Тамира и Бертони [23]).

17. Сравните вклад от боковой волны и поля, вычисленного в приближении геометрической оптики, на границе раздела двух сред. Покажите, что, когда угол падения гауссова пучка почти равен критическому, амплитуда боковой волны становится сравнимой с амплитудой лучевого поля.

18. Вычислите поле, пропускаемое плоской границей раздела между двумя средами, освещаемой гауссовым пучком. Покажите, что прошедшее поле можно разделить на боковую волну и лучевое поле.

19. Покажите, что боковое смещение Гуса — Хенхена пучка, отражаемого от плоской границы раздела между двумя диэлектриками, можно рассматривать как результат небольшого смещения плоскости отражения внутрь второй среды. Вычислите расстояние от этой виртуальной плоскости до границы раздела как функцию угла падения.

20. Рассмотрите две диэлектрические среды (скажем, 1 и 2), разделенные цилиндрической поверхностью радиусом  $a$ . Пусть коллимированный гауссов пучок освещает поверхность раздела под углом падения (относительно оси пучка), который больше критического. Вычислите в дальней зоне поле, прошедшее во вторую среду в случае  $p$ - и  $s$ -волн как функцию угла падения. Кроме того, вычислите, какую часть энергии потерял падающий пучок при отражении за счет частичного пропускания. *Подсказка.* Вычисляя поле на поверхности раздела, используйте коэффициент пропускания Френеля для лучей, направленных по оси пучка. Затем найдите асимптотическое представление дифракционного интеграла Фраунгофера, используя метод наискорейшего спуска, чтобы правильно учесть гауссово распределение освещенности. (См книгу [35].)

### Раздел 5.9

21. Рассмотрите дифракционный интеграл

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-bs^2) \exp\left[-ik\left(\zeta s + \frac{s^3}{3}\right)\right] ds.$$

С помощью выражения (5.9.7) найдите асимптотическое разложение  $I(k)$ . *Подсказка.* Для вычисления параметров  $g_0$  и  $g_1$  в выражениях (5.9.2) и (5.9.8) используйте подстановку  $u = is$  и разложение

$$\exp(-bs^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} u^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} (u^2 - \zeta)^m \sum_{q=0}^m \zeta^q b^{m+q} \frac{1}{m! q!}$$

[ср. с (5.9.2)].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B., J. Opt. Soc. Am., **52**, 116 (1962).
2. Ludwig D., Commun. Pure Appl. Math. Phys., **19**, 215 (1966).
3. Lewis R. M., Boersma J., J. Math. Phys., **10**, 2291 (1969).
4. Ufimtsev P. Y., transl. by Air Force Syst. Command, Foreign Tech. Div., Doc. ID No. FTD-NC-23-259-71 (1971).
5. Ufimtsev P. Y., Proc. IEEE, **63**, 1734 (1975). [Имеется перевод: Уфимцев П. Я. — ТИИЭР, 1975, т. 63, № 12, с. 115.]
6. Kouyoumjan R. G., Pathak P. H., Proc. IEEE, **62**, 1448 (1974). [Имеется перевод: Куюмджан Р., Патхак П. — ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 40.]
7. Stokes G. G., Cambridge Philos. Trans., **9**, 166 (1856).
8. Kelvin Lord (Thompson W.), Philos. Mag., **23**, 252 (1887).
9. Watson G. N., Proc. Cambridge Philos. Soc., **19**, 49 (1918).
10. Erdelyi A., SIAM J. Appl. Math., **3**, 17 (1955).
11. Erdelyi A., Asymptotic Expansions, Dover, New York, 1956.
12. Van der Corput J. G., Proc. Anst. Akad. Wet., **51**, 650 (1948).
13. Van der Corput J. G., Asymptotic Expansions I—III, Tech. Rep. Dep. Math., Univ. of California, Berkeley, 1954—1955.

14. *Bleistein N., Handelsman R. A.* Asymptotic Expansions of Integrals, Holt, New York, 1975.
15. *Srivovich L.*, Techniques of Asymptotic Analysis, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.
16. *Dingle R. B.*, Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation, Academic Press, New York, 1973.
17. *Lee S.-W., Deschamps G.*, IEEE Trans. Antennas Propag., **AP-24**, 25 (1976).
18. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* — УФН, 1980, т. 132, № 3, с. 475.
19. *Pearcey T.*, Philos. Mag., **37**, 311 (1946).
20. *Goos F., Haenchen H. H.*, Ann. Phys. (Leipzig), **1**, 333 (1947).
21. *Loitsch H. K.*, J. Opt. Soc. Am., **58**, 551 (1968).
22. *Midwinter J. E., Zernike F.*, Appl. Phys. Lett., **16**, 198 (1970).
23. *Tamir T., Bertoni H. L.*, J. Opt. Soc. Am., **61**, 1397 (1974).
24. *Focke J.*, Ber. Saech. Akad. Wiss. Leipzig, **101(3)**, 1 (1954).
- 24a. *Focke J.*, Opt. Acta, **3**, 110 (1956).
25. *Chester C., Friedman B., Ursell F.*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**, 599 (1957).
26. *Keller J. B.*, J. Appl. Phys., **28**, 426 (1957).
27. *Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D.*, J. Opt. Soc. Am., **28**, 570 (1957).
28. Geometric Theory of Diffraction (ed. R. C. Hansen), IEEE Press, New York, 1981.
29. *Braun G.*, Acta Phys. Austriaca, **10**, 8 (1956).
30. *Jones D. S., Kline M.*, J. Math. Phys., **37**, 1 (1958).
31. *Chako N.*, J. Inst. Math. Its Appl., **1**, 372 (1965).
32. *Lalor E.*, J. Opt. Soc. Am., **58**, 1235 (1968).
33. *Sherman G. C., Stamnes J. J., Lalor E.*, J. Math. Phys., **17**, 760 (1976).
34. *Barakat R.* — In: The Computer in Optical Research (ed. B. R. Frieden), Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980, p. 35—80.
35. *Unger H. G.*, Planar Optical Waveguides and Fibers, Sect. 2.8., Oxford Univ. (Clarendon), London, New York, 1977.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Bleistein I. N.* Mathematical Methods for Wave Phenomena, Academic Press, Orlando, Florida, 1984.
- Southwell W. H.*, Opt. Lett., **3**, 100 (1978).



# ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ОТВЕРСТИИ И РАССЕЯНИЕ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕДМЕТАХ

## 6.1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве практических случаев дифракционные задачи [1, 2] (см. также работу Боумана и др. [3], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги) не имеют замкнутых аналитических решений. В связи с этим еще с прошлого века усилия исследователей были направлены на поиск приближенных решений. Исходной точкой для многих авторов явился *принцип Кирхгофа*, особенно часто с его помощью рассматривалась задача о дифракции на отверстиях. Как уже упоминалось, сущность этого принципа заключается в том, что поле на отверстии полагается равным полю, создаваемому теми же источниками, что и в отсутствие экрана, ограничивающего данное отверстие. С физической точки зрения данное утверждение эквивалентно тому, что наличие экрана не влияет на поле в области отверстия и лишь вблизи границы отверстия это влияние становится существенным. Следовательно, если отверстие достаточно велико, то ошибкой, возникающей вследствие изменения поля вблизи краев, можно пренебречь. Однако для малых отверстий применение принципа Кирхгофа приводит к значительным погрешностям. Поэтому для того, чтобы оценить ошибку, которая возникает из-за неверного представления поля в некоторой области вблизи границы отверстия, необходимо прежде всего выяснить размеры этой области. Для ответа на последний вопрос требуется знание точных решений, которые можно получить лишь в весьма ограниченном числе случаев и для отверстий специальной формы.

К настоящему времени хорошо развиты различные приближенные методы решения задач дифракции на металлических препятствиях (геометрическая теория дифракции и теория однородных асимптотических разложений), в то время как для дифракции на диэлектриках полной ясности пока нет. Причиной этого является отсутствие аналитического решения для основной задачи дифракции, а именно для дифракции плоской волны на диэлектрическом клине.

За последние десятилетия развиты асимптотические методы решения задач дифракции (см. литературу [1, 6, 27, 28], указанную в гл. 5 настоящей книги), а также разработаны методы, в которых дифраги-

рованные поля строятся с учетом модификации этих полей на препятствиях и отверстиях. Постоянно развиваясь, теория продвинулась столь далеко, что в пределе  $k \rightarrow \infty$  позволяет описывать распределения полей для объектов любой сложной формы с более или менее достаточной степенью точности.

Методы асимптотического построения дифрагированных полей можно проиллюстрировать на простых классических примерах, таких, как клин с конечным поверхностным импедансом, круговой цилиндр и сфера. Дифракция на клине представляет особый интерес, поскольку 1) для клина можно получить коэффициенты *дифракционной матрицы*  $\mathbf{D}$ , которая является основным математическим инструментом при вычислении поля, дифрагированного на искривленном клине, ограничивающем физическое отверстие, и 2) дифрагированное поле включает в себя две поверхностные волны, которые своим появлением обязаны конечному поверхностному импедансу двух граней клина. Свойства таких поверхностных волн мы проиллюстрируем на примере дифракции плоской волны на металлическом круговом цилиндре. Если разложение для дифрагированной волны получено с помощью преобразования Ватсона (см. гл. 4), то поле в области тени принимает вид поверхностной волны. Наконец, дифракция на сфере используется для установления некоторых общих теорем для поля, рассеиваемого на произвольных препятствиях конечных размеров, и для обобщения теории поверхностных волн, возбуждаемых лучами, идущими по касательной к поверхности рассеивающего тела и распространяющимися вдоль геодезических линий этой поверхности.

Основной особенностью любых дифракционных полей является их зависимость от длины волны. Это свойство используется в различного рода оптических устройствах для спектрального анализа излучения. Примером такого устройства служит дифракционная решетка, которая состоит из большого числа клиньев (штрихов). Поле, дифрагированное на одном штрихе, интерферирует с полями от других штрихов, в результате чего получается картина, состоящая из узких линий, соответствующих интерференционным порядкам дифракционной решетки. Угол отражения каждого луча зависит от частоты падающего излучения. Поэтому если на пути этого луча поставить щель, а за ней поместить фотодиод, то для известного интерференционного порядка и при известной ширине линии можно узнать, какая доля интенсивности излучения попадает в данный спектральный интервал. Такой принцип работы лежит в основе устройства современных спектрометров на дифракционных решетках, которые практически вытеснили спектрометры, использующие в качестве диспергирующего элемента призму.

## 6.2. ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ

Рассмотрим в качестве первого случая клинообразную область ( $\rho > 0$ ,  $2\Phi \geq \phi \geq 0$ ) (рис. 6.1), освещаемую плоской s-волной (т. е. волной, вектор напряженности магнитного поля которой параллелен кромке клина), распространяющейся вдоль направления  $\phi = \phi'$  перпендикулярно границе препятствия, которое считается идеальным проводником:

$$u_i(\rho, \phi) = \exp[ik\rho \cos(\phi - \phi')]. \quad (6.2.1)$$

В этом выражении знак плюс у показателя экспоненты соответствует распространению волны под углом  $\phi = \phi'$  в направлении к клину.

Следуя Зоммерфельду (см. работу [31], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги), суммарное поле (т. е. сумму падающего, отраженного и дифрагированного полей) можно записать в виде интеграла

$$u(\rho, \phi) = \int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos \beta} S(\beta + \phi) d\beta, \quad (6.2.2)$$

вычисляемого по комплексному контуру  $\Gamma$  (рис. 6.2). Угловой спектр  $S$  имеет простые полюсные сингулярности и определяется из условия равенства нулю производной  $du/d\phi$  на границах клина:

$$\int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos \beta} \frac{\partial S(\beta + \phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0, 2\Phi} d\beta = 0. \quad (6.2.3)$$

Поскольку  $\partial S/\partial \phi = \partial S/\partial \beta$ , этот интеграл можно взять по частям. Таким образом, получаем

$$\int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos \beta} \sin \beta \left\{ \begin{matrix} S(\beta) \\ S(\beta + 2\Phi) \end{matrix} \right\} d\beta = 0. \quad (6.2.4)$$

Этому уравнению удовлетворяет любая функция  $S(\beta)$ , такая, что для любых  $\beta$  выполняются следующие условия:  $S(\beta + \pi) = -S(-\beta + \pi)$  и  $S(\beta + 2\Phi + \pi) = -S(-\beta + 2\Phi + \pi)$ . Одним из возможных реше-

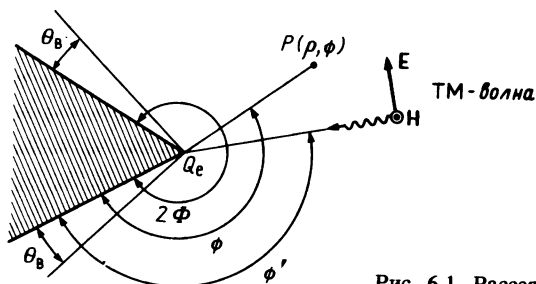


Рис. 6.1. Рассеяние падающей ТМ-волны на клине.

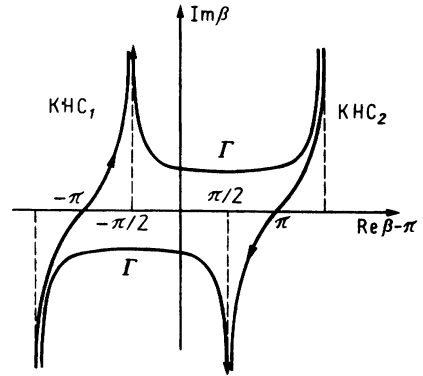


Рис. 6.2. Комплексный контур интегрирования при интегральном представлении поля в области клина [см. выражение (6.2.2)].

ний является

$$S(\alpha - \pi) = \frac{i}{2\pi N} \frac{\sin(\alpha/N)}{\cos(\alpha/N) - \cos(\phi'/N)}, \quad N = \frac{2\Phi}{\pi}. \quad (6.2.5)$$

Мы видим, что функция  $F(\alpha)$  имеет бесконечное число простых полюсов, расположенных в точках  $\alpha = \beta_q$ , причем

$$\beta_q = (-1)^q(\phi' - \Phi) + (2q + 1)\Phi + \pi, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.2.6)$$

Если заменить контур интегрирования  $\Gamma$  двумя контурами наибыстрейшего спуска КНС<sub>1</sub> и КНС<sub>2</sub>, проходящими из-за наличия множителя  $\exp(-ik\rho \cos \beta)$  через точки 0 и  $2\pi$  соответственно, то выражение (6.2.2) можно переписать в виде

$$u(\rho, \phi) = \left( \int_{\text{КНС}_1} d\beta + \int_{\text{КНС}_2} d\beta \right) \exp(-ik\rho \cos \beta) S(\beta + \phi) + \sum_q r_q \exp[-ik\rho \cos(\beta_q - \phi)], \quad (6.2.7)$$

где  $r_q$  — вычеты функции  $S(\beta + \phi)$  в полюсах, расположенных между КНС<sub>1</sub> и КНС<sub>2</sub>:

$$r_q = \lim_{\beta \rightarrow \beta_q - \phi} 2\pi i S(\beta + \phi)(\beta + \phi - \beta_q) = 1. \quad (6.2.8)$$

Если угол  $\phi'$  является вещественным, то из выражения (6.2.6) следует, что полюсы  $\beta_q$  лежат на вещественной оси. Таким образом, для полюсов  $\beta_q$ , расположенных между КНС<sub>1</sub> и КНС<sub>2</sub>, справедливо неравенство  $2\pi \geq \beta_q - \phi \leq 0$ . С учетом этого разложение (6.2.7) можно представить в виде

$$u(\rho, \phi) = \int_{\text{КНС}_2} d\beta [S(\beta + \phi) - S(\beta + \phi - 2\pi)] \exp(-ik\rho \cos \beta) + \sum_q \exp[-ik\rho \cos(\phi - \beta_q)] [U(\phi - \beta_q + 2\pi) - U(\phi - \beta_q)], \quad (6.2.9)$$

где через  $U(x)$  обозначена ступенчатая функция Хевисайда. В соответствии с (6.2.9) поле включает в себя только те плоские волны, направление распространения которых ограничено углами в секторе  $\max(\beta_q - 2\pi, 0) \leq \phi \leq \min(\beta_q, 2\Phi)$ . Однако в пределе  $k \rightarrow \infty$  поле должно сводиться к суперпозиции лучевых конгруэнций, каждая из которых своим появлением обязана отражениям падающей волны. Легко проверить, что поле, вычисленное в приближении геометрической оптики, совпадает с (6.2.9).

Поскольку выражение (6.2.9) для  $u(\rho, \phi)$  удовлетворяет граничным условиям и сводится к правильному виду в пределе  $k \rightarrow \infty$ , естественно предположить, что это выражение правильно описывает поле и при конечных значениях  $k$ .

При  $k\rho \rightarrow \infty$  интегралы по обоим контурам КНС<sub>1</sub> и КНС<sub>2</sub> могут быть заменены соответствующими вкладками от седловых точек. В результате мы имеем

$$u(\rho, \phi) \sim D_s(\phi, \phi') \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho^{1/2}} + \sum_q \exp[-ik\rho \cos(\phi - \phi')] [U(\phi - \beta_q + 2\pi) - U(\phi - \beta_q)]; \quad (6.2.10)$$

здесь

$$D_s(\phi, \phi') = -\frac{e^{-i\pi/4} \sin(\pi/N)}{N(2\pi k)^{1/2}} \times \left\{ \frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi - \phi')/N]} + \frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi + \phi')/N]} \right\} \quad (6.2.11)$$

представляет собой дифракционный коэффициент, вычисленный для случая, когда на клин падает s-волна. Для p-волны (т. е. волны, поляризованной параллельно кромке) соответствующий коэффициент  $D_p$  можно получить из  $D_s$  заменой минуса на плюс перед вторым членом в правой части выражения (6.2.11)

В случае когда полюс близок к какой-либо седловой точке, можно получить более точное представление поля, используя переходную функцию, рассмотренную в разд. 5.6.

### 6.2.1. Клин с конечным импедансом

Разница в проводимости реальных металлов и идеальных проводников в оптическом диапазоне проявляется особенно сильно. Как мы уже показали в конце гл. 3, это можно учесть, представляя поверх-

ность металла поверхностным импедансом. Разумеется, такое представление оказывается неверным, если частота слишком близко приближается к плазменной частоте. Характеризуя реальную поверхность импедансом, можно получить аналитическое решение многих задач дифракции, например задачу дифракции на клине с конечным импедансом. Аналогичный подход можно применить и для анализа дифракции на металлических телах с диэлектрическими покрытиями. В этом случае некоторую информацию о дифракции можно получить, выполняя вычисления для клина с импедансной поверхностью.

В частности, препятствия с мнимыми поверхностными импедансами возбуждают поверхностные волны. В гл. 3 мы показали, что угол Брюстера для этих поверхностей дается формулой  $\theta_B = Z_s/\zeta$ . Для хорошего металлического проводника  $\theta_B \approx \pi/2 - i/k$ , так что на его поверхности может распространяться поверхностная волна, которая проникает на некоторую конечную глубину в металл. При рассмотрении дифракции на клиньях, отверстиях и других объектах с поверхностным импедансом необходимо учитывать, что поверхностные волны могут вносить изменения как в интенсивность, так и в фазу суммарного дифрагированного поля.

Для того, чтобы учесть влияние конечной проводимости на дифрагированное поле, полезно обобщить проведенный выше анализ на случай клина, характеризуемого поверхностным импедансом  $Z_s$ , соответствующим углу Брюстера  $\theta_B$ . В этом случае s-волна, у которой вектор магнитного поля параллелен оси  $z$ , на поверхности клина удовлетворяет граничному условию

$$(1/\rho)(\partial u/\partial \phi) \mp ik \cos \theta_B u = 0 \quad \text{для} \quad \phi = 0, 2\Phi. \quad (6.2.12)$$

Здесь  $u(\rho, \phi) = H(\rho, \phi)$ , а знаки плюс и минус относятся соответственно к верхней и нижней граням клина (рис. 6.1). Малюжинец [3] получил в представлении углового спектра выражение для  $u$  в виде обобщенного интеграла Зоммерфельда, аналогичного интегралу из соотношения (6.2.2):

$$u(\rho, \phi) = \int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos \beta} S(\beta + \phi) \frac{g(\beta + \phi)}{g(\pi + \phi')} d\beta, \quad (6.2.13)$$

где  $S(\beta)$  — функция, определяемая выражением (6.2.5), а  $g(\beta + \phi)$  — функция, учитывающая конечный поверхностный импеданс:

$$g(\alpha + \pi) = \frac{M(\alpha - \theta_B)M(\alpha + \theta_B - 2\Phi)}{M(\alpha - \pi + \theta_B)M(\alpha - \theta_B - 2\Phi + \pi)} \times \\ \times \frac{\cos[(1/2N)(\alpha + \theta_B - \pi/2)] \sin[(1/2N)(\alpha - \theta_B + \pi/2)]}{\sin(\alpha/N)}. \quad (6.2.14)$$

Функция  $M(\alpha)$ , введенная Малюжинцом, представляет собой бесконечное произведение:

$$M(\alpha) = \prod_{n,m=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha/\pi}{N(2n-1) + m - 1/2} \right)^2 \right]^{(-1)^{m+1}}. \quad (6.2.15)$$

Асимптотическое значение интеграла в (6.2.13) при  $k\rho \rightarrow \infty$  можно вычислить тем же способом, с помощью которого было получено выражение (6.2.10). Таким образом, проделав необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) \sim D_s(\phi, \phi') \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho^{1/2}} + S_+ \exp[-ik\rho \sin(\phi + \theta_B)] + \\ + S_- \exp[-ik\rho \sin(-\phi + 2\Phi + \theta_B)] + \\ + \sum_q r_q \exp[-ik\rho \cos(\phi - \beta_q)]. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Это выражение отличается от (6.2.10) в трех отношениях. Во-первых, коэффициент дифракции  $D_s$  зависит от угла Брюстера. Во-вторых, в угловых секторах, примыкающих к граням клина, могут существовать две поверхностные волны с амплитудами  $S_+$  и  $S_-$  соответственно, которые ограничены углами  $\phi$ , такими, что

$$\begin{aligned} 2\Phi \geq \phi \geq 2\Phi - \text{Arch}(-1/\theta_B'') + \pi/2 - \theta_B', \\ 0 \leq \phi \leq \text{Arch}(-1/\theta_B'') - \pi/2 + \theta_B'. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Эти волны существуют, только если выполняется неравенство  $\theta_B' + \text{Arch}(-1/\theta_B'') > \pi/2$ . И в-третьих, дополнительные амплитуды отраженных клином волн и распространяющихся в направлении  $\phi = \beta_q$ , не равны единице. Эти амплитуды можно вычислить, используя для граней клина формулу Френеля. Можно показать, что в данном случае коэффициент дифракции  $D_s$  записывается в виде

$$\begin{aligned} D_s(\phi, \phi') = - \frac{e^{-i\pi/4} \sin(\pi/N)}{N(2\pi k)^{1/2}} \left[ \frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi - \phi')/N]} \frac{g(\phi)}{g(\phi' + \pi)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi + \phi')/N]} \frac{g(\phi + 2\pi)}{g(\phi' + \pi)} \right]. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

В свою очередь амплитуда  $r_q$   $q$ -й отраженной волны дается выражением

$$r_q = g(\beta_q)/g(\phi' + \pi), \quad (6.2.19)$$

что нетрудно показать, используя выражение (6.2.8) и замечая, что вычет функции  $S(\beta + \phi)g(\beta + \phi)$  при  $\phi + \beta = \beta_q$  равен  $g(\beta_q)$ . Из этого выражения следует, что амплитуда пучка, дифрагированного в на-

правлении  $\beta_q \pm \pi$ , с точностью до коэффициента отражения  $r_q$  совпадает с амплитудой пучка, дифрагированного на идеальном проводнике ( $\theta_B = \pi/2$ ). Поскольку  $r_q$  не зависит от частоты, эту величину можно вычислить с помощью формулы Френеля (см. гл. 3 для среды с показателем преломления  $\tilde{n} = \text{tg}\theta_B$ ).

Амплитуды  $S_{\pm}$  двух поверхностных волн равны вычетам в полюсах функции  $g(\beta + \phi)$ , входящей в подынтегральное выражение интеграла (6.2.13), которые лежат между КНС<sub>1</sub> и КНС<sub>2</sub>. Из выражений (6.2.14) и (6.2.15) следует, что эти два полюса находятся в точках  $\beta_{\pm} + \phi - \Phi = \pm(3\pi/2 + \Phi - \theta_B) + \pi$ .

### 6.2.2. Дифракционная матрица для искривленной кромки

Полученные выше результаты можно обобщить на случай дифракции на искривленной металлической кромке (рис. 6.3), освещаемой лучами, образующими угол  $\beta$  с касательным к кромке вектором  $\hat{e}$  в точке  $Q_e$  (ср. с разд. 5.10 и рис. 5.25). Если рассмотреть проекцию падающего и дифрагированного лучей на плоскость, перпендикулярную вектору  $\hat{e}$ , касательному к кромке в точке  $Q_e$ , и направить падающий луч под углом  $\phi'$ , то положение дифрагированных лучей, образующих коническую поверхность, будет задаваться углом  $\phi$  (рис. 6.4). Напряженность электрического поля дифрагированного на кромке луча можно записать в виде

$$E_d(\mathbf{r}) = [\rho_1 / [r(\rho_1 + r)]]^{1/2} e^{-ikr} \mathbf{D}(\phi, \phi'; \beta) \cdot E_i(Q_e), \quad (6.2.20)$$

где вектор  $\mathbf{r}$  совпадает с  $\mathbf{r}'$  из разд. 5.10, а параметр  $\rho_1$  имеет то же значение, что и в (5.10.20). Входящую в выражение (6.2.20) дифракцион-

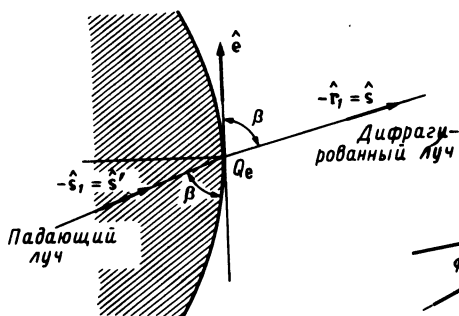


Рис. 6.3. Геометрическое представление дифракции на крае.

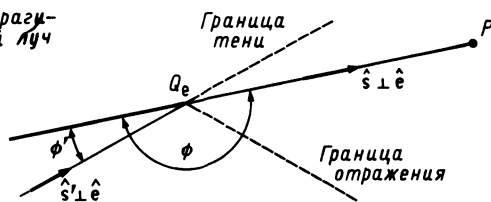


Рис. 6.4. Дифракция на полуплоскости. Плоскость рисунка перпендикулярна вектору  $\hat{e}$  в точке  $Q_e$ .



ную матрицу  $\mathbf{D}$  получили Коуьюмян и Патак [4] и записали ее в виде

$$\mathbf{D}(\phi, \phi'; \beta) = \hat{\beta}_d \hat{\beta}_i D_p + \hat{\phi} \hat{\phi}' D_s, \quad (6.2.21)$$

где  $\hat{\beta}_d = \hat{\phi} \times \hat{r}$ ,  $\hat{\beta}_i = \hat{\phi} \times \hat{s}'$ , а  $D_p$  и  $D_s$  являются обобщением дифракционного коэффициента (6.2.11) на случай  $\beta \neq \pi/2$  и определяются выражением

$$D_{p,s} = \frac{e^{-i\pi/4} \sin(\pi/N)}{N(2\pi k)^{1/2} \sin \beta} \times \left[ -\frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi - \phi')/N]} \pm \frac{1}{\cos(\pi/N) - \cos[(\phi + \phi')/N]} \right], \quad (6.2.22)$$

где  $N = 2\Phi/\pi$ . В частности, для полуплоскости мы имеем  $N = 2$  и выражение (6.2.22) принимает вид

$$D_{p,s} = \frac{e^{-i\pi/4}}{(8\pi k)^{1/2} \sin \beta} \left[ \frac{1}{\cos[(\phi - \phi')/2]} \mp \frac{1}{\cos[(\phi + \phi')/2]} \right]. \quad (6.2.23)$$

Сравнивая дифракционные коэффициенты  $D_{p,s}$  с полученными ранее коэффициентами  $D_1$  [см. (5.2.48)] и  $D_k$  [см. (5.10.21)], можно заметить, что они отличаются только множителем, стоящим в квадратных скобках. Кроме того, коэффициенты  $D_{p,s}$  становятся сингулярными в случае, когда  $\phi = \pi + \phi'$ , т. е. когда мы рассматриваем лучи, лежащие в плоскости, проходящей через падающий луч и точку  $Q_e$ . С точки зрения геометрической оптики эта плоскость отделяет освещаемую область от области тени, отсюда и ее название — *граница тени*. В то время как при  $\phi + \phi' = \pi$  коэффициенты  $D_1$  и  $D_{p,s}$  становятся сингулярными, коэффициенты  $D_k$  остаются конечными. Легко показать, что данному направлению в геометрической оптике соответствует направление отраженных лучей. Поэтому полуплоскость, проходящая через точку  $Q_e$  и включающая в себя отраженный луч, называется *границей отражения*. В заключение заметим, что все упомянутые дифракционные коэффициенты, вычисленные для направлений, лежащих вблизи границы тени, практически совпадают, в то время как для других направлений их различие становится существенным. Таким образом, можно сделать вывод, что вычисления, проведенные на основе скалярного представления и приближения Кирхгофа, совпадают с расчетом на основе точной теории только тогда, когда мы рассматриваем лучи, дифрагированные в прямом направлении и отклоняемые лишь ненамного от границы тени. Фактически же данное утверждение означает, что приближение Кирхгофа неверно как в глубине области тени, так и в глубине освещенной области.

Вблизи границы тени выражение (6.2.20) для поля  $u(\rho, \phi)$  становится сингулярным. В этом случае, как было показано в разд. 5.3, для получения выражения, аналогичного (6.2.20), необходимо воспользоваться выражением для комплексного интеграла Френеля  $F$  и параметра обхода  $\xi$ , причем коэффициенты  $D_{p, s}$  заменяются величиной

$$D = -4\pi F(\xi)\pi^{1/2}\xi e^{i\xi^2} \frac{\sin(\pi/N)}{N(2\pi k)^{1/2} \sin \beta \cos(\pi/N) - \cos[(\phi - \phi')/N]}, \quad (6.2.24)$$

где параметр обхода определяется выражением

$$\xi^2 = 2k \frac{r(\rho_e^i + r)\rho_1^i \rho_2^i}{\rho_e^i(\rho_1^i + r)(\rho_2^i + r)} \sin^2 \beta \cos^2 \left( \frac{\phi - \phi'}{2} \right); \quad (6.2.25)$$

здесь  $\rho_{1, 2}^i$  — главные радиусы кривизны падающего волнового фронта [ср. с разд. 2.9], а  $\rho_e^i$  — радиус кривизны кромки в плоскости падения.

Можно показать, что для падающей плоской волны параметр  $\xi$  равен  $(2kr)^{1/2} \sin \beta \cos[(1/2)(\phi - \phi')]$ . Подставляя это выражение в формулу (6.2.24) и учитывая, что для прямой кромки  $\rho_e^i = \infty$ , в итоге получим выражение для поля, совпадающее с выражением (5.3.2).

### 6.2.3. Дифракция на диэлектрическом клине

Как уже отмечалось во введении, задача дифракции на диэлектрическом клине не имеет аналитических решений. Поэтому ограничимся рассмотрением той области, где задача может быть решена с помощью двух интегралов Зоммерфельда, содержащих неизвестную

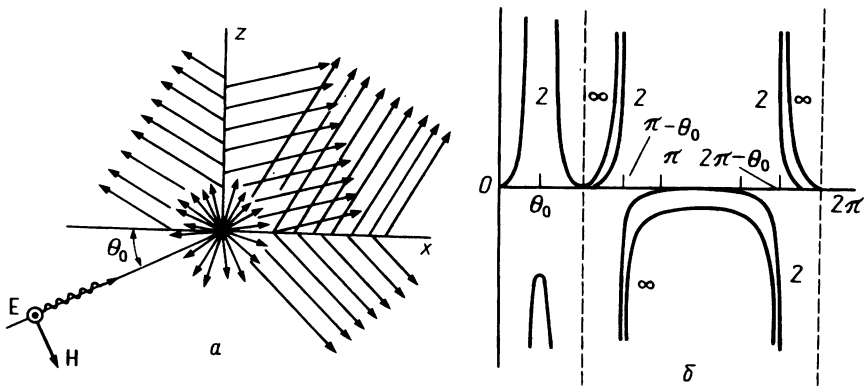


Рис. 6.5. Дифракция плоской волны на прямоугольном диэлектрическом клине при  $n = 2$  и  $\infty$ . Заметьте убывание дифрагированного поля вдоль граней клина. (Из работы Джу и др. [5].)

угловую функцию, с последующей сшивкой выражений для полей на противоположных гранях клина. Этот метод [5] применялся для получения картины, изображенной на рис. 6.5. Вкратце он состоит в следующем.

В качестве исходного распределения берется поле, вычисленное в приближении геометрической оптики. Затем дифрагированное на кромке поле представляется в виде комбинации полей, излучаемых мультиполями. Далее ограничиваются лишь теми из этого набора, аналитическое продолжение которых внутрь диэлектрика представляет собой убывающую функцию, и амплитуды этих мультипольных полей получают при решении системы линейных уравнений.

### 6.3. ДИФРАКЦИЯ НА ЩЕЛИ

Метод, рассмотренный в предыдущем разделе, можно с успехом применить и к вычислению дифракции на бесконечной щели шириной  $2a$  (рис. 6.6). Для простоты предположим, что поле, падающее на щель перпендикулярно ее плоскости, представляет собой плоскую волну. В первом приближении будем считать, что поле на апертуре равно полю падающей волны (приближение Кирхгофа). В этом случае поле в точке  $P$  определяется двумя лучами, исходящими от двух границ щели, и геометрическим лучом, если таковой имеется. Вклад дифрагированных лучей можно вычислить, используя формулу (6.2.21), в которой матрица  $\mathbf{D}$  определяется границами апертуры щели:

$$E_d(P) = \left[ \frac{\exp(-ik_0\rho_1)}{\sqrt{\rho_1}} \mathbf{D}\left(\phi_1, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\exp(-ik_0\rho_2)}{\sqrt{\rho_2}} \mathbf{D}\left(\phi_2, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot E_i. \quad (6.3.1)$$

Если точка  $P$  находится в области тени, то поле, соответствующее геометрическому лучу, отсутствует. Следовательно, в дальней зоне при любом угле дифракции  $\theta \neq 0$  выражение (6.3.1) можно переписать в виде

$$E_d(\theta) = \frac{\exp(-ik_0\rho)}{\sqrt{\rho}} \left[ \mathbf{D}\left(\frac{3}{2}\pi + \theta, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{3}{2}\pi - \theta, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot E_i, \quad (6.3.2)$$

где дифракционная матрица  $\mathbf{D}$  зависит от апертурного угла краев, ограничивающих щель. Поскольку это распределение является непрерывной функцией угла  $\theta$ , выражение (6.3.2) остается справедливым и при  $\theta = 0$ , т. е. для дифракции вперед.

На конечном расстоянии от щели разделение на дифрагированные и геометрические лучи не является однородным. Действительно, если мы представим поле через дифракционный интеграл, то, как следует

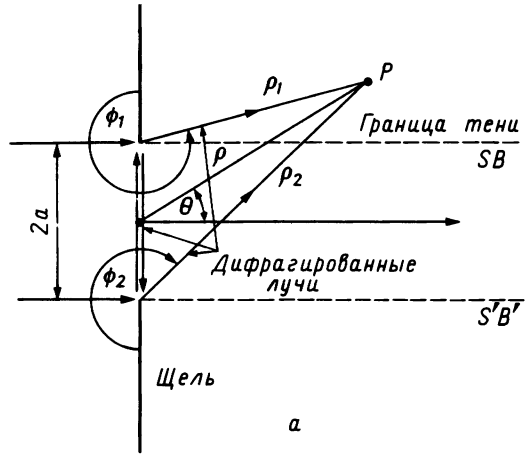
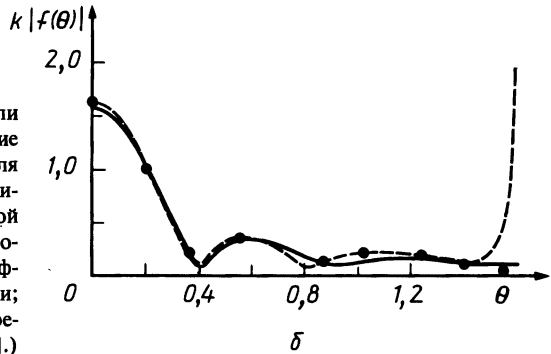


Рис. 6.6. *a* — дифракция на щели шириной  $2a$ ; *б* — распределение интенсивности в дальней зоне для  $p$ -волны при  $ka=8$ ; сплошная кривая получена с учетом однократной дифракции, в то время как штриховая кривая получена с учетом эффектов многократной дифракции; точки соответствуют точному решению. (Из работы Келлера [5a].)



из предыдущей главы, вклад в общее выражение от граничных точек интеграла можно рассматривать отдельно от вклада точек стационарной фазы, только если первые и вторые достаточно удалены друг от друга. В частности, когда точка стационарной фазы близка к граничной (например, у границы тени), поле необходимо описывать с помощью комплексного интеграла Френеля.

Рассмотрим еще один вопрос, а именно о границах применимости принципа Кирхгофа. Считается, что приближение, основанное на этом принципе, применимо в условиях, когда длина волны падающего излучения намного меньше ширины щели. Если это не так, то в следующем приближении необходимо учитывать многократную дифракцию, которую претерпевают лучи последовательно сначала на одном краю щели, затем на противоположном и т. д. При умеренных значениях

масштабного параметра  $ka$  ( $\geq 4$ ) мы можем рассмотреть один цикл такой дифракции и получить таким образом распределение, изображенное на рис. 6.6, б (этот рисунок заимствован из статьи Келлера [26], указанной в литературе к гл. 5 настоящей книги).

#### 6.4. ДИФРАКЦИЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

Для иллюстративных целей начнем рассмотрение с двумерной дифракционной задачи на примере однородного диэлектрического цилиндра, протяженного на бесконечно большое расстояние вдоль оси  $y$ . Будем считать, что поле  $u$  не зависит от координаты  $y$ . В этом случае для компоненты поля, параллельной оси цилиндра,  $u(x, z)$  ( $= E_y$  для ТЕ-волны и  $H_y$  для ТМ-волны) мы имеем уравнение

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial z^2 + k_0^2 u = -k_0^2 (\tilde{n}^2 - 1) P(x, z) u, \quad (6.4.1)$$

где функция  $P(x, z) = 1$ , когда точка  $(x, z)$  лежит внутри цилиндра, и  $P(x, z) = 0$  в противном случае, а  $\tilde{n}$  — показатель преломления, не зависящий от поперечных координат.

На границе цилиндра  $S$  в случае ТЕ-волны функция  $u$  и ее градиент  $\nabla u$  непрерывны, в то время как в случае ТМ-волны непрерывными являются тангенциальные составляющие поля и его нормальная производная, деленная на квадрат показателя преломления.

Выведем выражение для поля  $u$  внутри и снаружи цилиндра при падении на него плоской волны  $u_i$ . Для этого приведем уравнение (6.4.1) к интегральному виду, рассматривая его правую часть в качестве источника:

$$u(x, z) = u_i(x, z) + k_0^2 (\tilde{n}^2 - 1) \iint_{S_d} G(x - x'; z - z') u(x', z') dx' dz', \quad (6.4.2)$$

где  $S_d$  — поперечное сечение диэлектрического цилиндра, а  $G$  — двумерная функция Грина для случая  $x = k_0$  [см. уравнение (4.7.5)]. Для решения интегрального уравнения (6.4.2) в задачах рассеяния на диэлектриках разработан метод итераций [6]. В первом порядке этого приближения сначала вычисляется поле внутри цилиндра, а рассеянное поле затем находят с помощью эквивалентных объемных токов в диэлектрической области в предположении, что излучение происходит в неограниченном пространстве [см. разд. 6.8, уравнение (6.8.2)].

Если положить  $\varepsilon = k_0^2 (\tilde{n}^2 - 1)$  и обозначить через  $G^*$  оператор линейной свертки, определяемой выражением

$$G^* f \equiv \iint_{S_d} G(x - x', z - z') f(x', z') dx' dz', \quad (6.4.3)$$

то уравнение (6.4.2) можно переписать в операторном виде

$$u = u_i + \varepsilon G^* u. \quad (6.4.4)$$

Это *интегральное уравнение Фредгольма* (см. работу Трикоми [26], указанную в литературе к гл. 7), определяемое в области  $S_d$  и имеющее в качестве ядра следующую функцию:

$$G = (i/4)H_0^{(2)}[k_0\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}],$$

которая является сингулярной в точках  $x = x'$ ,  $z = z'$  или  $k_0 = 0$ .

Решения уравнения (6.4.2) существуют почти всегда, за исключением случаев с конкретными значениями  $k_0$ , соответствующими колебательным модам диэлектрического цилиндра. В этих случаях уравнение (6.4.2) имеет ненулевое решение при  $u_i = 0$ .

Если показатель преломления диэлектрического препятствия слабо отличается от показателя преломления окружающей среды, т. е.  $n \approx 1$ , то уравнение (6.4.4) можно переписать в виде

$$u = u_i + \varepsilon G^* u_i. \quad (6.4.5)$$

Это приближенное соотношение известно как формула *Рэлея — Ганса*. Иногда ее называют формулой Борна, который широко применял это уравнение для решения задач о рассеянии частиц на центральном потенциале. Если  $\varepsilon$  не является малым параметром, то член  $G^* u_i$  в уравнении (6.4.5) должен быть заменен на  $G^* u_g$ , где  $u_g$  — поле, найденное в приближении геометрической оптики.

#### 6.4.1. Дифракция на круговом диэлектрическом цилиндре

Покажем теперь, как можно решить интегральное уравнение (6.4.2) для кругового диэлектрического цилиндра, освещаемого р-волной (т. е. поляризованной параллельно оси цилиндра). В этом случае поле удобно представить в виде совокупности цилиндрических волн (см. разд. 4.11). Предположим без потери общности, что падающее поле  $u_i$  имеет вид плоской волны, распространяющейся в направлении  $\phi' = 0$ , т. е. перпендикулярно оси  $u$ . Полученные результаты можно обобщить на случай наклонного падения, заменяя волновое число  $k_0$  вне цилиндра на  $k_0 \sin \theta$ , а внутри цилиндра — на  $k_0(\tilde{n}^2 - \cos^2 \theta)^{1/2}$ , где  $\theta$  — угол между осью  $u$  и направлением распространения волны, а получаемые результаты справедливы для НЕ(ЕН)-полей [вместо ТЕ(ТМ)-полей] (см. гл. 8 настоящей книги).

В рассматриваемом случае поле внутри цилиндра можно записать в виде (см. разд. 4.11)

$$u(\rho', \phi') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m J_m(k_0 \tilde{n} \rho') e^{im\phi'} \quad (\rho' < a), \quad (6.4.6)$$

где  $\tilde{n}$  — обобщенный комплексный показатель преломления.

Используя теорему сложения Графа для цилиндрических функций (см. задачу 4.8) при  $\rho > \rho'$ , разложим ядро  $G$  интегрального уравнения в ряд по цилиндрическим функциям

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}) &= \\ &= \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m^{(2)}(k_0 \rho) J_m(k_0 \rho') e^{im(\phi - \phi')}. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

После подстановки правых частей выражений (6.4.6) и (6.4.7) в уравнение (6.4.2) мы имеем

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m J_m(k_0 \rho) e^{im\phi} + i \frac{\pi}{2} k_0^2 (\tilde{n}^2 - 1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m H_m^{(2)}(k_0 \rho) e^{im\phi} \times \\ &\times \int_0^a J_m(k_0 \rho') J_m(k_0 \tilde{n} \rho') \rho' d\rho' \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \times \\ &\times [J_m(k_0 \rho) + r_m^h H_m^{(2)}(k_0 \rho)], \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

где ряд  $\sum_m (-i)^m e^{im\phi} J_m$  представляет падающую плоскую волну [см. выражение (4.11.12)], а

$$r_m^h = i^{m+1} \frac{\pi}{2} (\tilde{n}^2 - 1) c_m \int_0^a J_m(\tilde{n}x) J_m(x) x dx. \quad (6.4.9)$$

Учитывая соотношение

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[ J_m(\tilde{n}x) \frac{d}{dx} J_m(x) - J_m(x) \frac{d}{dx} J_m(\tilde{n}x) \right] \right\} = (\tilde{n}^2 - 1) J_m(x) J_m(\tilde{n}x) x, \quad (6.4.10)$$

нетрудно получить, что

$$r_m^h = -i^{m+1} (\pi/2) C_m \beta [J_m(\beta) J'_m(\alpha) \tilde{n} - J'_m(\beta) J_m(\alpha)], \quad (6.4.11)$$

где  $\beta \equiv k_0 a$  — масштабный параметр, а  $\alpha = \tilde{n}\beta$ .

В соответствии с (6.4.8) поле снаружи диэлектрика представляет собой суперпозицию цилиндрических волн с весовыми коэффициентами  $r_m^h$ , которые в данном случае можно рассматривать как коэффициенты отражения от цилиндра  $m$ -й парциальной волны. Коэффициенты  $r_m^h$  нетрудно вычислить в предположении о непрерывности функции при переходе через границу цилиндра. При этом мы имеем

$$(-i)^m [J_m(\beta) + r_m^h H_m^{(2)}(\beta)] = C_m J_m(\alpha). \quad (6.4.12)$$

Таким образом, выражая коэффициенты  $C_m$  в виде функции от  $r_m^h$  и учитывая соотношение  $2i/\pi\beta = J_m'(\beta)H_m^{(2)'}(\beta) - J_m(\beta)H_m^{(2)'}(\beta)$ , получаем следующее выражение: .

$$r_m^h = -\frac{J_m(\beta)}{H_m^{(2)}(\beta)} \frac{\ln' J_m(\beta) - \tilde{n} \ln' J_m(\alpha)}{\ln' H_m^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' J_m(\alpha)} = -\frac{1}{2}(1 - S_m^h), \quad (6.4.13)$$

где  $\ln'$  — логарифмическая производная, а

$$S_m^h = -\frac{H_m^{(1)}(\beta) \ln' H_m^{(1)}(\beta) - \tilde{n} \ln' J_m(\alpha)}{H_m^{(2)}(\beta) \ln' H_m^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' J_m(\alpha)} \equiv S(m, \beta). \quad (6.4.14)$$

В частности, для вещественных  $\tilde{n}$  абсолютное значение функции  $S(m, \beta)$  равно единице. Заметим далее, что выражение (6.4.14) определяет  $S$  как функцию в общем случае комплексного параметра  $m$ . В результате такого искусственного расширения появляется возможность использовать преобразование Ватсона, если рассеянное поле при этом представить в виде парциальных волн (см. работу Ньютона [17], указанную в литературе к гл. 4).

Приведенное выше рассмотрение можно обобщить на случай  $s$ -волны. При этом получаем следующее выражение:

$$r_m^e = -\frac{J_m(\beta)}{H_m^{(2)}(\beta)} \frac{\ln' J_m(\beta) - \ln' J_m(\alpha)}{\tilde{n} \ln' H_m^{(2)}(\beta) - \ln' J_m(\alpha)} = -\frac{1}{2}(1 - S_m^e), \quad (6.4.15)$$

где

$$S_m^e = -\frac{H_m^{(1)}(\beta) \ln' J_m(\alpha) - \ln' H_m^{(1)}(\beta)}{H_m^{(2)}(\beta) \ln' J_m(\alpha) - \tilde{n} \ln' H_m^{(2)}(\beta)}. \quad (6.4.16)$$

Предельный случай, соответствующий металлическому цилиндру, можно получить, положив  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ . При этом выражения для  $r_m$  принимают более простой вид:

$$r_m^h = -J_m(\beta)/H_m^{(2)}(\beta), \quad r_m^e = -J_m'(\beta)/H_m^{(2)'}(\beta), \quad (6.4.17)$$

где функция  $J_m(\tilde{n}\beta)$  заменена ее асимптотическим выражением.

Из приведенных выражений следует, что коэффициент отражения для  $m$ -й цилиндрической волны сильно зависит от поляризации. Действительно, когда значение функции  $J_m(\beta)$  достигает максимума,  $r_p$  становится очень большим, а  $r_s$  незначительным, и наоборот, при минимальном  $r_p$  достигает максимального значения  $r_s$ . Это свойство можно использовать для создания поляризатора. Например, поляризующими свойствами будет обладать система, состоящая из большого числа равноотстоящих параллельных проволок. Периодическая



структура в данном случае как бы усиливает поляризационные свойства каждой проволоочки. Такие поляризаторы успешно применяются в дальнем ИК-диапазоне.

### 6.5. S-МАТРИЦА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВАТСОНА — РЕДЖЕ

Если за направление распространения падающей волны выбрать ось  $z$ , то выражение (6.4.8) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{im\phi} H_m^{(1)}(k_0\rho) + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} S_m^h H_m^{(2)}(k_0\rho) \equiv \\ &\equiv e^{-ik_0z} U(-z) + [u_d(\rho, \phi) + e^{-ik_0z} U(z)] \equiv \\ &\equiv e^{-ik_0z} U(-z) + \bar{u}_d(\rho, \phi). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Поле  $\bar{u}_d$  можно представить как результат действия оператора  $\hat{S}$  на претерпевающую дифракцию плоскую волну  $e^{-ik_0z} U(z)$ , а именно

$$\bar{u}_d(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} H_m^{(2)}(k_0\rho) S_m^h \equiv \hat{S} e^{-ik_0z} U(z). \quad (6.5.2)$$

При отсутствии препятствия оператор  $\hat{S}$  сводится к единице.

Если в качестве базисных функций взять набор цилиндрических мод  $(-i)^m e^{im\phi} H_m^{(2)}$ , то коэффициенты  $S_m$  будут представлять собой диагональные матричные элементы оператора  $\hat{S}(\beta)$ . Из коэффициентов  $S_m$  в свою очередь можно составить так называемую  $S$ -матрицу, которая в базисе  $H_m^{(2)} e^{im\phi}$  будет диагональной. Следует заметить, что при дифракции на рассеивающем теле без потерь мы имеем  $|S_m| = 1$ . Для матриц  $\hat{S}(\beta)$  и  $\hat{S}^\dagger(-\beta)$  [сопряженной к транспонированной матрице  $\hat{S}(\beta)$ ] справедливо соотношение:

$$\hat{S}(\beta) \cdot \hat{S}^\dagger(-\beta) = 1. \quad (6.5.3)$$

Таким образом,  $S$ -матрица является унитарной, а соответствующий оператор  $\hat{S}$  называется *унитарным оператором*.

Если параметр  $\beta$  в  $S$ -матрице является комплексным, то точки сингулярности этой матрицы могут дать информацию о параметрах и радиальной структуре препятствия. Рассмотрим теперь круговой цилиндр, показатель преломления которого зависит от радиальной координаты  $\rho$ . В этом случае, комплексные значения  $\beta$ , при которых собственные значения  $\hat{S}$  становятся бесконечными (эти значения  $\beta$  называются *резонансами* рассеивающего тела), можно использовать для нахождения профиля  $n(\rho)$ .

Резонансы, соответствующие вещественным значениям  $\beta$ , пред-

ставляют собой различные *связанные состояния* электромагнитного поля, которые как бы захватываются рассеивающим телом. Этим резонансам соответствуют собственные функции уравнения (6.4.4), если таковые имеются. Комплексные значения  $\beta_q$ , отвечающие резонансам, «представляют» поле, временно захваченное рассеивающим телом, причем время этого захвата обратно пропорционально мнимой части  $\text{Im} \beta_q$ .

### 6.5.1. Дебаевское разложение

Дебай [7] показал, что S-матрицу можно разложить в следующий степенной ряд:

$$S_q(\beta) = \frac{H_q^{(1)}(\beta)}{H_q^{(2)}(\beta)} \left[ R_q + T_q^2 \frac{H_q^{(2)}(\alpha)}{H_q^{(1)}(\alpha)} \sum_{p=1}^{\infty} \rho_q^{p-1} \right] \equiv \sum_{p=0}^{\infty} S_q^{(p)}(\beta), \quad (6.5.4)$$

где

$$R_q = - \frac{\ln' H_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' H_q^{(2)}(\alpha)}{\ln' H_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' H_q^{(1)}(\alpha)}, \quad (6.5.5a)$$

$$T_q^2 = \tilde{n} [\ln' H_q^{(2)}(\alpha) - \ln' H_q^{(1)}(\alpha)] [\ln' H_q^{(2)}(\beta) - \ln' H_q^{(1)}(\beta)] \times \\ \times [\ln' H_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' H_q^{(1)}(\alpha)]^{-2}, \quad (6.5.5b)$$

$$\rho_q = - \frac{H_q^{(2)}(\alpha) \ln' H_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' H_q^{(2)}(\alpha)}{H_q^{(1)}(\alpha) \ln' H_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' H_q^{(1)}(\alpha)}. \quad (6.5.5b)$$

Здесь  $R_q$  — коэффициенты отражения  $q$ -й парциальной волны от поверхности, член  $T_q^2$  — учитывает прохождение парциальной волны внутрь и затем наружу рассеивающего тела, а  $\rho_q^{p-1}$  — коэффициенты, учитывающие  $p-1$ -кратные внутренние отражения от поверхности. В частности, если  $\alpha, \beta \gg 1$ , то  $\ln' H_q^{(2)} \approx -i$ , и мы имеем  $R_q \approx -(\tilde{n}-1)/(\tilde{n}+1)$ ,  $T_q^2 \approx 4\tilde{n}/(\tilde{n}+1)^2$  и  $\rho_q \approx e^{i\alpha q}(\tilde{n}-1)/(\tilde{n}+1)$ . Таким образом, если показатель преломления  $\tilde{n}$  близок к единице, то  $|\rho_q| \ll 1$  и ряд быстро сходится.

$$\bar{u}_d = \bar{u}_d^{(0)} + \dots + \bar{u}_d^{(p)} + \dots, \quad (6.5.6a)$$

где

$$\bar{u}_d^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^q \frac{H_q^{(1)}(\beta)}{H_q^{(2)}(\beta)} R_q e^{iq\phi} H_q^{(2)}(k_0 \rho) \quad (6.5.6b)$$

и

$$\bar{u}_d^{(p)} = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (-i)^q \frac{T_q^2 H_q^{(1)}(\beta) H_q^{(2)}(\alpha)}{H_q^{(2)}(\beta) H_q^{(1)}(\alpha)} \rho_q^{p-1} e^{iq\phi} H_q^{(2)}(k_0 \rho). \quad (6.5.6b)$$

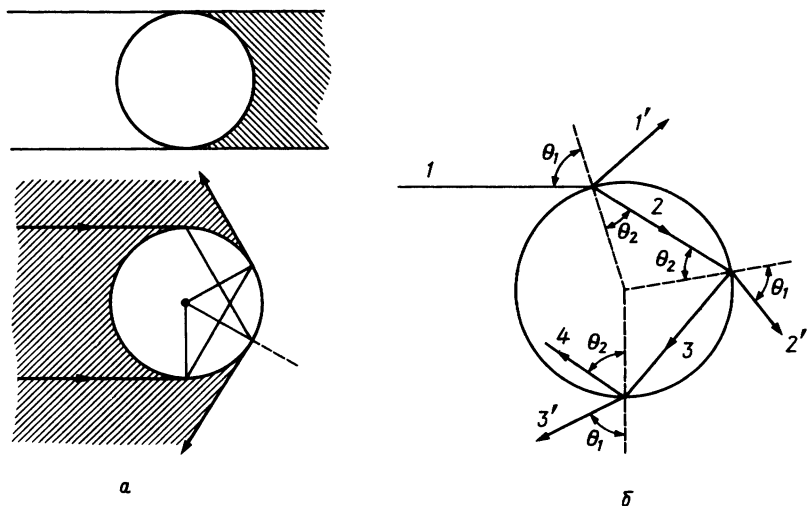


Рис. 6.7. *a* — области тени, соответствующие полям нулевого порядка (вверху) и первого порядка (внизу); *б* — многократное отражение лучей, полученное из дебаевского разложения  $S$ -матрицы кругового цилиндра.

Компонента с индексом  $p$ - и  $q$ -й парциальной волны соответствует волне, проникающей внутрь рассеивателя ( $T_q$ ), претерпевшей  $p$  отражений от внутренней поверхности ( $\rho_q^{-1}$ ) и вышедшей наружу ( $T_q$ ). Если  $\beta$  взять достаточно большим и положить<sup>1)</sup>  $\tilde{n} \approx 1$ , то вкладом от  $\tilde{u}_d^{(p)}$  можно пренебречь. В этом случае выражение для  $\tilde{u}_d$  сведется к выражению для  $u_d^{(0)}$ . На рис. 6.7, *a* показаны заштрихованные области, соответствующие значениям  $p = 0, 1$ .

Ряд Дебая сходится со скоростью, которая зависит от коэффициента затухания парциальной волны при каждом внутреннем отражении. Если среда рассеивающего цилиндра не является абсолютно прозрачной, то возникает дополнительное затухание вследствие поглощения излучения. В частности, в таком важном случае, как дифракция на водном препятствии ( $n = 1,33$ ), более чем 98,5% всей интенсивности идет на последовательную рефракцию трех первых преломленных лучей, соответствующих трем первым членам в дебаевском разложении.

<sup>1)</sup>Рассеиватели, которые имеют показатель преломления, близкий к показателю преломления среды, обычно называют *слабо рассеивающими* или *мягкими*. — Прим. перев.

## 6.5.2. Представление Ватсона — Редже

Вычисление амплитуды рассеянной волны  $\bar{u}_d^{(p)}$ , представляющей  $p$ -й член в дебаевском разложении, сводится к суммированию парциальных волн [см. выражение (6.5.6в)]. Суммирование можно заменить интегрированием, как это было сделано при выводе выражения (4.12.10), только в данном случае коэффициент  $\langle u(a, \phi') e^{-i\nu\phi'} \rangle$  должен быть заменен на  $(1/2)e^{i3\pi\nu/2} S_\nu^{(p)} H_\nu^{(2)}$ , что дает

$$\bar{u}_d^{(p)}(\rho, \phi) = -\frac{i}{4} \oint_C \frac{e^{i\nu(\phi + \pi/2)}}{\sin \nu\pi} S_\nu^{(p)}(\beta) H_\nu^{(2)}(k_0\rho) d\nu. \quad (6.5.7)$$

Учитывая теперь соотношение  $H_\nu^{(2)} = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}$  для соответствующего члена из разложения (6.5.4), мы имеем  $S_\nu^{(p)} = S_\nu^{(p)} \exp[i(1-p)2\pi\nu]$ , так что контур  $C$  [см. выражение (4.12.10)] можно свести к линии, параллельной вещественной оси  $\nu$  и отстоящей от нее на малое расстояние  $\varepsilon > 0$ . Отсюда для поля  $u_d^{(p)}$  получим

$$\bar{u}_d^{(p)}(\rho, \phi) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} e^{i[(1/2)-p]\pi\nu} \frac{\cos[\nu(\phi + p\pi)]}{\sin(\nu\pi)} S_\nu^{(p)}(\beta) H_\nu^{(2)}(k_0\rho) d\nu. \quad (6.5.8)$$

Чтобы применить преобразование Ватсона, нужно найти положения полюсов функций  $S_\nu^{(p)}$ , даваемых выражениями

$$S_\nu^{(0)} = \frac{H_\nu^{(1)}(\beta)}{H_\nu^{(2)}(\beta)} R_\nu, \quad (6.5.9)$$

$$S_\nu^{(p)} = \frac{H_\nu^{(1)}(\beta) H_\nu^{(2)}(\alpha)}{H_\nu^{(2)}(\beta) H_\nu^{(1)}(\alpha)} T_\nu^2 \rho_\nu^{p-1}, \quad p \geq 1.$$

Если известны функции  $R_q$ ,  $T_q^2$  и  $\rho_q$ , то полюсы функции  $S_\nu^{(p)}$  совпадают с корнями уравнения (см. работу Нуссенцвейга [22], указанную в литературе к гл. 4)

$$\ln' H_\nu^{(2)}(\beta) = \tilde{n} \ln' H_\nu^{(1)}(\alpha). \quad (6.5.10)$$

В случае металлической поверхности полюсы функции  $S_\nu^{(p)}$  совпадают с нулями функции  $H_\nu^2(\beta)$  (см. разд. 4.12).

Сразу же заметим, что полюсы функции  $S_\nu^{(p)}$  в комплексной плоскости  $\nu$  одни и те же для всех членов разложения, причем для  $p$ -го члена их порядок равен  $p + 1$ . Полюсы расположены либо вблизи нулей функции  $H_\nu^{(2)}(\beta)$ , либо вблизи нулей  $H_\nu^{(1)}(\alpha)$ . В частности, можно показать (ср. с разд. 4.12), что полюсы первого типа даются выражением [ср. с (4.12.19)]

$$\nu_n \simeq -\beta - e^{-i\pi/3} (\beta/2)^{1/3} x_n - i/(\tilde{n}^2 - 1)^{1/2}, \quad (6.5.11)$$

где  $x_n$  —  $n$ -й нуль функции  $\text{Ai}(-x)$ . Последний член в правой части этого выражения учитывает разницу граничных условий на диэлектрической и металлической поверхностях.

Аналогично, в верхней полуплоскости полюсы второго типа даются выражением

$$\nu'_n \simeq \alpha + e^{i\pi/3}(\alpha/2)^{1/3}x_n + \tilde{\pi}/(\tilde{\pi}^2 - 1)^{1/2}. \quad (6.5.12)$$

С учетом распределения этих полюсов в комплексной плоскости (см. работу Нуссенцвейга [22], указанную в литературе к гл. 4) введем переменные  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta$  (рис. 6.8):

$$\eta_1 = \delta \ln \left| \frac{2\nu}{e\alpha} \right|, \quad \eta_2 = \delta \ln \left| \frac{2\nu}{e\beta} \right|, \quad \eta = \delta \ln \left| \frac{2\nu}{ek_0\rho} \right|, \quad (6.5.13)$$

где  $\delta = \arg(\nu) - (\pi/2)\text{sgn} \arg(\nu)$ . Из выражений (4.12.22) и (4.12.23) можно найти положения нулей  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$  и соответственно получить, что полюса  $\nu_n$  в асимптотике располагаются на кривой  $\eta_2 = \pi/2$ , а полюса  $\nu'_n$  — на кривой  $\eta_1 = -\pi/2$ .

### 6.5.3. Первый член дебаевского разложения

При  $p = 0$  уравнение (6.5.8) сводится к следующему

$$\bar{u}_d^{(0)}(\rho, \phi) = \frac{i}{2} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} e^{i\nu v/2} \frac{\cos \nu \phi}{\sin \nu \pi} \frac{g_\nu(\beta, \alpha, \rho)}{H_\nu^{(2)}(\beta)} d\nu - \frac{i}{2} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} e^{i\nu v/2} \frac{\cos \nu \phi}{\sin \nu \pi} H_\nu^{(1)}(k_0\rho) d\nu, \quad (6.5.14)$$

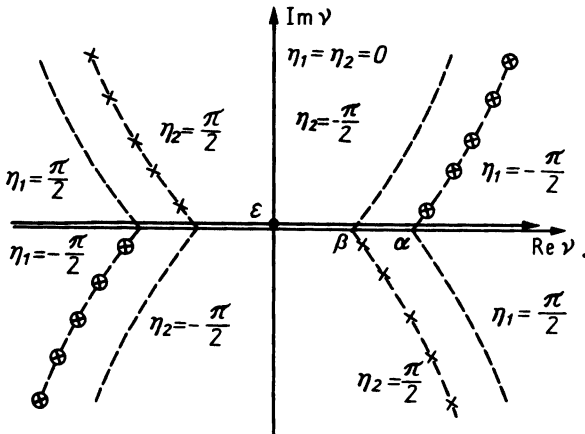


Рис. 6.8. Комплексная плоскость  $\nu$ , на которой показаны переменные  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , определяемые выражениями (6.5.13); крестиками обозначены полюсы  $\nu_n$ , а крестиками в кружках — полюсы  $\nu'_n$ . Контур интегрирования для интеграла из выражения (6.5.14) обозначен жирной линией, параллельной вещественной оси.

где

$$g_\nu(\alpha, \beta, \rho) = H_\nu^{(1)}(k_0 \rho) H_\nu^{(2)}(\beta) + R_\nu(\alpha, \beta) H_\nu^{(2)}(k_0 \rho) H_\nu^{(1)}(\beta). \quad (6.5.15)$$

Поскольку интеграл в (6.5.14) представляет поле  $-U(-z) e^{-ik_0 z}$ , в дальнейшем мы будем его опускать, а  $\bar{u}_d^{(0)}$  заменим на  $\bar{u}^{(0)} \equiv \bar{u}_d^{(0)} + U(-z) e^{-ik_0 z}$ . Кроме того,  $R_\nu \rightarrow 1$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$  во всей комплексной плоскости, за исключением области между  $\eta_2 = \pi/2$  и  $\eta_2 = -\pi/2$ , в которой  $R_\nu \rightarrow 0$  как  $\beta^2(\tilde{n}^2 - 1)/4\nu^2$ . Используя асимптотическое представление (4.12.8) для функций  $H_\nu^{(1,2)}$ , можно установить, что подынтегральное выражение первого интеграла в (6.5.14) в первом квадранте комплексной плоскости равно нулю. Таким образом, путь интегрирования  $(i\varepsilon, \infty + i\varepsilon)$  можно сдвинуть в сторону положительной мнимой оси  $(i\varepsilon, i\infty)$  с охватом полюсов  $\nu'_n$ , что в итоге дает

$$u^{(0)} = \frac{i}{2} \left( \int_{-\infty + i\varepsilon}^{i\varepsilon} + \int_{i\varepsilon}^{i\infty} \right) e^{i(\pi/2)\nu} \frac{\cos \nu \phi}{\sin \nu \pi} \frac{g_\nu}{H_\nu^{(2)}(\beta)} d\nu + \pi \sum_n e^{i(\pi/2)\nu'_n} \frac{\cos \nu'_n \phi}{\sin \nu'_n \pi} r'_n. \quad (6.5.16)$$

Здесь  $r'_n$  — вычеты функции  $g_\nu/H_\nu^{(2)}$  в полюсах  $\nu = \nu'_n$ .

Теперь можно использовать представление

$$\frac{1}{\sin \nu \pi} = -2ie^{i\pi\nu} \sum_{m=0}^{\infty} e^{i2\pi m \nu} \quad (6.5.17)$$

и переписать интегралы в (6.5.16) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_{-\infty + i\varepsilon}^{i\varepsilon} + \int_{i\varepsilon}^{i\infty} \right) e^{i(3/2)\pi\nu + i2\pi m \nu} \cos(\nu\phi) \frac{g_\nu}{H_\nu^{(2)}(\beta)} d\nu. \quad (6.5.18)$$

Вычисление этих интегралов можно еще более упростить, используя то обстоятельство, что подынтегральное выражение во втором квадранте обращается в нуль при  $\nu \rightarrow \infty$  и  $m \geq 1$ . Следовательно, путь интегрирования  $(i\varepsilon, i\infty)$  для всех членов с  $m \geq 1$  можно сдвинуть в положение  $(i\varepsilon, -\infty + i\varepsilon)$  с охватом полюсов  $\nu_m$ . В итоге получим следующее выражение:

$$u^{(0)}(\rho, \phi) = u_g(\rho, \phi) + \pi \sum_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{i((3/2)\pi + 2\pi m)\nu_n} \cos(\nu_n \phi) r_n + \\ + \pi \sum_n \sum_{m=0}^{\infty} e^{i((3/2)\pi + 2\pi m)\nu'_n} \cos(\nu'_n \phi) r'_n, \quad (6.5.19)$$

где  $r_n$  — вычеты функции  $g_\nu/H_\nu^{(2)}$  в полюсах  $\nu_n$ , а  $u_g$  — член ряда (6.5.18) с  $m = 0$ . Можно показать что при  $n > 1$  значения вычетов  $r'_n$  пренебрежимо малы (см. работу Нуссенцвейга [22, Sect. 3D], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги).

Подынтегральная функция в интеграле, представляющем  $u_g$ , стре-

мится к нулю на бесконечности при всех значениях  $\eta > \phi$ , а для  $\phi < \pi/2$  контур интегрирования  $(-\infty + i\epsilon)$  сдвигается к  $\eta = \pi/2$ . Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$u_g(\rho, \phi) = \int_{\Gamma} e^{i(3/2)\pi\nu} \cos(\nu\phi) \frac{R_\nu H_\nu^{(2)}(k_0\rho) H_\nu^{(1)}(\beta)}{H_\nu^{(1)}(\beta)} d\nu, \quad (6.5.20)$$

где  $\Gamma$  — контур интегрирования, охватывающий полюсы  $R_\nu$  и пересекающий дважды вещественную ось, первый раз между точками 0 и  $-\beta$  и второй раз между  $-\beta$  и  $-k_0\rho$ . Подынтегральное выражение в интеграле (6.5.20) в каждом из этих интервалов имеет по одной седловой точке (рис. 6.9), а именно

$$\nu_s^{(1)} = -k_0\rho, \quad \nu_s^{(2)} = -k_0\rho \sin \phi. \quad (6.5.21)$$

Седловые точки  $\nu_s^{(1)}$  и  $\nu_s^{(2)}$  относятся к лучам, падающим на цилиндр с прицельными параметрами  $\rho$  (не путать с индексом  $\rho$ ) и  $\rho \sin \phi$ . В частности, прицельный параметр  $\rho$  относится к тем падающим лучам, которые испытывают геометрическое отражение от цилиндра и проходят через точку  $P$  (рис. 6.10) [например, при  $\rho \rightarrow \infty, \rho = a \cos(\phi/2)$ ], в то время как параметр  $\rho \sin \phi$  соответствует лучам, которые достигают точки  $P$ , не испытав влияния препятствия.

Если контур  $\Gamma$  изменить таким образом, чтобы он проходил через седловые точки, то получим асимптотическую оценку интеграла (6.5.20). Таким образом, в геометрической оптике функцию  $u_g(\rho, \phi)$  нетрудно найти, умножая поле соответствующего луча на френелевский коэффициент отражения.

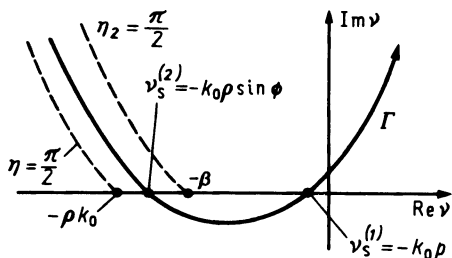


Рис. 6.9. Путь интегрирования  $\Gamma$  для вычисления геометрического вклада в поле, дифрагированное на цилиндре.

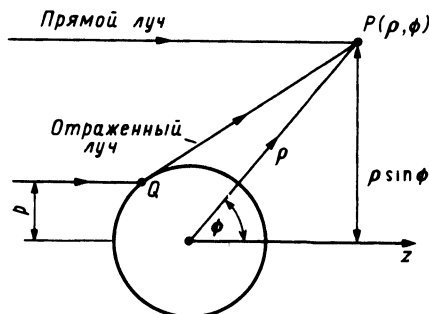


Рис. 6.10. Вклад седловой точки в поле  $u_g^{(0)}$  с точки зрения геометрической оптики;  $\rho$  — прицельный параметр для луча, достигающего точки  $P$  после отражения его от цилиндра в точке  $Q$ .

Если зафиксировать значение угла  $\phi$  и начать уменьшать  $\rho$ , то расстояние между двумя седловыми точками будет уменьшаться до тех пор, пока они не сольются в одну; последнее произойдет в том случае, когда точка  $P$  располагается на границе тени. По мере дальнейшего продвижения в область тени вклад от  $u_g$  стремится к нулю (см. работу Нуссенцвейга [22], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги).

## 6.6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Выражения для амплитуд рассеяния, полученные в предыдущем разделе, позволяют записать полное поле  $u(\rho, \phi)$  вокруг металлического кругового цилиндра, освещаемого  $p$ -волной единичной амплитуды перпендикулярно его оси, в виде суммы парциальных волн:

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m e^{im\phi} \left[ J_m(k_0\rho) - \frac{J_m(\beta)}{H_m^{(2)}(\beta)} H_m^{(2)}(k_0\rho) \right], \quad (6.6.1)$$

где  $\beta \equiv k_0 a$ . Опыт численных расчетов показывает, что минимальное число членов разложения, необходимых для получения хорошего приближения, однозначно связано с величиной параметра  $\beta$ . При  $\beta \gg 1$  многочисленные парциальные волны дают в сумме крайне нерегулярную картину дифракции. При  $\beta \rightarrow \infty$  можно использовать приближение геометрической оптики, которое приводит к картине с темными и светлыми областями, разделенными двумя границами тени. Светлые области образуются там, где перекрываются падающий луч и лучи, отраженные по правилам геометрической оптики. Эти лучи можно взять в качестве главных членов в разложении Луненберга — Клейна для поля с конечным  $k_0$ . Однако поле в темной области в обычном приближении геометрической оптики получить нельзя, поскольку при  $k_0 \rightarrow \infty$  соответствующее выражение стремится к нулю. В этом случае приближенное выражение для поля можно получить, используя преобразование Ватсона, о котором шла речь в предыдущем разделе. Суть этого преобразования заключается в замене парциальных волн из разложения (6.6.1) на волны с комплексными индексами  $\nu_n$ , поскольку в случае металлического тела вкладами вычетов в полюсах  $\nu_n'$  можно пренебречь. Такие волны представляют собой особые моды, которые «ползут» по искривленной поверхности цилиндра, но при этом не проникают в него, отсюда их название — *ползущие* волны. В частности, для  $p$ -волны с единичной амплитудой с помощью формул, приведенных в разд. 4.12 и 6.5, получаем



$$u(\rho, \phi) = \frac{\exp(-ik_0s)}{(2\pi k_0s)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} D_{n,p}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \exp \left\{ i\nu_n \left[ \phi - \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right) + 2\pi m \right] \right\} + \right. \\ \left. + \exp \left\{ -i\nu_n \left[ \phi - \frac{3\pi}{2} - \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right) - 2\pi m \right] \right\} \right), \quad (6.6.2)$$

где  $s = (\rho^2 - a^2)^{1/2}$  — расстояние от точки  $Q_2$  до  $P$  (рис. 6.11 и 6.12). Коэффициенты  $\nu_n$  определяются выражением (4.12.19) [см. также выражение (6.5.11) при  $\tilde{h} \rightarrow \infty$ ] и записываются следующим образом:

$$\nu_n = -\beta - \beta^{1/3} e^{-i\pi/3} \begin{cases} 1,856 & (n=1), \\ 3,245 & (n=2), \\ 4,381 & (n=3), \\ 5,387 & (n=4). \end{cases} \quad (6.6.3)$$

Параметры  $D_{n,p}^2$  играют роль *поверхностных дифракционных коэффициентов* и равны вычетам  $r_n$ , о которых речь шла в предыдущем разделе:

$$D_{n,p}^2 = r_n = (\beta/2)^{1/3} e^{-i\pi/12} / [\text{Ai}'^2(-x_n)]; \quad (6.6.4)$$

здесь  $x_n$  — нули функции Эйри  $\text{Ai}(-x)$ , а  $\text{Ai}'$  — соответствующая производная.

В соответствии с выполненным выше рассмотрением результирующее поле является суммой вкладов лучей, которые возникают в точ-

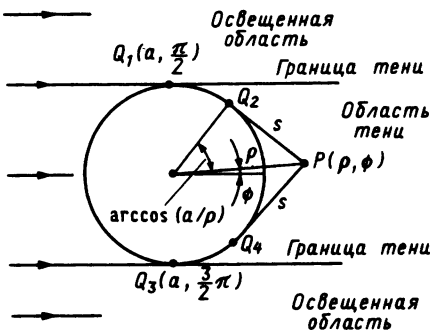


Рис. 6.11. Геометрическое рассмотрение ползущих волн, распространяющихся в области тени металлического цилиндра, освещаемого плоской волной.

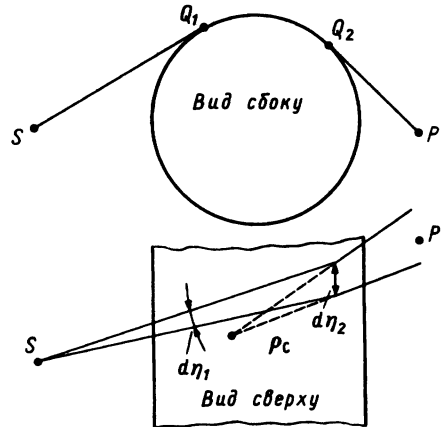


Рис. 6.12. Геометрическое рассмотрение поверхностных волн при дифракции на цилиндре, освещаемом конгруэнтной лучей с началом в точке  $S$ .

ках скользящего падения  $Q_1(\phi = \pi/2)$  и  $Q_3(\phi = 3\pi/2)$ , а затем некоторое время распространяются по поверхности, проходя при этом расстояния  $a[\phi - \pi/2 - \arccos(a/\rho) + 2\pi m]$  и  $a[3\pi/2 - \phi - \arccos(a/\rho) + 2\pi m]$ , где  $m$  — число обходов цилиндра, совершенных лучом с комплексной постоянной распространения  $k_n$ :

$$k_n \equiv - (v_n/a) = k_0 - i\alpha_{n,p}, \quad (6.6.5)$$

где  $\alpha_{n,p} = (1/a)x_n(\beta/2)^{1/3} e^{i\pi/6}$  — комплексный коэффициент ослабления.

## 6.7. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ФЕРМА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ

Следует заметить, что траектории ползущих волн представляют собой наикратчайшие пути, соединяющие источник с точкой наблюдения при условии, что поле данной волны не проникает в цилиндр. Таким образом, используя аналогию с лучами, распространяющимися в трехмерном пространстве, или с лучами, дифрагированными на крае, можно вывести *обобщенный принцип Ферма*. Эти три класса лучей описывают траектории, которые являются стационарными относительно небольших изменений траектории при условии выполнения соответствующих ограничений. Для лучей, дифрагированных на крае, эти ограничения состоят в том, чтобы эти лучи касались края по крайней мере в одной точке, в то время как ползущие волны должны обязательно касаться гладкой поверхности.

Обобщенный принцип Ферма был впервые сформулирован Келлером (см. работу [26], указанную в литературе к гл. 5) при получении асимптотических выражений для лучей, дифрагированных на препятствиях произвольной формы. Ценность этого принципа состоит в том, что он сразу позволяет обобщить формулы, полученные выше для кругового цилиндра, на случай излучения произвольного вида. При этом мы по-прежнему можем считать что поле в темных областях является суммой вкладов ползущих волн, которые на поверхности цилиндра распространяются по кривым, удовлетворяющим принципу Ферма. Следовательно, каждый луч из конгруэнции, падающий по касательной на поверхность цилиндра, должен описывать на ней геодезическую линию, а именно спираль. Ползущая волна на поверхности цилиндра полностью определяется семейством спиральных траекторий, образованных поверхностными волнами, распространяющимися с комплексным показателем преломления, определяемым выражением (6.6.5):

$$k_n = k_0 - id_{n,p} = k_0 - i(x_n/\rho_g)(k_0\rho_g/2)^{1/3} e^{i\pi/6}, \quad (6.7.1)$$

где параметр  $\rho_g$  — радиус кривизны поверхностного луча. Для спиральной траектории  $\rho_g = \text{const}$ ; таким образом, и  $k_n = \text{const}$ .

Данное рассмотрение можно обобщить и на произвольную гладкую поверхность. В этом случае поле представляется в виде суперпозиции бесконечного числа вкладов вида

$$u(P) = \frac{u(Q_1)}{(2\pi k_0)^{1/2}} \left[ \frac{\rho_c}{s(\rho_c + s)} \right]^{1/2} \left( \frac{d\eta_1}{d\eta_2} \right)^{1/2} D_{n,p}(Q_1) D_{n,p}(Q_2) \times \\ \times \exp \left[ -ik_0 s - ik_0 t - \int_0^t \alpha_{n,p} dt' \right]. \quad (6.7.2)$$

Здесь множитель  $[\rho_c/s(\rho_c + s)]^{1/2}$  учитывает расходимость дифрагированных лучей, покидающих поверхность в точке  $Q_2$  и фокусирующихся на расстоянии  $\rho_c$  от  $Q_2$ ; множитель  $d\eta_1/d\eta_2$  представляет собой отношение расстояний между двумя соседними лучами в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ , и, таким образом,  $(d\eta_1/d\eta_2)^{1/2}$  учитывает расходимость поверхностных лучей. В выражении (6.7.2) дифракционный коэффициент  $D_{n,p}^2$  записан в виде произведения двух коэффициентов  $D_{n,p}(Q_1)$  и  $D_{n,p}(Q_2)$ , поскольку радиусы кривизны траекторий (и, следовательно,  $\beta$ ), в точках  $Q_1$  и  $Q_2$  в общем случае являются различными. Наконец,  $s$  — это расстояние от точки  $P$  до точки  $Q_2$ , а  $t$  — длина дуги траектории между точками  $Q_1$  и  $Q_2$ .

В качестве заключительного этапа приведенные выше выражения можно обобщить на случай  $s$ -волны, заменяя дифракционный коэффициент  $D_{n,p}$  на  $D_{n,s}$ , определяемый выражением

$$D_{n,s}^2 = -[(\beta/2)^{1/3} e^{-in/12}] / [x'_n \text{Ai}'(-x'_n)], \quad (6.7.3)$$

где  $x'_n$  — значения нулей функции  $\text{Ai}'(-x)$ . Кроме того, необходимо заменить  $\nu_n$  на величину  $\bar{\nu}_n$ , определяемую следующим образом [ср. с выражением (6.7.3)]:

$$\bar{\nu}_n = -\beta - \beta^{1/2} e^{-in/3} \begin{cases} 0,809 & (n = 1), \\ 2,578 & (n = 2), \\ 3,826 & (n = 3), \\ 4,892 & (n = 4). \end{cases} \quad (6.7.4)$$

Указанные скалярные дифракционные формулы можно записать в виде одного векторного соотношения [6.4]:

$$\mathbf{E}_d(P) = [\rho/s(\rho + s)]^{1/2} (d\eta_1/d\eta_2)^{1/2} e^{-ik_0 s} (\hat{n}_2 \hat{n}_1 F + \hat{b}_2 \hat{b}_1 G) \cdot \mathbf{E}_i(Q_1), \quad (6.7.5)$$

где  $\mathbf{E}_d(P)$  — поле в точке  $P$ , дифрагированное на гладкой поверхности, освещаемой падающей волной  $\mathbf{E}_i$ ;  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{b}}$  — соответственно глав-

ная нормаль и бинормаль к траектории поверхностного луча в точках  $Q_1$  и  $Q_2$ ; величина  $F$  определяется выражением

$$\lambda^{-1/2}F = D_{n,s}(Q_1)D_{n,s}(Q_2)\exp\left(-\int_0^t \alpha_{n,s} dt'\right)\exp\left(-ik_0 t - i\frac{\pi}{12}\right), \quad (6.7.6)$$

а величину  $G$  можно вычислить из приведенного выше соотношения, заменяя индекс  $s$  на  $p$ .

В заключение заметим, что как и в случае дифракции на крае, дифрагированное на гладкой поверхности поле может быть представлено в виде суперпозиции мод, каждая из которых является результатом умножения падающего поля на дифракционную матрицу  $F\hat{n}_2\hat{n}_1 + G\hat{b}_2\hat{b}_1$ .

Геометрическая теория дифракции посвящена изучению дифракции лучей на предметах любого сорта (рис. 6.13). Название данной теории предложил Дж. Келлер, который заложил ее основы. В настоящее время геометрическая теория дифракции развилась в довольно сложный аппарат, который включает в себя систематическое использование дифракционных матриц и однородных представлений для специальных областей (например, на границе тени и в каустике), рассмотренных в предыдущей главе. В некотором смысле геометрическую те-

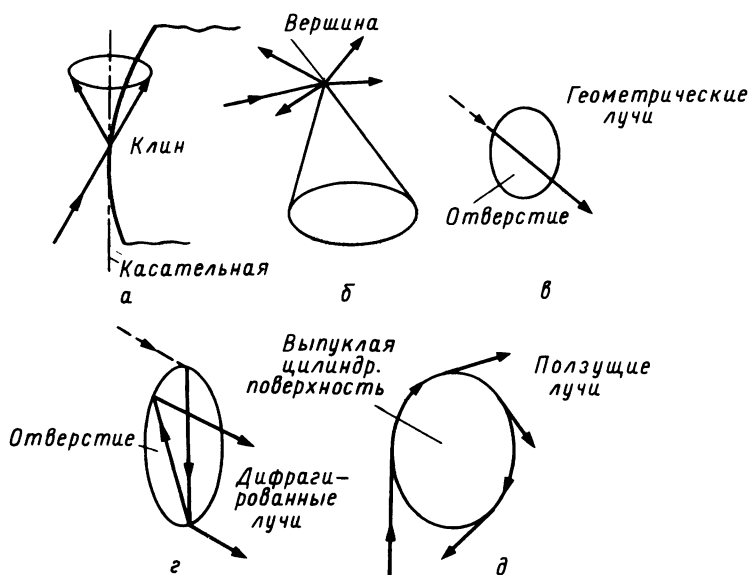


Рис. 6.13. Лучи, дифрагированные на различных препятствиях. Заметьте, что на рис. г имеются дважды дифрагированные лучи, а на рис. в — прошедшие лучи.

орию дифракции можно рассматривать как электромагнитный аналог фейнмановских диаграмм, применяемых в квантовой теории поля. Действительно, они имеют общее свойство, заключающееся в том, что устанавливаемые ими правила позволяют представить сложные конфигурации поля в виде суперпозиции стандартных полей, которые в случае геометрической теории дифракции описываются дифрагированными лучами, а в фейнмановских диаграммах — графиками. Заинтересованный читатель может найти сведения о некоторых применениях и разработках геометрической теории дифракции в книге под редакцией Хансена [28], указанной в литературе к гл. 5 настоящей книги.

## 6.8. РАССЕЯНИЕ СВЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ

При рассмотрении рассеяния света диэлектрическими телами можно использовать два различных подхода. Один из них основывается на решении поверхностного, а другой — объемного интегрального уравнения [8]. Для того чтобы получить интегральное представление поля снаружи и внутри рассеивающего тела, рассмотрим сначала интегральное представление поля в виде (4.3.1) в однородной рассеивающей среде как функцию поля на поверхности. Затем, учитывая, что на диэлектрической поверхности нормальные составляющие вектора  $\mathbf{D}$  и тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  непрерывны, произведем необходимые преобразования уравнений (4.3.2) и (4.3.3), в результате чего получим следующие выражения для полей на *внешней* стороне поверхности  $S$  рассеивающего тела:

$$\begin{aligned} \hat{n}_0 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{n}_0 \times \iint_S \left\{ i\omega\mu(\hat{n}'_0 \times \mathbf{H})(G_1 + G_2) - (\hat{n}'_0 \times \mathbf{E}) \times \nabla'(G_1 + G_2) - \right. \\ \left. - (\hat{n}'_0 \cdot \mathbf{E}) \nabla' \left( G_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} G_2 \right) \right\} dS'_0, \end{aligned} \quad (6.8.1a)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_0 \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = -\hat{n}_0 \times \iint_S \left\{ i\omega\varepsilon(\hat{n}'_0 \times \mathbf{E}) \left( G_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} G_2 \right) + (\hat{n}'_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla'(G_1 + G_2) + \right. \\ \left. + \hat{n}'_0 \cdot \mathbf{H} \nabla(G_1 + G_2) \right\} dS', \end{aligned} \quad (6.8.16)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к внутренней и внешней областям рассеивающего тела:  $G_{1,2} = G(n_{1,2}, \mathbf{r})$ ;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — поля на внеш-

ней части поверхности  $S$ ,  $\hat{n}_0$  — внешняя нормаль. Уравнения (6.8.1), если в них рассматривать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  как неизвестные функции, представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма, у которых неоднородный член выражается через поле  $\mathbf{E}_i(r)$  или  $\mathbf{H}_i(r)$  падающего излучения. Эти уравнения, как правило, имеют единственное решение, за исключением особых значений  $k_0$  (в общем случае комплексных), для которых при нулевом падающем поле уравнения (6.8.1) допускают ненулевые решения. Эти особые значения  $k_0$  соответствуют резонансным частотам диэлектрического тела, примером которых служат рассматриваемые в разд. 6.13 резонансы диэлектрической сферы. Разбивая поверхность рассматриваемого тела на большое число достаточно малых участков, таких, что на этих участках значения всех функций, входящих в подынтегральное выражение, являются практически постоянными, систему уравнений (6.8.1) можно записать в матричном виде. Данная процедура лежит в основе *метода моментов* (см. работу Харингтона [9]). Предложенный Харингтоном метод моментов был в значительной степени дополнен и расширен другими авторами. Не будем останавливаться на всех вариантах данного метода, упомянем лишь *метод сингулярных разложений*, позволяющий сформулировать временную задачу рассеяния [10].

Другой метод решения рассматриваемой задачи состоит в применении следующего интегрального представления поля внутри рассеивающего тела:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \iiint_V [\omega^2 \mu \varepsilon_1 G_1 \mathbf{E} + \nabla' \cdot \mathbf{E} \nabla' G_1] dV, \quad (6.8.2)$$

которое нетрудно получить, если в уравнениях Максвелла в качестве источника рассматривать величину  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\mathbf{E}$ .

## 6.9. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Если длина волны падающего на металлическое препятствие излучения короче характерного радиуса кривизны его поверхности, то последняя в некотором приближении может быть разделена на освещаемую ( $S_{\text{осв}}$ ) и теньевую ( $S_{\text{тен}}$ ) области. Исходя из точного решения интегрального уравнения для возбуждаемых поверхностных токов, Фок (см. работу [3], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги) оценил ширину переходного участка между этими двумя областями и на-

шел, что она составляет величину порядка  $[2/(k\rho_g)]^{1/3}\rho_g$ , где  $\rho_g$  — локальный радиус кривизны поверхности.

Сделанные выше допущения позволяют при вычислении дифрагированного поля использовать так называемое приближение *физической оптики*. Это приближение состоит из двух последовательных шагов. На первом шаге предполагается, что в каждой точке освещаемой области  $S_{\text{осв}}$  отраженное поле вычисляется так же, как и в случае падения плоской волны по касательной к бесконечной плоскости; при этом поле на теневой стороне поверхности считается равным нулю. Таким образом, принимается, что  $\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_i = 2\hat{\mathbf{n}}_0(\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{E}_i)$  и  $\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_i = -2\hat{\mathbf{n}}_0 \times (\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}_i)$  в области  $S_{\text{осв}}$ , где  $\hat{\mathbf{n}}_0$  — внутренняя нормаль к поверхности  $S$ . На втором шаге, рассеянное поле получается интегрированием на поверхности  $S_{\text{осв}}$ .

Выполнив эти операции и воспользовавшись соотношением (4.3.3), нетрудно получить следующее выражение для рассеянного поля:

$$\mathbf{H}_d(\mathbf{r}) = \iint_{S_{\text{осв}}} [(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_d) \times \hat{\mathbf{n}}_0] \times \nabla' G dS'. \quad (6.9.1)$$

В дальней зоне  $\nabla' G \cong ikG\hat{\mathbf{n}}$ , где  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ , и мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(\mathbf{r}) &\cong 2ik \iint_{S_{\text{осв}}} (\mathbf{H}_i \times \hat{\mathbf{n}}_0) \times \hat{\mathbf{n}}_0 G dS' \cong \\ &\cong 2ikG(r)\hat{\mathbf{n}} \times \iint_{S_{\text{осв}}} \hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}_i e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dS' \cong \\ &\cong \frac{e^{-ikr}}{\zeta r} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}'_d(\hat{\mathbf{n}}). \end{aligned} \quad (6.9.2)$$

При  $kr \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{H}_d \cong \zeta^{-1}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_d$  и из соотношения (6.9.2) получаем

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) \cong (e^{-ikr}/r)\mathbf{E}'_d(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.9.3)$$

Если падающее поле представляет собой плоскую волну,  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 e^{-k\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{r}'}$ , то выражение для  $\mathbf{E}'_d(\hat{\mathbf{n}})$  сводится к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_d(\hat{\mathbf{n}}) &= -\frac{i}{\lambda} \zeta \mathbf{H}_0 \times \iint_{S_{\text{осв}}} \hat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{r}') e^{ik(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \mathbf{r}'} dS' = \\ &= \frac{i}{\lambda} \iint_{S_{\text{осв}}} e^{ik(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \mathbf{r}'} (\hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{n}}_0 - \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \cdot \mathbf{E}_0 dS' \equiv \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (6.9.4)$$

где  $\mathbf{S}$  — матрица рассеяния, которую мы рассмотрим в разд. 6.11. В соответствии с последним выражением вектор  $\mathbf{E}'_d$  пропорционален фурье-образу вектора  $\hat{\mathbf{n}}_0(r')$ , причем фурье-преобразование вычисляется по освещаемой области металлического препятствия. Это фурье-преобразование можно вычислить асимптотически, используя метод стационарной фазы, рассматриваемый в гл. 5. Нетрудно показать, что стационарные точки, если они существуют, удовлетворяют условию  $\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot (\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}_i) = 0$ ; иными словами, они совпадают с точками отражения падающих лучей, рассеянных поверхностью в направлении  $\hat{\mathbf{n}}$ . Как уже отмечалось, члены асимптотического разложения для каждой стационарной точки совпадают с соответствующими членами разложения Луненберга — Клейна. Поэтому мы можем опустить здесь детальное рассмотрение вкладов в рассеяние от каждой точки, а читатель может обратиться к соответствующим методам, иллюстрируемым в гл. 2. К сожалению, в рамках геометрической оптики не удается определить вклад в рассеяние от границы области интегрирования  $S_{\text{осв}}$ . Для того чтобы найти дифрагированные поля от периферии освещаемой области  $S_{\text{осв}}$ , необходимо непосредственно вычислить дифракционный интеграл. С целью упрощения расчетов главных членов в выражениях для дифрагированных полей можно использовать геометрическую теорию дифракции.

Интегральное представление векторной величины  $\mathbf{E}'_d$  значительно упрощается, если рассматривать его в направлении вперед. В частности, при  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_i = \hat{\mathbf{z}}$  интегральное уравнение (6.9.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_d(\mathbf{z}) = & -i \frac{\xi}{\lambda} \mathbf{H}_0 \times \iint_{S_{\text{осв}}} \mathbf{n}_0 dS = -i \frac{\xi}{\lambda} \mathbf{H}_0 \times \\ & \times (\hat{\mathbf{x}} \iint_{S_{\text{осв}}} dS_x + \hat{\mathbf{y}} \iint_{S_{\text{осв}}} dS_y + \hat{\mathbf{z}} \iint_{S_{\text{осв}}} dS_z), \end{aligned} \quad (6.9.5)$$

где  $dS_x$ ,  $dS_y$  и  $dS_z$  — проекции ориентированной площадки  $dS$  с нормалью  $\hat{\mathbf{n}}_0$  на координатные плоскости  $yz$ ,  $xz$  и  $xy$ . Для простых поверхностей нетрудно показать, что  $\iint_{S_{\text{осв}}} dS_x = \iint_{S_{\text{осв}}} dS_y = 0$ . Отсюда находим, что  $\mathbf{E}'_d(\hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_0 S_{\text{осв}, z}$ . Иными словами, величина  $\mathbf{E}'_d$  пропорциональна произведению падающего электрического поля и проекции освещаемой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению падающей волны.

Если направления векторов  $\hat{\mathbf{n}}$  и  $\hat{\mathbf{n}}_i$  не совпадают, но близки друг к другу, то в качестве вектора, перпендикулярного вектору  $\mathbf{n} - \mathbf{n}_i$ , можно взять вектор  $\mathbf{n} - \mathbf{n}_i$ , и тогда соотношение (6.9.4) принимает следу-



ющий вид:

$$E'_d(\hat{n}) = -i \frac{\zeta}{\lambda} (\mathbf{H}_0 \times \hat{n}_i) \iint_{S_{\text{осв}}} dx' dy' \exp[ik\mathbf{n}_\perp \cdot (x'\hat{x} + y'\hat{y})], \quad (6.9.6)$$

где  $x'\hat{x} + y'\hat{y} = \mathbf{r}' - (\mathbf{r}' \cdot \hat{n}_i)\hat{n}_i$ . Интеграл в этом выражении представляет собой фурье-образ отверстия, расположенного в плоскости  $xu$ , полученного проецированием вдоль  $\hat{n}_i$  освещаемой части препятствия. С физической точки зрения это означает, что рассеяние вперед в некотором приближении эквивалентно дифракции на отверстии, контуры которого определяются проекцией препятствия на плоскость, перпендикулярную направлению падающей волны.

*Пример. Дифракция на сфере.* Рассмотрим сферу радиусом  $a$ , центр которой расположен в точке  $O$ . Пусть эта сфера освещается плоской волной, поляризованной вдоль оси  $y$  и распространяющейся вдоль оси  $z$ . В этом случае амплитуда  $E'_d$  рассеянного поля при  $\hat{n} \approx \hat{n}_i$  дается выражением

$$E'_d = -\frac{i}{\lambda} E_0 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \exp(ik|\mathbf{n}_\perp|\rho \cos \phi) = -ika \frac{J_1(ka|\mathbf{n}_\perp|)}{ka|\mathbf{n}_\perp|} E_0. \quad (6.9.7)$$

При рассеянии вперед данное выражение совпадает с выражением для поля рассеяния на диске, радиус которого равен радиусу рассматриваемой сферы.

## 6.10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТКАХ

В истории физики дифракционные решетки выступают как одни из самых незаменимых инструментов. До 1891 г., когда Майкельсон изобрел интерферометр, названный его именем, дифракционные решетки были единственным инструментом, с помощью которого измерялись характеристические длины волн атомных спектров.

Дифракционные решетки, как известно, были изобретены американским астрономом Дэвидом Риттенхаузом примерно в 1785 г. и несколькими годами позже независимо Йозефом фон Фраунгофером, который опубликовал свои оригинальные исследования лишь в 1819 г. В ранних конструкциях дифракционная решетка представляла собой ряд очень тонких проволочек или нитей, навитых на два параллельных винта, которые выполняли роль распорок. Эта конструкция представляла собой как бы многократно повторенную в пространстве щель, на

которой модуляция падающего волнового фронта осуществляется при помощи чередующихся прозрачных и непрозрачных участков.

Более распространенными являются решетки, выполненные путем нанесения алмазным резцом тончайших канавок на поверхность стекла для пропускающих решеток или на зеркальные металлические поверхности для отражательных решеток. В недалеком прошлом отражательные решетки изготовлялись на *зеркальном металле*, представляющем собой очень твердый сплав меди и олова. В настоящее время их изготавливают путем напыления слоя алюминия, который лучше отражает в УФ-области.

Большой прогресс в производстве дифракционных решеток произошел после изобретения Роуландом в 1882 г. специальной гравировальной машины, которая наносила периодические штрихи с ошибкой, не превышающей одной трехсоттысячной доли дюйма. В настоящее время после работ Стронга и Бэбкока, а впоследствии Харрисона [11] и Струка [12] из Массачусетского технологического института (МТИ) в технологии производства дифракционных решеток достигнуты значительные успехи. Так, например, Харрисон в МТИ изготавливал решетки длиной до 26 см и полезной площадью до 360 см<sup>2</sup>.

Производство гравированных решеток достаточно сложно и требует значительных затрат времени. В действительности большинство решеток представляет собой *реплики*, отлитые с матрицы оригинальных гравированных решеток (шаблонов). При освещении интенсивным светом реплики и шаблоны ведут себя по-разному. Например, в резонаторах мощных лазеров должны использоваться шаблоны, поскольку они могут выдерживать огромные интенсивности излучения. В поисках дальнейшей информации об истории и производстве дифракционных решеток мы рекомендуем читателю обратиться к книге Струка [12].

Из-за трудностей, связанных с механическим изготовлением решеток, рассматривалось много других методов их изготовления. В 1927 г. Майкельсон впервые предложил использовать в производстве дифракционных решеток фотографический метод. В 1962 г. Денисюк [13] рассмотрел возможность получения дифракционных решеток с помощью записи интерференционных полос. Современная технология позволяет получать периодическое гофрирование с помощью так называемого *голографического метода*. Рельеф решетки в этом методе создается путем интерферометрической экспозиции и обработки фоторезиста. Затем с помощью ионной бомбардировки или химического травления решетка переносится на подложку. Первые голографические решетки для спектроскопических исследований были изготовлены в 1967 г. Шмалем и Рудольфом [14] в

оптической лаборатории Гёттингенской обсерватории и в 1968 г. Лабейри и Фламаном [15] в Париже. С тех пор созданы решетки для видимого, УФ и мягкого рентгеновского диапазонов. В настоящее время существует возможность изготовления решеток шириной более чем 600 мм с плотностью линий более чем 10 000 штрихов на миллиметр. Эти решетки практически не имеют «духов» и характеризуются минимальным рассеянием падающего света. Голографические решетки могут быть изготовлены на искривленной поверхности. Кроме того, в принципе можно создать решетки, период которых будет изменяться по поверхности и таким образом обеспечивать возможность фокусировки дифрагированных пучков. Отражательная способность голографических решеток меньше, чем у гравированной, и сильно зависит от поляризации падающей волны.

Прежде чем завершить данное введение, следует заметить, что в природе существуют некоторые системы, которые, с одной стороны, обладают достаточными размерами, а с другой, — высокой степенью упорядочения, так что их можно рассматривать как дифракционные решетки оптического диапазона. Например, свойствами дифракционных решеток обладают жидкие кристаллы, молекулы которых расположены с достаточной регулярностью. В жидких кристаллах расстояние между соседними молекулами зависит от температуры, так что спектр дифрагированного на этих кристаллах оптического поля также изменяется с температурой, и, следовательно, жидкие кристаллы можно использовать как температурные датчики. Превосходной дифракционной решеткой является опал. Опал состоит из двуокиси кремния, в которую вкраплены маленькие водяные пузырьки. Эти пузырьки образуют плотноупакованную трехмерную решетку с расстоянием между штрихами около 0,25 мкм. Показатель преломления прозрачного вещества матрицы, которая окружает водяные пузырьки, немного отличается от показателя преломления вещества пузырьков. Именно трехмерная дифракционная решетка опала, впервые разрешенная в 1964 г. с помощью электронного микроскопа, делает этот драгоценный камень окрашенным при освещении его белым светом, причем цвет опала меняется как при изменении угла зрения, так и при повороте самого камня.

#### 6.10.1. Применения дифракционных решеток

При освещении отражательной (или пропускающей) дифракционной решетки плоской волной с известной длиной волны в пространстве возникает несколько лучей, которые обозначаются целыми числами

$m$  ( $0, \pm 1, \pm 2\dots$ ) и определяют *интерференционный порядок*. Если через  $\theta$  обозначить угол падения, а через  $d$  — период решетки, то, как мы покажем ниже,  $m$ -му отраженному (прошедшему) лучу будет соответствовать угол  $\theta_m$ , который удовлетворяет соотношению

$$\sin \theta_m - \sin \theta = m(\lambda/d). \quad (6.10.1)$$

Это соотношение известно как формула дифракционной решетки.

При  $m = 0$  мы имеем  $\theta = \theta_0$ ; иными словами, нулевой порядок соответствует зеркальному отражению, и решетка выступает в роли обычного зеркала. Если  $m$  достаточно велико, то соотношению (6.10.1) удовлетворяет комплексное значение угла  $\theta_m = i\theta_m'' + \text{sgn}(m)\pi/2$ . Это означает, что отраженные решеткой лучи представляют собой затухающую волну. В случае когда луч падает практически параллельно плоскости решетки ( $\theta = \pi/2$ ), дифрагированные лучи в зависимости от знака  $m$  состоят из лучей, отраженных назад, и преломленных лучей.

В диэлектрическом волноводе простым способом вывода части мощности волноводной моды является гофрирование поверхности. В этом случае мода действует как луч, падающий под скользким углом к рифленой поверхности, который в результате дифракции частично рассеивается в окружающее пространство. Гофрирование используется для селективного ввода и вывода в волновод мод соответствующей пространственной структуры. На основе гофрированных поверхностей изготавливаются узкополосные фильтры, детекторы света и фазочувствительные элементы. Принципы работы этих приборов рассмотрены в книге [16]. Кроме того, гофрирование применяется для брэгговских отражателей, используемых в полупроводниковых лазерах.

Основное свое применение решетки нашли в спектроскопии, где они заменили дисперсионные призмы, поскольку по сравнению с призмами имеют значительно более высокую разрешающую способность. При замене призмы решеткой в спектрометре можно добиться десятикратного увеличения светового потока, так как в спектрометре с решеткой ширина входной щели может быть значительно увеличена по сравнению с призмным спектрометром, имеющим такое же разрешение. Кроме того, решетка как диспергирующий элемент может обладать большей площадью, что еще более увеличивает ее разрешающую способность. Однако по сравнению с призмными спектрометрами спектрометры с дифракционными решетками имеют один недостаток, который состоит в необходимости устранения нежелательных порядков интерференции.

В спектрометрах в основном применяются решетки отражательного типа, когда источник излучения и точка наблюдения лежат по одну сторону от плоскости решетки. Штрихи решетки могут иметь различную форму. Однако обычно им придают пилообразный профиль с оптически гладкими сторонами. Такой профиль решетки, предложенный Вудом, позволяет увеличивать интенсивность отражения в определенном порядке и тем самым улучшать эффективность спектрометра.

Для характеристики дифракционной решетки широко используют понятие *эффективности*, которую определяют как отношение потока излучения в каком-либо порядке к падающему потоку монохроматического излучения. Эффективность зависит от профиля решетки и от плотности штрихов. На рис. 6.14 показана спектральная зависимость эффективности типичной дифракционной решетки с плотностью 1200 штрихов на миллиметр и углом блеска  $\alpha = 17^\circ 27'$  для р- и s-волн, причем у р-волны вектор поляризации направлен параллельно штрихам решетки, а у s-волны — перпендикулярно им.

Решетки, используемые в монохроматорах, характеризуются постоянным значением угла между падающим и отраженным лучами (рис. 6.15). В этом случае  $\theta + \theta_m = \alpha$  и соотношение (6.10.1) принимает вид

$$\sin[\theta - (1/2)\alpha] = -[(m\lambda)/(2d)][1/\cos(\alpha/2)]. \quad (6.10.2)$$

В частности, когда угол отражения  $\alpha$  равен нулю, говорят, что решетка работает в *схеме Литтроу* (рис. 6.16). В соответствии с соотношением (6.10.2) длина волны излучения, прошедшего через выходную щель монохроматора, изменяется пропорционально синусу угла поворота решетки  $\theta$ . Для того чтобы получить линейную развертку во времени, необходимо использовать синусный механизм поворота решетки.

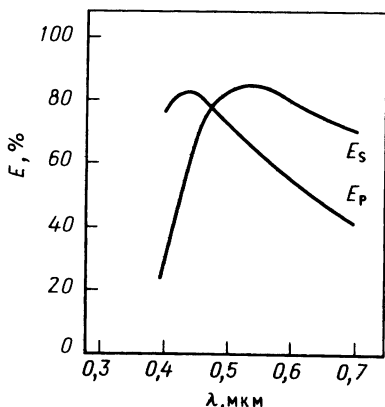


Рис. 6.14. Типичная кривая зависимости эффективности  $E$  от  $\lambda$  для решетки с углом блеска  $\alpha = 17^\circ 27'$  и количеством штрихов 1200 на миллиметр (из каталога фирмы Jobin — Yvon).

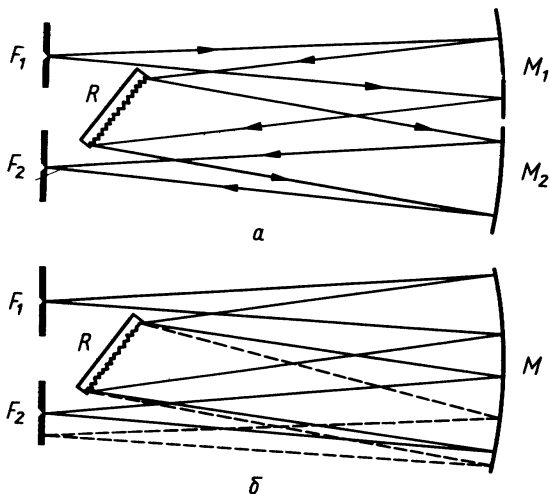


Рис. 6.15. Схемы Черны — Тернера (а) и Эберта — Фасти (б), используемые в сканирующих спектрометрах. Спектральный состав излучения на входе спектрометра анализируется путем наблюдения интенсивности на выходной щели с помощью ФЭУ в зависимости от угла поворота плоскости решетки. Основной особенностью данных схем является то, что угол  $\alpha$  между падающим и дифрагированным на решетке лучами сохраняется постоянным.

С помощью решетки можно в принципе исследовать любой спектральный диапазон. Действительно, соотношение (6.10.2) может удовлетворяться при любом значении  $\lambda/d$ , если имеет место соответствующее сочетание угла падения  $\theta$  и рабочего порядка  $m$  решетки. Однако общим правилом является то, что интенсивность дифрагированно-

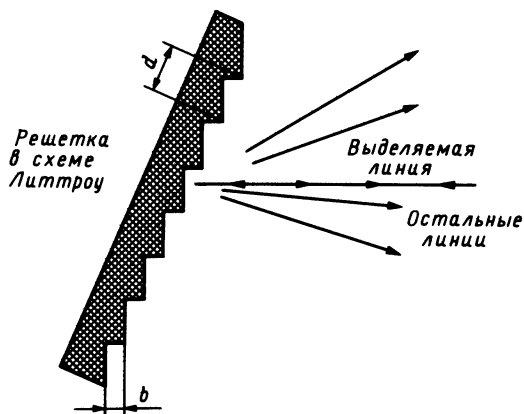


Рис. 6.16. Схематическое представление решетки в схеме Литтроу.

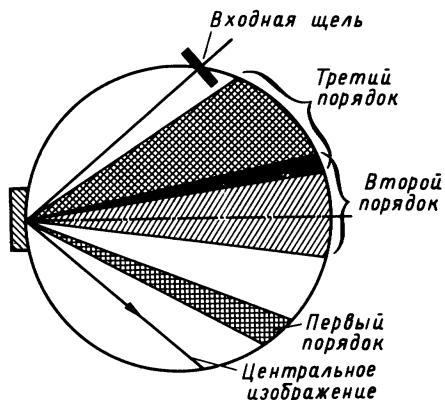


Рис. 6.17. Вогнутая решетка; показан круг Роуланда. На входную щель подается пучок с исследуемым спектром. Угловые секторы соответствуют различным порядкам дифракции. Благодаря фокусирующим свойствам решетки излучение, соответствующее различным участкам спектра, собирается в различных точках окружности Роуланда.

го пучка сильно уменьшается с увеличением порядка  $m$ . Кроме того, эффективность решетки в данном порядке дифракции велика только в некотором небольшом интервале с центром на длине волны  $\lambda/[2d \cos(\alpha/2)]$  (см. рис. 6.14). Если увеличить порядок  $m$ , то решетку можно использовать для длин волн  $\lambda/m$ . С точки зрения электромагнитной теории решетка будет иметь ту же эффективность, однако в этом случае необходимо еще учитывать уменьшение коэффициента отражения материала решетки при изменении длины волны.

В УФ-диапазоне используются в основном вогнутые решетки [17]. Основной принцип здесь следующий — изображение источника, получающееся в результате дифракции излучения на вогнутой решетке, должно фокусироваться в точку окружности, которая является границей *круга Роуланда*. Диаметр этой окружности равен радиусу кривизны данной решетки, так что поверхность решетки касается круга Роуланда. Штрихи решетки расположены перпендикулярно плоскости круга, а входная щель располагается на границе круга Роуланда и параллельна штрихам решетки. На рис. 6.17 показан оптический путь лучей в спектрографе. Существуют два основных типа УФ-спектрометров; спектрометр с нормальным падением для длин волн 300—2000 Å и *спектрометр со скольльзящим падением* для длин волн короче 300 Å. Если угол падения меньше примерно  $10^\circ$ , то считается, что излучение падает нормально на решетку. Для разложения в спектр излучения с длиной волны короче 300 Å используется схема со скольльзящим падением, поскольку в этом случае уменьшение коэффициента отражения материала решетки компенсируется общим возрастанием отражения при скольльзящих углах падения. Различные типы профилей решеток показаны на рис. 6.18.

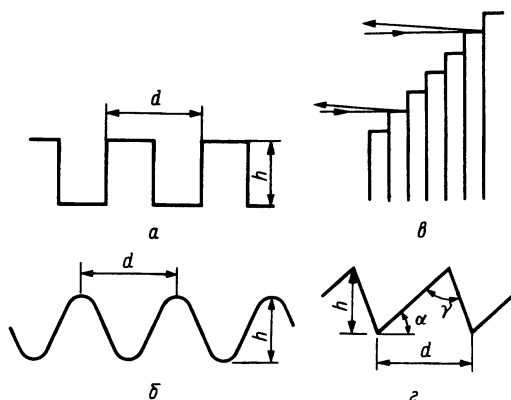


Рис. 6.18. Профили штрихов решетки прямоугольной (а), синусоидальной (б), в форме эшелона (в) и эшелетта (г). Угол раствора кромки штриха на рис. г составляет  $90^\circ$ .

### 6.10.2. Поле, дифрагированное на решетке

Рассмотрим периодическую цилиндрическую поверхность (дифракционную решетку), задаваемую функцией  $z = f(x)$ , образующие которой параллельны оси  $y$ . Функция  $f(x)$  является периодической с периодом  $d$ , т.е.  $f(x + d) = f(x)$ , и характеризуется максимальным и минимальным значениями  $f_{\text{макс}}$  и  $f_{\text{мин}}$ . Представим себе, что функция  $f(x)$  описывает границу раздела двух сред 1 и 2 с различными показателями преломления  $n_1[z > f(x)]$  и  $n_2[z < f(x)]$ . Предположим, что нормаль  $\hat{z}$  к решетке направлена в ту среду, откуда приходит падающее излучение. Заметим, что данное направление противоположно тому, которое было принято выше при рассмотрении многослойных структур. Тем не менее именно такой выбор оказывается наиболее удобным, поскольку далее речь пойдет только об отражательных решетках, имеющих наибольшее распространение. Среда 2 характеризуется комплексным показателем преломления  $\tilde{n} = n - ik$ , который для идеально проводящих металлов становится чисто мнимой величиной. Если влиянием конечной проводимости материала решетки на длинах волн больше 4 мкм можно пренебречь, то при длинах волн короче 1 мкм это влияние оказывается существенным, причем область 1—4 мкм считается переходной. В УФ-диапазоне (0,1—0,2 мкм) вместо малоэффективного алюминиевого используются диэлектрические покрытия. Кроме того, решетки с диэлектрическим покрытием как спектральные селекторы используются в лазерах, на красителях для увеличения их КПД. Предположим, что из среды 1 на решетку под углом  $\theta$  падает плоская монохроматическая волна. Вектор напряженности электриче-



ского поля в такой волне может быть направлен как вдоль (р-волна), так и поперек (s-волна) штрихов решетки (оси  $y$ ).

Пусть  $u_i(\mathbf{r}) = \exp(-ik_i \cdot \mathbf{r})$  — произвольная скалярная составляющая падающего пучка с единичной амплитудой, а  $u_d(\mathbf{r})$  — соответствующая компонента дифрагированного поля. Если сместить начало координат вдоль оси  $x$  на величину  $d$  (период решетки), то в новой системе координат падающий и дифрагированный лучи запишутся как

$$u_{i(\text{нов})}(x, y, z) = u_{i\text{стар}}(x + d, y, z) = u_{i\text{стар}}(x, y, z) \exp(-ik_{ix}d), \quad (6.10.3a)$$

$$u_{d(\text{нов})}(x, y, z) = u_{d\text{стар}}(x + d, y, z). \quad (6.10.3b)$$

Здесь индексы «нов» и «стар» относятся к выражениям для поля соответственно в новой и старой системе координат. Поскольку в новой системе координат профиль решетки остается таким же [ $f_{(\text{нов})}(x) = f_{\text{стар}}(x + d) = f_{\text{стар}}(x)$ ], падающие поля в новой и старой системе координат будут различаться фазовым множителем  $\exp(-ik_{ix}d)$ . Таким образом,

$$u_{d(\text{нов})}(x, y, z) = u_{d\text{стар}}(x, y, z) \exp(-ik_{ix}d). \quad (6.10.3в)$$

Сравнивая выражения (6.10.3б) и (6.10.3в), получаем

$$u_d(x + d, y, z) \exp[ik_{ix}(d + x)] = u_d(x, y, z) \exp(ik_{ix}x), \quad (6.10.4)$$

откуда следует, что  $u_d \exp(ik_{ix}x)$  является периодической функцией координаты  $x$  с периодом  $d$ .

Прежде чем перейти к фурье-разложению поля  $u_d$ , остановимся на вопросе о граничных условиях на поверхности решетки. По аналогии с плоской границей раздела между двумя поверхностями (см. разд. 3.6) положим  $u_d = u - u_1$  в среде 1 и  $u_d = u$  в среде 2. Далее, если предположить, что плоскость падения перпендикулярна решетке (т.е.  $k_{iy} = 0$ ) — условие, которое имеет место для решеток, используемых в монохроматорах, то мы можем выбрать  $u = E_y$  для р-волн и  $u = H_y$  для s-волн.

Приняв указанное выше соглашение, нетрудно доказать, что непрерывность тангенциальных составляющих поля дает следующие граничные условия для  $u$ :

$$u_i + u_{d1} = u_{d2}, \quad \text{р- и s-волны,}$$

$$-i(k_{ix}f' - k_{iz})u_i + \frac{\partial u_{d1}}{\partial x} f' - \frac{\partial u_{d1}}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\partial u_{d2}}{\partial x} f' - \frac{\partial u_{d2}}{\partial z}, & \text{р-волна,} \\ \left( \frac{\partial u_{d2}}{\partial x} f' - \frac{\partial u_{d2}}{\partial z} \right) \frac{n_2^2}{n_1^2}, & \text{s-волна.} \end{cases} \quad (6.10.5)$$

В этих выражениях производные  $f' = df/dx$  берутся в точках поверхности решетки  $\Gamma = [x, y, f(x)]$ . В частности, если среда 2 представляет собой идеальный проводник, то записанные выше условия принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} u_i + u_{d1} &= 0, & \text{p-волна,} \\ (\partial u_{d1}/\partial x)f' - \partial u_{d1}/\partial z &= i(k_{ix}f' - k_{iz})u_i, & \text{s-волна.} \end{aligned} \quad (6.10.6)$$

Вернемся к рассмотрению функции  $u_d \exp(ik_{ix}x)$ , учитывая, что  $u_i \exp(ik_{ix}x)$  и, следовательно,  $u \exp(ik_{ix}x)$  являются периодическими функциями координаты  $x$ . Если проделать для оси  $y$  то же, что для оси  $x$ , то нетрудно показать, что функция  $u \exp(ik_{ix}x + ik_{iy}y)$  не зависит от  $y$ . Здесь можно заметить, что если функция  $u$  представляет собой p-волну, то результирующее поле непрерывно вместе со своими производными, взятыми по поверхности решетки, откуда следует, что поле  $u$  можно разложить в ряд Фурье по координате  $x$ :

$$u(x, y, z) = \exp(-ik_{ix}x - ik_{iy}y) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi mx) V_m(z), \quad (6.10.7)$$

где  $V_m(z)$  — искомые непрерывные функции. После подстановки данного разложения в волновое уравнение получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^2 V_m}{dz^2} + \beta_m^2(x, z) V_m \right] \exp\left(-i\frac{2\pi}{d}mx\right) = 0, \quad (6.10.8)$$

где

$$\beta_m^2(x, z) = k_0^2 n^2(x, z) - [k_{ix} + (2\pi/d)m]^2 - k_{iy}^2. \quad (6.10.9)$$

Умножая каждое из этих уравнений на  $\exp[i(2\pi/d)qx]$ , где  $q$  — целое число, и интегрируя их по периоду  $d$ , находим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 V_q}{dz^2} + k_0^2 V_q(z) g_0(z) = -k_0^2 \sum_{m \neq q} V_m(z) g_{q-m}(z), \quad (6.10.10)$$

где

$$k_0^2 g_{q-m}(z) = \frac{1}{d} \int_0^d \beta_m^2(x, z) \exp\left[i\frac{2\pi}{d}(q-m)x\right] dx. \quad (6.10.11)$$

В частности, для косинусоидального профиля  $z = (1/2)h \cos(2\pi x/d)$  имеем

$$g_l(z) = g_{-l}(z) = [(n_2^2 - n_1^2)/\pi l] \sin[(2\pi/d)lx] + n_1^2 \delta_l. \quad (6.10.12)$$

Таким образом, возникают три области  $A$ ,  $B$  и  $C$ , определяемые соответственно условиями  $z > f_{\max}$  (область  $A$ ),  $f_{\max}(z) > z > f_{\min}(z)$  (область  $B$ ) и  $f_{\min}(z) > z$  (область  $C$ ). В областях  $A$  и  $C$

функции  $g_l(z)$  тождественно равны нулю при  $l \neq 0$ , так что для  $V_m$  можно получить следующие выражения:

$$V_m(z) = \begin{cases} R_{m1} \exp(-i\beta_{m1}z) + \delta_m \exp(ik_{iz}z), & z > f_{\max}, \\ T_{m2} \exp(i\beta_{m2}z), & z < f_{\min}, \end{cases} \quad (6.10.13)$$

где  $\text{Re}\beta_m > 0$  и  $\beta_m > 0$ . Комплексные коэффициенты  $R_{m1}$  и  $T_{m2}$  можно найти, если сшить функции  $V_m(z)$  на границах области  $B$ . Методы, используемые для решения приведенной выше системы дифференциальных уравнений, достаточно сложны и во всяком случае трудоемки. Подставим теперь полученные выражения для  $V_m$  в фурье-разложение (6.10.7) и убедимся, что поле плоской волны, претерпевшей дифракцию на решетке, представляет собой бесконечный набор плоских волн, соответствующих различным порядкам дифракции. Конечный размер решетки приводит к уширению пика в каждом порядке, как показано схематически на рис. 6.19.

### 6.10.3. Представление Рэля для металлической решетки

В 1897 г. Рэлей предложил свой метод вычисления рассеянного от периодической решетки поля, основанный на предположении о том, что *представление поля в области перед решеткой в соответствии с принятым выше соглашением (область  $A$ ) должно быть также справедливо и для области, непосредственно примыкающей к поверхности решетки (гипотеза Рэля)*. Из этого следует, что на границе решетки падающую  $p$ -волну с  $k_{iy} = 0$  можно записать в виде

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m \exp\left[-i\beta_m f(x) - i\frac{2\pi}{d} mx\right] = -\exp[-ik_{iz}f(z)]. \quad (6.10.14)$$

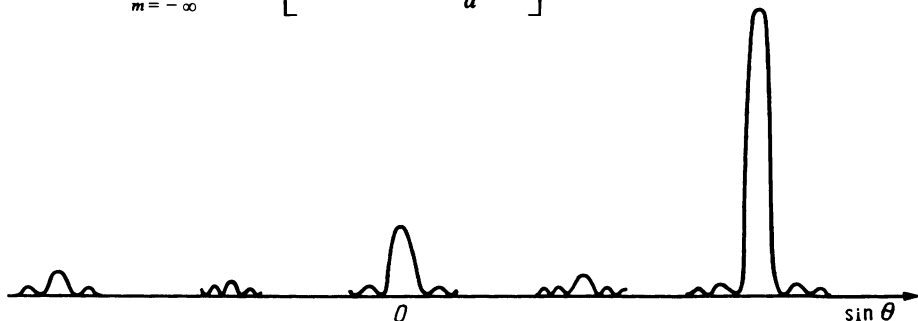


Рис. 6.19. Схематическое представление поля в дальней зоне при дифракции на решетке. Угол рассеяния отсчитывается от внешней нормали к поверхности решетки; знак угла  $\theta$  зависит от выбора направления отражения от решетки. Уширение линий отдельных порядков происходит благодаря конечному размеру решетки.

В справедливости гипотезы Рэлея никто не сомневался до тех пор, пока не так давно Дерюгин (1952) и Липман (1953) не высказали соображения по поводу ее обоснованности, указав на то, что на гофрированной поверхности существуют приходящие и уходящие вторичные волны, а вместе с ними можно предположить и существование экспоненциально нарастающих и затухающих волн (см. в книге [18] главу, написанную М. Кадиляком). В 1969 г. Миллар показал, что для выполнения гипотезы Рэлея необходимо и достаточно, чтобы соответствующее разложение являлось аналитической функцией координат  $x$  и  $z$ . В результате тщательного анализа области аналитичности несколькими авторами установлена предельная ширина штриха. В частности, Пти, Кадиляк и Миллар показали, что для косинусоидального профиля  $(1/2)h \cos(2\pi x/d)$  гипотеза справедлива при всех значениях  $h/d \leq 0$ . Однако для треугольного профиля гипотеза Рэлея *никогда* не выполняется. Ван ден Берг и Фоккема доказали некоторые дополнительные теоремы, позволяющие подтвердить или опровергнуть гипотезу Рэлея.

Несмотря на то что гипотеза Рэлея не всегда верна, воспользуемся все же разложением  $u(x, z)$  в ряд по плоским волнам

$$u_m(x, z) = \exp(-i\beta_m z - i\gamma_m x), \quad (6.10.15)$$

где  $\gamma_m = k_{ix} + (2\pi/d)m$ . Действительно, Ясуура показал, что приведенный выше набор уходящих и затухающих волн является *полным* и может быть использован для вычисления соответствующих коэффициентов. Для этого необходимо решить следующую замкнутую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N R_m^N \int_0^d u_m[x, f(x)] u_m^*[x, f(x)] (1 + f'^2)^{1/2} dx = \\ = - \int_0^d u_i[x, f(x)] u_m^*[x, f(x)] (1 + f'^2)^{1/2} dx, \end{aligned} \quad (6.10.16)$$

где  $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$ . В 1973 г. Икуно и Ясуура доказали, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} R_m^N = R_m$ . В этом подходе, который обычно называют *методом наименьших квадратов*, коэффициент отражения  $R_m$ , относящийся к  $m$ -й дифрагированной волне, получается решением системы уравнений (6.10.16) при достаточно большом выбранном значении  $N$ . Коэффициенты отражения  $R_m$  вычисляются путем интегрирования по профилю решетки произведения амплитуды падающей волны на  $m$ -ю рэлеевскую волну  $u_m^*$ . В другом варианте метода наименьших квадратов

$u_m^*(x, f(x))(1 + f'^2)$  заменяется на  $u_m^*(x, 0)$ . Метод, в котором используется данная замена, называется *методом разложения в ряд Фурье*.

#### 6.10.4. Интегральный метод

Рассмотрим теперь другой метод, который не содержит ограничений, характерных для рэлеевского приближения (см. в книге [18] главу, написанную Мэйстром). Из интегрального уравнения (6.9.1) в общем случае следует, что

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = - \iint_{\text{преп}} (\hat{n}_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS', \quad (6.10.17)$$

здесь  $\hat{n}_0$  — нормаль к решетке, направленная в среду 2. Если  $\mathbf{r} \in S_{\text{преп}}$ , то (6.10.17) становится неоднородным интегральным уравнением для неизвестной функции  $\mathbf{H}_{\text{преп}}(\mathbf{r})$ .

В случае когда препятствием является дифракционная решетка, данное уравнение становится двумерным, если мы заменим функцию Грина  $G$  на двумерную функцию Грина, определяемую выражением (4.7.5). Интеграл по поверхности вырождается в линейный интеграл по профилю решетки. Кроме того, учитывая периодичность функции  $\text{Nexp}(ik_{ix}x)$  по оси  $x$ , интеграл можно вычислить в пределах одного периода этой функции  $(0, d)$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, z) - \mathbf{H}_i(x, z) = & - \int_0^d (\hat{n}_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla' G_{\text{пер}}[x - x', z - f(x')] \times \\ & \times (1 + f'^2)^{1/2} dx'; \end{aligned} \quad (6.10.18)$$

здесь

$$G_{\text{пер}}(x - x', z - z') \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_{ix}nd) G^{(2)}(x - x' - nd, z - z'). \quad (6.10.19)$$

Функция  $G_{\text{пер}} e^{ik_{ix}x}$  является периодической относительно координаты  $x$ , причем ее период равен  $d$ . Эта функция удовлетворяет излучательному условию на бесконечности (при  $z \rightarrow \infty$ ) и неоднородному волновому уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) G_{\text{пер}} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_{ix}md) \delta(x - md) \delta(z). \quad (6.10.20)$$

Ее можно записать в виде

$$G_{\text{пер}}(x, z) = \frac{i}{2d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta_m} \exp[-i(\gamma_m x + \beta_m z)]. \quad (6.10.21)$$

Для  $s$ -волны вектор  $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{y}}u$  параллелен штрихам решетки и интегральное уравнение (6.10.18) принимает следующий вид:

$$u^i(x, z) - u(x, z) = \int_0^d u(x', z') \left( f' \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial z'} \right) G_{\text{per}}(x - x', z - z') dx', \quad (6.10.22)$$

где  $z = f(x)$  и  $z' = f(x')$ . Данное уравнение можно решить, если его свести к матричному и затем воспользоваться методом моментов.

При  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  функция Грина  $G_{\text{per}}$  является сингулярной, поэтому необходимо аккуратно вычислить вклад этой сингулярности. Подробности читатель может найти в работе Заки и Нерентера [19]. Интегральный метод можно обобщить и на диэлектрические решетки как для  $p$ -, так и для  $s$ -волн.

### 6.10.5. Разрешающая способность

В разд. 6.10.1 мы привели общую формулу дифракции на решетке, которая справедлива для произвольной решетки (т.е. независимо от ее профиля). Знак дифракционных углов выбирался таким образом, чтобы для нулевого порядка (зеркальное отражение) мы имели  $\theta_0 > 0$ . Амплитуда поля в различных порядках вычисляется с помощью коэффициентов отражения  $R_m$ , которые определяются профилем решетки, поляризацией, длиной волны и углом падения. Эти коэффициенты отражения можно вычислить, используя либо методы с разложением по плоским волнам (скажем, метод наименьших квадратов или метод Фурье), либо рассмотренный в предыдущем разделе интегральный метод. Вообще говоря, дифракционные решетки применяют в качестве диспергирующих элементов. Следовательно, для них наиболее важными параметрами являются те, которые связаны с их способностью разделять различные длины волн, скажем  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ . Эта способность зависит от расстояния  $d$  между штрихами, от порядка  $m$ , в котором наблюдается дифракция, от расстояния между решеткой и точкой наблюдения и от *размера* всей решетки. Рассматривая параметры решетки  $d/\lambda$  и  $m$ , мы видим, что при фиксированном угле падения формула решетки дает *дисперсионное уравнение*

$$d\theta_m/d\lambda = m/(d \cos \theta_m). \quad (6.10.23)$$

В случае когда используются низкие порядки решетки  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , высокая угловая дисперсия получается лишь при достаточно малых  $d$ , т.е. необходимо использовать решетку с высокой плотностью штрихов. Однако значительную угловую дисперсию можно получить и

ных порядках и использовать скользкие углы падения. В некоторых случаях для выбранных  $\theta$ ,  $\lambda$  и  $d$  существует порядок интерференции, скажем  $m_L$ , в котором направление дифрагированного пучка практически совпадает с направлением падающего. В таком случае говорят, что решетка работает в обратном отражении в порядке  $m$ . Данный режим называют *условием Литтроу*, а про решетку говорят, что она работает в *схеме Литтроу*. Из формулы решетки можно сразу же найти номер  $m_L$  такого порядка, в котором  $\theta_m \sim -\theta$ , и мы имеем следующее соотношение:

$$m_L \simeq -2(d/\lambda) \sin \theta, \quad (6.10.24)$$

где  $m_L$  — отрицательное целое число. При выполнении условия Литтроу угловая дисперсия становится равной

$$d\theta_{mL}/d\lambda \simeq -(2 \tan \theta)/\lambda. \quad (6.10.25)$$

Отсюда следует, что угловая дисперсия решетки, работающей в схеме Литтроу, не зависит от числа штрихов решетки. Кроме того, заметим, что угловую дисперсию можно сделать очень высокой, если падающее излучение направить под углом, близким к  $90^\circ$ .

В принципе любая решетка могла бы работать в схеме Литтроу при больших углах падения. Однако на практике это требует того, чтобы дифрагированный пучок имел достаточно большую интенсивность. Для этой цели используются *эшелетты*, которые имеют треугольный профиль штриха и угол блеска  $\alpha = \theta$ , приблизительно совпадающий с углом падения (рис. 6.18,  $z$ ). В случае когда длина волны падающего света удовлетворяет условию Литтроу, эффективность решетки  $E_{mL} = |R_{mL}|^2$  равна единице для падающей s-волны. Как правило, эшелетты Литтроу используются с  $m = -1$ . Относительная эффективность  $E_{-1}$  таких эшелеттов является функцией угла падения или, что то же самое, отношения  $\lambda/d = 2\sin\theta$ , величина которого может меняться от нуля до двойки. На рис. 6.14 показана типичная спектральная зависимость эффективности для s- и p-волн.

До сих пор мы не учитывали конечный размер решетки, что позволяло нам представлять дифрагированное поле в виде дискретного набора плоских волн. Конечную ширину  $W$  решетки можно учесть, если каждую плоскую волну ограничить апертурой, соответствующей проекции решетки на направление луча  $m$ -го порядка. При этом поле, дифрагированное в дальней зоне, можно записать в виде

$$u_d(x, y, z) = \exp(-ik_{iy}y) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} R_m \exp(-i\gamma_m x - i\beta_m z) \\ \times \text{sinc}[k_0 W \cos^2 \theta_d (\text{tg } \theta_m - \text{tg } \theta_d)], \quad (6.10.26)$$

где  $\theta_d = \text{arctg}(x/z)$  представляет собой угол рассеяния, измеренный относительно нормали решетки. Выражение (6.10.26) отличается от (6.10.16) только множителем  $\text{sinc}(\ )$ , который учитывает конечность ширины решетки  $W$  в направлении оси  $x$ . Для простоты мы пренебрегли аналогичным множителем, учитывающим конечный размер решетки по оси  $y$ . В частности, при  $\theta_d \sim \theta_m$  интенсивность  $i(\theta_d)$  поля в  $m$ -м порядке записывается в виде

$$i_m(\theta_d) \propto |R_m|^2 \text{sinc}^2[k_0 W \cos \theta_m (\theta_d - \theta_m)]. \quad (6.10.27)$$

Соответственно выражение для угловой дисперсии в  $m$ -м порядке дифракции запишется в виде  $d\theta_m \sim 2\pi/(k_0 W \cos \theta_m)$ . Далее, используя дисперсионное уравнение (6.10.23), решетку можно применить для измерения длины волны монохроматического излучения с точностью  $d\lambda$ , которая определяется выражением

$$d\lambda \simeq (d \cos \theta_m / m) d\theta_m = \lambda / (mN). \quad (6.10.28)$$

В этом выражении  $N$  — полное число штрихов решетки. Разделив  $\lambda$  на  $d\lambda$ , мы получим выражение для разрешающей силы  $\mathcal{R}$  решетки:

$$\mathcal{R} = mN. \quad (6.10.29)$$

Таким образом,  $\mathcal{R}$  равна произведению порядка дифракции на число освещаемых штрихов. Однако из формулы решетки (6.10.2) для спектрометров с фиксированной разностью между углом падения и отражения можно получить зависимость порядка  $m$  от угла падения  $\theta$ . Таким образом, мы имеем

$$\mathcal{R} = (2W/\lambda) \cos(\alpha/2) \sin[\theta - (\alpha/2)] \leq 2W/\lambda \equiv \mathcal{R}_{\text{макс}}. \quad (6.10.30)$$

Мы видим, что максимальная разрешающая способность спектрометра пропорциональна ширине освещаемой части решетки и не зависит от числа штрихов. Поэтому, чтобы получить близкое к максимальному  $\mathcal{R}_{\text{макс}}$  разрешение, необходимо уменьшить разность между углом падения и отражения и использовать скользящее падение на решетку. Это означает, что решетка в спектрометре должна работать в схеме Литтроу ( $\alpha = 0$ ) при скользящем падении излучения. Для решеток с углом блеска можно показать, что максимальную энергию имеет та дифрагированная волна, длина волны которой позволяет ей отражаться от граней штрихов зеркальным образом. Следовательно, чтобы получить максимальную разрешающую силу, необходимо работать при достаточно малых углах блеска. При выполнении этих условий была достигнута разрешающая способность 1 млн. При длине волны 5000 Å это означает разрешение полосы 600 МГц, что не достаточно для разрешения спектра генерации лазера или изучения линий сверхтонкой структуры. В этих случаях существенно улучшает де-



ло совместное применение спектрометра с дифракционной решеткой и интерферометра Фабри — Перо; такое комбинированное устройство мы рассмотрим в конце следующей главы.

### 6.10.6. Эффективность решетки и аномалии Вуда

Мы показали, что комплексные амплитуды  $R_m$  парциальных волн, претерпевших дифракцию на решетке, очень сложным образом зависят от поляризации падающего излучения, угла падения, длины волны и профиля штриха. Если дифракционная решетка применяется в спектрометрах и лазерных резонаторах только для селекции линий или же частотной настройки (см. разд. 7.20), то интерес здесь представляют лишь затухающие волны. В других случаях, встречающихся довольно редко, необходимо знать поле вблизи штрихов. Хотя первый случай и кажется более простым, поскольку для вычисления *эффективности*  $E_n = |R_n|^2$  требуется небольшое число распространяющихся мод, аналитический расчет здесь в принципе столь же труден, как во втором случае. Действительно, эффективности этих распространяющихся мод приходится вычислять посредством включения в усеченные разложения поля некоторого числа как распространяющихся, так и затухающих волн. Однако существуют случаи, когда относительно эффективности можно сделать определенные предположения. Особый интерес представляет случай решетки в схеме Литтроу с углом падения, совпадающим с углом блеска или дополнительным к нему, когда эффективность равна единице для s-волны.

В 1902 г., исследуя отражение от решетки различных s-волн, Вуд обнаружил быстрое изменение эффективности в различных интерференционных порядках в некоторых узких частотных областях. Они наблюдаются в виде ранее неизвестных узких темных и светлых полос в спектре отражения решетки при ее освещении источником света, спектр излучения которого медленно изменяется. В 1907 г. Рэлей объяснил это аномальное поведение тем, что рассеянное поле становится сингулярным при длинах волн, на которых один из интерференционных порядков направлен под скольльзящим углом. Он обнаружил, что аномалиям Вуда соответствуют определенные длины волн  $\lambda_R$ , которые были названы *рэлеевскими длинами волн*; для этих волн существует порядок спектра  $m$ , такой, что выполняется равенство  $\beta = 0$ . Возможные значения  $\lambda_R$  можно найти из выражения (6.10.9), а именно

$$\lambda_R = d(1 - \cos \theta)/n \quad (n \text{ — целое число}). \quad (6.10.31)$$

Первым, кто предположил, что аномалии Вуда соответствуют возбуждению поверхностных волн на решетке, был Фано. Исследователи, занимавшиеся поверхностными плазмонами (см. конец гл. 3), разработали другой подход к решению этой задачи. В качестве нулевого приближения ими рассматривались плазмоны на плоской поверхности, затем при вычислении вероятности возбуждения поверхностных плазмонов они включали возмущение, обусловленное штрихами решетки. Подробное рассмотрение различных подходов можно найти в книге под редакцией Пти [18] и в статье Хесселя и Олинера [20]. В последней работе дифракционная решетка рассматривалась как плоская поверхность с периодическим поверхностным импедансом.

## 6.11. РАССЕЯНИЕ НА ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В данном разделе мы рассмотрим рассеяние на некотором препятствии волны, распространяющейся в вакууме. На определенном расстоянии, которое должно быть намного больше как длины волны, так и характерных размеров препятствия, поле состоит из плоской и сферической волн, причем последняя представляет собой дифрагированную волну. Обозначим через  $\mathbf{k}_0$  волновой вектор падающего луча и через  $\mathbf{k}'_0$  волновой вектор луча, рассеянного в направлении вектора  $\hat{\mathbf{k}}'$ . Плоскость, определяемую этими двумя векторами, будем считать базисной плоскостью и в дальнейшем называть *плоскостью рассеяния*. Таким образом, поляризация падающего луча и соответствующие векторы Джонса (см. разд. 1.3) будут направлены вдоль перпендикулярных  $\mathbf{k}_0$  векторов  $\hat{\mathbf{T}}$  и  $\hat{\mathbf{I}}$ , из которых первый перпендикулярен, а второй параллелен плоскости рассеяния. Буквы  $r$  и  $l$  были введены Чандрасекаром и соответствуют последним буквам в английских словах «perpendicular» и «parallel». Векторы  $\hat{\mathbf{T}}'$  и  $\hat{\mathbf{I}}'$  для рассеянной волны перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_0$  и плоскости рассеяния.

Поскольку рассеянная волна асимптотически ведет себя как сферическая, удобно сразу же ввести радиальную зависимость вида  $e^{-ik_0 r}/r$ , где  $r$  — расстояние от начала координат, расположенного в окрестности рассеивающего тела, до точки наблюдения. Таким образом, можно записать следующее соотношение:

$$\begin{bmatrix} E_{dl} \\ E_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{il} \\ E_{ir} \end{bmatrix} \frac{e^{-ik_0 r}}{r}, \quad (6.11.1)$$

где  $E_{il}$  и  $E_{ir}$  представляют собой амплитуды каждой из двух составляющих в падающей волне, изменяющейся по закону  $\exp(-ik_0 r)$ . Пусть

начало  $O$  лучевого вектора  $\mathbf{r}$  совпадает с началом сферических координат, в которых было записано выражение для рассеянной волны. Для удобства выберем направление полярной оси таким образом, чтобы оно совпадало с направлением вектора  $\mathbf{k}_0$ . Матрица  $\mathbf{S}$  описывает рассеяние на препятствии и зависит от того, как данное препятствие ориентировано относительно векторов  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}'_0$ . В отличие от матрицы, введенной ван де Хюлстом, в данной матрице отсутствует множитель  $ik_0$ .

При данных  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}'_0$  существуют в общем случае три разных положения, в которых матрица рассеяния может быть выражена через компоненты исходной матрицы. Из теоремы взаимности (см. задачу 8 в гл. 1 настоящей книги) следует инвариантность процесса рассеяния по отношению к преобразованиям  $\mathbf{k}_0 \rightarrow -\mathbf{k}'_0$ ,  $\mathbf{k}'_0 \rightarrow -\mathbf{k}_0$  [21]. Эти преобразования можно представить себе, как если бы падающий луч начал распространяться в направлении, обратном тому, в котором первоначально распространялся рассеянный луч. После выполнения данных преобразований матрица  $\mathbf{S}$  принимает вид

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_2 & -S_4 \\ -S_3 & S_1 \end{bmatrix}. \quad (6.11.2)$$

Кроме того, можно показать (см. книгу ван де Хюлста [12], указанную в литературе к гл. 1 настоящей книги), что при зеркальном отражении рассеивающего тела относительно плоскости рассеяния матрица  $\mathbf{S}$  преобразуется к виду

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_2 & -S_3 \\ -S_4 & S_1 \end{bmatrix}. \quad (6.11.3)$$

Объединяя эти преобразования, мы получаем картину, представляющую собой зеркальное отражение препятствия относительно плоскости, перпендикулярной плоскости рассеяния и делящей пополам угол между векторами  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}'_0$ . Таким образом, окончательно имеем

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_2 & S_4 \\ S_3 & S_1 \end{bmatrix}. \quad (6.11.4)$$

В частности, для сферического рассеивающего тела матрица  $\mathbf{S}$  при рассмотренных выше преобразованиях не изменяется. Следовательно, компоненты  $S_3$  и  $S_4$  должны быть равны нулю.

### 6.11.1. Сечение экстинкции и оптическая теорема

Важным параметром при описании рассеяния на различных телах является сечение экстинкции  $\sigma_{\text{ЭКСТ}}$ , определяемое как отношение мощно-

сти, теряемой в результате рассеяния ( $P_{\text{расс}}$ ) и диссипации ( $P_{\text{дисс}}$ ), к величине вектора Пойнтинга падающей плоской волны:

$$\sigma_{\text{экт}} = 2\zeta_0 (P_{\text{расс}} + P_{\text{дисс}}) / E_i^2. \quad (6.11.5)$$

Рассеянную мощность можно вычислить, интегрируя вектор Пойнтинга рассеянной волны по сфере достаточного большого радиуса. При этом с учетом выражения (6.11.1) получим

$$P_{\text{расс}} = \frac{1}{2\zeta_0} \oint\limits_{4\pi} |E_d|^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{2\zeta_0} \oint\limits_{4\pi} |\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_i|^2 d\Omega. \quad (6.11.6)$$

На границе сферы полная мощность (падающая, потерянная на диссипацию и унесенная в рассеянной волне) должна сохраняться. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \oint\limits_{4\pi} [(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_d) \times (\mathbf{H}_i^* + \mathbf{H}_d^*)] \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega &= \\ &= \frac{2P_{\text{расс}}}{r^2} + \oint\limits_{4\pi} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega + \\ &+ \operatorname{Re} \oint\limits_{4\pi} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_d^* + \mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega = \\ &= -\frac{2P_{\text{дисс}}}{r^2}; \end{aligned} \quad (6.11.7)$$

а поскольку

$$\oint\limits_{4\pi} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega = (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \oint\limits_{4\pi} \hat{\mathbf{r}} d\Omega = 0, \quad (6.11.8)$$

получаем

$$P_{\text{расс}} + P_{\text{дисс}} = -2 \operatorname{Re} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \oint\limits_{4\pi} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_d^* + \mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega. \quad (6.11.9)$$

Однако, поскольку  $\mathbf{H}_d = -\zeta_0^{-1} \mathbf{E}_d \times \hat{\mathbf{r}}$  при  $r \rightarrow \infty$ , можно написать

$$\begin{aligned} \zeta_0 \lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_d^* + \mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_i^*) \cdot \mathbf{r} &= -\lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{E}_i \times (\mathbf{E}_d^* \times \hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{E}_d \times (\mathbf{E}_i^* \times \hat{\mathbf{k}})] \cdot \mathbf{r} = \\ &= \exp(-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + ik_0 r) \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{E}_i^* + \\ &+ \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - ik_0 r) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_i - \\ &- \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - ik_0 r) \mathbf{E}_i^* \cdot \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_i. \end{aligned} \quad (6.11.10)$$

Наконец, воспользуемся методом стационарной фазы. Это даст

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \iint_{4\pi} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - ik_0 r) f(\hat{k}, \hat{r}) d\Omega = -i \frac{2\pi}{k_0} [f(\hat{k}, \hat{k}) - \exp(-2ik_0 r) f(\hat{k}, -\hat{k})]. \quad (6.11.11)$$

Подставим правую часть выражения (6.11.10) в (6.11.9) и воспользуемся результатом (6.11.11). В итоге находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_{\text{расс}} + P_{\text{дисс}} &= -(\lambda/2\zeta_0) \text{Re}[i\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{S}^*(\hat{k}, \hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i^* - ie^{2ik_0 r} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{S}^*(\hat{k}, -\hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i^* - \\ &\quad - i\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{S}(\hat{k}, \hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i - i\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{S}(\hat{k}, -\hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i e^{-2ik_0 r}] = \\ &= -(\lambda/\zeta_0) \text{Im}[\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{S}(\hat{k}, \hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i], \end{aligned} \quad (6.11.12)$$

$$\sigma_{\text{ext}} = -2\lambda \{\text{Im}[\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{S}(\hat{k}, \hat{k}) \cdot \mathbf{E}_i]\} / |\mathbf{E}_i|^2. \quad (6.11.13)$$

Последнее выражение означает, что сечение экстинкции зависит от значения элементов  $\mathbf{S}$ -матрицы для рассеяния вперед. В частности, для сферических частиц при рассеянии вперед оба диагональных элемента в матрице рассеяния равны друг другу, и выражение (6.11.13) принимает более простой вид:

$$\sigma_{\text{экс}}^{(\text{сфера})} = -2\lambda \text{Im} S(\hat{k}, \hat{k}). \quad (6.11.14)$$

Это выражение представляет собой так называемую *оптическую теорему*.

## 6.12. РАЗЛОЖЕНИЕ РАССЕЙННОГО ПОЛЯ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

В качестве первого шага рассмотрим некоторую скалярную функцию  $f(r)$ , которая представляет собой решение волнового уравнения Гельмгольца в определенной области:

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{D}^2}{r^2} + k^2 \right) f(r, \theta, \phi) = 0, \quad (6.12.1)$$

где оператор

$$\hat{D}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (6.12.2)$$

называется *оператором Бельтрами* для сферы [ср. с выражением (2.12.40)]. Оператору  $\hat{D}^2$  соответствует дискретный набор собственных функций  $Y_n^m$ , называемых *сферическими гармониками*:

$$\hat{D}^2 Y_n^m(\theta, \phi) = -n(n+1)Y_n^m, \quad (6.12.3)$$

причем

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \left[ \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (6.12.4)$$

а через  $P_n^m(\cos \theta)$  обозначены *присоединенные функции Лежандра первого рода*, определяемые выражением

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta (d/d \cos \theta)^m P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (6.12.5)$$

Функции  $P_n(\cos \theta)$  представляют собой *полиномы Лежандра*, определяемые формулой Родрига

$$P_n(\cos \theta) = [(-1)^n / (2^n n!)] (d/d \cos \theta)^n \sin^{2n} \theta. \quad (6.12.6)$$

Четность полиномов Лежандра определяется четностью числа  $n$ , т.е.  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ . Кроме того, для полиномов Лежандра оказываются справедливыми следующие рекуррентные соотношения:

$$nP_{n-1} = n \cos \theta P_n + \sin^2 \theta P_n', \quad (6.12.7)$$

где штрих означает производную по  $\cos \theta$ .

Поскольку на поверхности сферы сферические гармоники образуют полный ортогональный набор, а именно

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} Y_n^{m*} Y_n^{m'} d\Omega = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (6.12.8)$$

скалярная волновая функция  $f(r, \theta, \phi)$  может быть разложена по этим функциям:

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (6.12.9)$$

где

$$R_{nm}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_n^{m*}(\theta, \phi) f(r, \theta, \phi). \quad (6.12.10)$$

*Пример. Скалярная плоская волна.* Для скалярной волны  $\exp(-ikr \cos \theta)$ , распространяющейся вдоль полярной оси, выражение (6.12.10) дает

$$\begin{aligned} R_{nm}(r) &= (2n+1)^{1/2} P_n[-i(d/dx)] (\sin x/x) \delta_{m0} = \\ &= (2n+1)^{1/2} (-i)^n [\psi_n(kr)/(kr)] \delta_{m0}; \end{aligned} \quad (6.12.11)$$

здесь  $x = kr$ , а  $P_n(-id/dx)$  — дифференциальный оператор, получаемый подстановкой  $-id/dw$  вместо аргумента  $w$  в выражение для  $P_n(w)$ . В выражении (6.2.11) функция  $\psi_n(kr)$  записывается в виде

$$\psi_n(x) = i^n x P_n[-i(d/dx)] \sin x/x \quad (6.12.12)$$

и называется *функцией Риккати — Бесселя*. Она обладает свойством регулярности в точке  $x = 0$ , а при  $x \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к  $\sin(x - n\pi/2)$ . После подстановки правой части выражения (6.12.11) в разложение (6.12.9) получаем *формулу Бауэра*:

$$e^{-ikr \cos \theta} = \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \psi_n(kr) P_n(\cos \theta). \quad (6.12.13)$$

### 6.12.1. Радиальное волновое уравнение

Поскольку каждый член разложения в правой части выражения (6.12.9) должен удовлетворять уравнению (6.12.1), то функция  $f_{nm}(kr) = (2kr/\pi)^{1/2} R_{nm}(r)$  должна в свою очередь являться решением уравнения Бесселя полуполого порядка

$$d^2 f_{nm}/dx^2 + (1/x)(df_{nm}/dx) + [1 - (n+1/2)^2/x^2] f_{nm} = 0. \quad (6.12.14)$$

Отсюда следует, что значения функции  $f_{nm}$  не зависят от индекса  $m$ , который в дальнейшем мы будем опускать. Если использовать определение *сферических функций Ханкеля*  $h_n$ , а именно

$$h_n^{(1)}(x) = h_n^{(2)*}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{x} \sum_{q=0}^n \frac{i^{q-n-1} (n+q)!}{q!(n-q)!} \frac{1}{(2x)^q}, \quad (6.12.15)$$

то в общем случае можно записать, что

$$R_n(r) = A_n h_n^{(1)}(kr) + B_n h_n^{(2)}(kr) = [\pi/(2kr)]^{1/2} f_n(kr). \quad (6.12.16)$$

Используя функции Ханкеля  $h_n$ , можно определить *сферические функции Бесселя*  $j_n(x) = \text{Re } h_n^{(1)}$ . Функции  $j_n$  регулярны в точке  $x = 0$  и связаны с *функциями Риккати — Ханкеля* простым соотношением  $\psi_n = x j_n$ . Аналогично можно образовать функции Риккати — Ханкеля  $\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}$ , полагая  $\zeta_n^{(1)} = x h_n^{(1)}$ .

Из выражения (6.12.13) следует, что плоскую волну можно разложить в ряд, используя в качестве базисных функций приходящие и уходящие волны:

$$e^{-ik \cos \theta} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (6.12.17)$$

### 6.12.2. Векторные сферические гармоники

Применим к обычным гармоническим функциям  $Y_n^m$  векторный оператор  $\hat{\mathbf{L}}$ , такой, что [22]

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \nabla = \hat{\phi}(\partial/\partial\theta) - \hat{\theta}(1/\sin \theta)(\partial/\partial\phi). \quad (6.12.18)$$

В результате получим так называемые *векторные сферические гармоники*. Прежде чем рассмотреть свойства этих функций, сделаем несколько замечаний относительно свойств скалярных компонент  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  и  $\hat{L}_z$  оператора  $\hat{\mathbf{L}}$ . Оказывается, что существуют удобные комбинации  $\hat{L}_+$ ,  $\hat{L}_-$  и  $\hat{L}_z$ , такие, что

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_-^* = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = e^{i\phi}[i(\partial/\partial\theta) - \text{ctg}\theta(\partial/\partial\phi)], \quad \hat{L}_z = \partial/\partial\phi. \quad (6.12.19)$$

Отсюда, например, следует, что оператор  $\hat{D}^2$ , определенный выражением (6.12.2), можно представить в виде суммы  $\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2$ . Кроме того, нетрудно показать, что выполняются следующие коммутационные свойства операторов  $\hat{\mathbf{L}}$ ,  $\hat{D}^2$  и  $\nabla^2$ :

$$\hat{D}^2\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{D}^2, \quad \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = -\hat{\mathbf{L}}, \quad \hat{L}_j\nabla^2 = \nabla^2\hat{L}_j, \quad (6.12.20)$$

а также соотношения

$$\hat{L}_z Y_n^m = im Y_n^m, \quad \hat{L}_+ Y_n^m = i[(n-m)(n+m+1)]^{1/2} Y_n^{m+1}. \quad (6.12.21)$$

Таким образом, скалярные сферические гармоники  $Y_n^m$  являются собственными функциями операторов  $\hat{L}_z$  и  $\hat{D}^2$ . Читатели, знакомые с квантовой механикой, заметят совпадение этих операторов с операторами углового момента.

Теперь можно получить векторные сферические гармоники, воздействуя оператором  $\hat{\mathbf{L}}$  на функции  $Y_n^m$ :

$$\mathbf{Y}_n^m \equiv \hat{\mathbf{L}} Y_n^m = i(m/\sin\theta) Y_n^m \hat{\theta} + (m \cot\theta Y_n^m + e^{i\phi} Y_n^{m+1}) \hat{\phi}. \quad (6.12.22)$$

Из определения оператора  $\hat{\mathbf{L}}$  ясно, что  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0$ , а следовательно, и  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{Y}_n^m = 0$ .

Векторные сферические гармоники можно использовать для описания векторных полей, направленных по касательной к сфере. В частности, с их помощью можно составить так называемые *электрические мультипольные поля*

$$\mathbf{E}_{nm}^{(e)}(\mathbf{r}) = R_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \quad \mathbf{E}_{nm}^{(e)}(\mathbf{r}) = -[i/(\omega\mu_0\epsilon)] \nabla \times \mathbf{B}_{nm}^{(e)}. \quad (6.12.23)$$

Отсюда следует, что радиальную компоненту вектора  $\mathbf{E}_{nm}^{(e)}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{nm}^{(e)} &= (1/k) \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{R}_n \mathbf{r} \times \nabla Y_n^m)] = -(\mathbf{R}_n/k) \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Y_n^m)] = \\ &= [n(n+1)/k] R_n Y_n^m, \end{aligned} \quad (6.12.24)$$

где мы использовали векторные тождества (A8) и (A10) (см. приложение А к настоящей книге). Аналогичным образом можно найти выражения для мультипольных полей с поперечными электрическими полями:

$$\mathbf{E}_{nm}^{(h)} = R_n(kr) Y_n^m, \quad \mathbf{B}_{nm}^{(h)} = (i/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_{nm}^{(h)}. \quad (6.12.25)$$



Наконец, более общее выражение для электромагнитного поля может быть записано в виде суперпозиции ТЕ(h) и ТМ(e) сферических мультипольных полей:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} [a_{nm} \mathbf{E}_{nm}^{(e)}(\mathbf{r}) + b_{nm} \mathbf{E}_{nm}^{(h)}(\mathbf{r})], \quad (6.12.26)$$

где коэффициенты  $a_{nm}$  можно вычислить, если скалярно умножить выражение для  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  на  $\mathbf{r}$ , а затем использовать соотношение (6.12.24) с учетом взаимной ортогональности функций  $\mathbf{Y}_n^m$ . Исходя из взаимной ортогональности мультипольных полей и следуя тем же путем, который привел нас выше к разложению скалярной плоской волны (6.12.17), нетрудно получить формулу Бауэра для векторной плоской волны:

$$\hat{x}e^{-ikz} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left\{ j_n(Y_n^1 + Y_n^{-1}) + \frac{1}{k} \nabla \times [j_n(Y_n^1 - Y_n^{-1})] \right\}. \quad (6.12.27)$$

### 6.13. РАССЕЯНИЕ НА СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦАХ

В качестве примера рассеяния на телах с конечными размерами лучше всего рассмотреть рассеяние на сферических частицах. Интерес к этой задаче привлек внимание физиков благодаря работам Рэлея, который объяснил голубой цвет неба и появление синеватого оттенка у аэрозолей.

В 19 в., как описывается у Керкера [23], эта проблема была объектом тщательного экспериментального изучения. Брюкке (1853) и Гови (1860) наблюдали голубой оттенок у спиртового раствора смолы мастикового дерева, паров спирта и табачного дыма. Почти в то же время к такого же рода экспериментам обратился и Тиндаль (1869), директор Королевского института, интерес к ним ему внушил Джон Гершель, сын великого астронома Вильгельма Гершеля. В своих экспериментах Тиндаль использовал аэрозоли, полученные в результате конденсации продуктов газофазных реакций. Эксперименты, проведенные Гови и Тиндалем, показали, что 1) малые частицы рассеивают голубой цвет и 2) свет, рассеянный под прямыми углами к падающему, является линейно поляризованным.

В 1871 г. лорд Рэлей [24] опубликовал свою первую статью по рассеянию света малыми частицами в земной атмосфере, причем для простоты он принял форму частиц сферической. С помощью такого приближения Рэлей показал, что для частиц, размеры которых меньше длины волны падающего света, интенсивность рассеянной волны пропорциональна  $1/\lambda^4$ .

В своих первоначальных исследованиях Рэлей рассматривал только

те рассеивающие тела, показатели преломления которых слабо отличались от показателя преломления окружающей среды. Такое предположение, называемое сейчас приближением Рэлея — Ганса (см. разд. 6.4), фактически состоит в замене внутренних полей в рассеивающей частице соответствующими полями падающей волны.

Когда размеры частицы становятся сравнимыми с длиной волны, частицу можно представить в виде совокупности мультиполей (диполя, квадруполя, октуполя и т. д.), а рассеянное поле разложить в ряд по  $k_0$  (ряд Рэлея), а именно  $\mathbf{E}_d = \sum_n k_0^n \mathbf{E}^{(n)}$ . Каждый член  $\mathbf{E}^{(n)}$  может быть получен из члена ряда  $\mathbf{E}^{(n-1)}$ , если рассеянное поле представить в виде интеграла, взятого по поверхности частицы. Полное описание этого метода можно найти у Нобля [25] и Клейнмана [26].

В 1881 г. Лэмб решил задачу о рассеянии электромагнитной волны на сфере. Метод, который он использовал при этом, тесно связан с методом разделения переменных, примененным Клебшем в 1861 г. при решении класса граничных задач с целью изучения взаимодействия волн в упругой среде на сферической поверхности.

В 1908 г. Густав Ми объяснил окраску, возникающую при освещении коллоидного раствора металлических частиц, рассмотрев рассеяние волны на сферической частице, имеющей комплексный показатель преломления, в среде с потерями. Расчеты Ми включали в себя суммирование нескольких первых парциальных волн в разложении поля по этим волнам [27].

Через год после статьи Ми опубликовал свои исследования Дебай [28] о давлении света на проводящую сферу. Дальнейший вклад в рассматриваемую задачу внесли Бромвич (1899) и его соотрудники из Кэмбриджского университета.

В частности, студенту Бромвича Уайту принадлежит представление решения Ватсона в виде контурного интеграла, состоящего из отраженной волны и ряда вычетов. Этот метод мы рассмотрели в разд. 6.5 для случая рассеяния на цилиндре. Важный вклад в решение рассматриваемой задачи внесли голландские физики ван дер Поль, Бреммер и советский физик Фок, которому удалось получить интегральное представление поля в промежуточной области, а также ван де Хюлст (см. книгу ван де Хюлста [12], указанную в литературе к гл. 1 настоящей книги).

### 6.13.1. Разложение рассеянного поля по парциальным волнам

Рассмотрим диэлектрическую сферу радиусом  $a$  и с показателем преломления  $n$ , которая освещается плоской волной, распространяющейся-

ся вдоль положительного направления оси  $z$  и поляризованной вдоль оси  $x$ . В соответствии с формулой Бауэра (6.12.27) падающая волна вне сферы может быть представлена линейной комбинацией бесконечного числа поперечных электрических ( $\mathbf{E}_n^{(h), \pm 1}$ ) и поперечных магнитных ( $\mathbf{E}_n^{(e), \pm 1}$ ) мод. Кроме того, из разложения радиальной функции  $2j_n = h_n^{(1)} + h_n^{(2)}$  следует, что каждая угловая мода может быть представлена в виде волны, уходящей на бесконечность, и волны, сходящейся к центру сферы. Каждая парциальная волна, из которых составлено поле падающего излучения, порождает отраженную и прошедшую волну с одинаковой угловой зависимостью. Иными словами, падающая волна (скажем,  $\mathbf{E}_n^{(h), 1}$ ) порождает отраженную  $r_n^h \mathbf{Y}_n^1 h_n^{(2)}(k_0 r)$  и прошедшую  $t_n^h \mathbf{Y}_n^1 j_n(\tilde{n} k_0 r)$  волны.

Коэффициенты отражения и пропускания можно найти из условия непрерывности электрической и магнитной составляющих на поверхности сферы. В частности, из условия непрерывности  $\mathbf{E}_q^{(h), n}$  следует, что

$$j_q(\beta) + r_q^h h_q^{(2)}(\beta) = t_q^h j_q(\alpha), \quad (6.13.1)$$

где  $\alpha = \tilde{n}\beta$ . Аналогичным образом условие непрерывности тангенциальной составляющей  $\mathbf{B}_{qm}^{(h)} = i\omega^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{qm}^{(h)}$  дает

$$j_q'(\beta) + r_q^h h_q^{(2)'}(\beta) = \tilde{n} t_q^h j_q'(\alpha). \quad (6.13.2)$$

Решая эти уравнения относительно коэффициента отражения  $r_q^h$  (называемого также *коэффициентом Ми*), имеем [ср. с (6.4.13)]

$$r_q^h = - \frac{\ln' \psi_q(\beta) - \tilde{n} \ln' \psi_q(\alpha)}{\ln' \zeta_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' \psi_q(\alpha)} \frac{\psi_q(\beta)}{\zeta_q^{(2)}(\beta)} \equiv - \frac{1}{2} (1 - S_q^h(\beta)); \quad (6.13.3)$$

здесь  $\psi_q$  и  $\zeta_q^{(2)}$  — соответственно функции Риккати — Бесселя и Риккати — Ханкеля. Функции  $S_q^h(\beta)$  даются выражением

$$S_q^h = - \frac{\ln' \zeta_q^{(1)}(\beta) - \tilde{n} \ln' \psi_q(\alpha)}{\ln' \zeta_q^{(2)}(\beta) - \tilde{n} \ln' \psi_q(\alpha)} \frac{\zeta_q^{(1)}(\beta)}{\zeta_q^{(2)}(\beta)} \equiv \exp(-i2\alpha_q^h), \quad (6.13.4)$$

где  $\alpha_q^h$  — *фазовый сдвиг  $q$ -й парциальной волны*, который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha_q^h = \frac{\ln' j_q(\beta) - \tilde{n} \ln' j_q(\alpha)}{\ln' n_q(\beta) - \tilde{n} \ln' j_q(\alpha)} \frac{j_q(\beta)}{n_q(\beta)}, \quad (6.13.5)$$

здесь  $n_q(\beta)$  — *сферическая функция Неймана* ( $h_q^{(2)} = j_q - in_q$ ). В частности, при вещественных  $n$  абсолютное значение функции  $S_q^h$  равно единице и угол  $\alpha_q^h$  является вещественным.

Коэффициент отражения  $r_q^e$  для электрической компоненты может быть получен из указанных формул простой заменой  $n$  на  $1/n$ .

В частности, для металлической сферы коэффициенты отражения

принимают вид [ср. с выражением (6.14.17)]

$$r_q^h = -j_q(\beta)/h_q^{(2)}(\beta) \quad r_q^e = -j'_q(\beta)/h_q^{(2)'}(\beta). \quad (6.13.6)$$

### 6.13.2. Амплитуды рассеяния $S$ и фактор эффективности $Q$

Если на сферу падает линейно поляризованная плоская волна, то выражение для рассеянного сферой поля можно представить в виде ряда, состоящего из парциальных волн, который при  $r \rightarrow \infty$  сводится к следующему:

$$\begin{aligned} E_d(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-ik_0 r}}{2k_0 r} \sum_{q=1}^{\infty} (-i)^q \left[ r_q^h (\mathbf{Y}_q^1 + \mathbf{Y}_q^{-1}) + \frac{r_q^e}{k_0} \nabla \times (\mathbf{Y}_q^1 - \mathbf{Y}_q^{-1}) \right] \equiv \\ \equiv \frac{e^{-ik_0 r}}{r} [\cos \phi S_2(\theta) \hat{\theta} + \sin \phi S_1(\theta) \hat{\phi}], \end{aligned} \quad (6.13.7)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — амплитуды рассеяния соответственно магнитной и электрической составляющих:

$$S_1 = \frac{i}{k_0} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2q+1}{q(q+1)} [r_q^e \pi_q(\cos \theta) + r_q^h \tau_q(\cos \theta)], \quad (6.13.8a)$$

$$S_2 = \frac{i}{k_0} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2q+1}{q(q+1)} [r_q^h \pi_q(\cos \theta) + r_q^e \tau_q(\cos \theta)]. \quad (6.13.8b)$$

В этих выражениях функции  $\pi_q$  и  $\tau_q$  определяются через первую и вторую производные обычных функций Лежандра:

$$\pi_q(\cos \theta) = P_q^1(\cos \theta)/\sin \theta, \quad \tau_q(\cos \theta) = (d/d\theta) P_q^1(\cos \theta). \quad (6.13.9)$$

Будем считать, что единичные векторы  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$  совпадают с векторами  $\hat{\mathbf{i}}$  и  $\hat{\mathbf{r}}'$ , связанными с плоскостью рассеяния в соответствии с определениями, данными в разд. 6.11. Сравнивая затем выражение для поля в дальней зоне (6.13.7) с выражением (6.11.1), нетрудно заметить, что амплитуды рассеяния  $S_1$  и  $S_2$  совпадают с элементами матрицы рассеяния  $\mathbf{S}$ . Вычисленные таким образом интенсивности  $i_j = |S_j|^2$  ( $j = 1, 2$ ) и соответствующий фазовый сдвиг  $\delta = \arg S_1 - \arg S_2$  полностью характеризуют процесс рассеяния.

Определив элементы матрицы рассеяния и воспользовавшись оптической теоремой (6.11.14), можно написать выражение для сечения экстинкции  $\sigma_{\text{экт}}$ :

$$\frac{\sigma_{\text{экт}}}{\pi a^2} \equiv Q_{\text{экт}}(\tilde{n}, \beta) = -\frac{4}{k_0 a^2} \text{Im} S_1(0) = -\frac{2}{\beta^2} \sum_{q=1}^{\infty} (2q+1) \text{Re}(r_q^e + r_q^h). \quad (6.13.10)$$

При выводе этого выражения было использовано соотношение  $\pi_n(1) = \tau_n(1) = (1/2)n(n+1)$ , а через  $Q_{\text{экт}}(\tilde{n}, \beta)$  обозначен фактор

*эффективности*, который представляет собой отношение сечения экстинкции к геометрическому поперечному сечению сферы. Мы также получили простое выражение для полной рассеянной интенсивности, проинтегрировав вектор Пойнтинга рассеянного поля по поверхности сферы бесконечного радиуса:

$$\frac{\sigma_{\text{расс}}}{\pi a^2} = Q_{\text{расс}}(\tilde{n}, \beta) = \frac{1}{\beta^2} \int_0^\pi [i_1(\theta) + i_2(\theta)] \sin \theta d\theta = \frac{2}{\beta^2} \sum_{q=1}^{\infty} (2q+1)(2|r_q^h|^2 + |r_q^e|^2), \quad (6.13.11)$$

где  $\sigma_{\text{расс}} = 2\zeta P_{\text{расс}}/E_i^2$ . Разность между этими двумя сечениями определяет часть интенсивности падающей волны, поглощенной в объеме сферической части. В частности, для сферы, не имеющей потерь,  $\sigma_{\text{расс}} = \sigma_{\text{экт}}$ , так что ряды (6.13.10) и (6.13.11) должны совпадать. Действительно, если показатель преломления  $n$  вещественный, то углы  $\alpha_q^h$  и  $\alpha_q^e$  являются также вещественными, и, следовательно,  $-\text{Re}(r_q^h + r_q^e) = |r_q^h|^2 + |r_q^e|^2 = \sin^2 \alpha_q^h + \sin^2 \alpha_q^e$ . Исчерпывающую информацию о сечениях рассеяния и экстинкции можно найти в работе [29].

Процесс рассеяния можно характеризовать также с помощью еще одного параметра, а именно полного импульса  $\mathbf{P}_{\text{расс}}$ , перешедшего в рассеянное поле из поля падающей волны единичной амплитуды:

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = \hbar \int_0^\pi [i_1(\theta) + i_2(\theta)] \mathbf{k}'_0(\theta) \sin \theta d\theta \equiv \mathbf{p}_i \langle \cos \theta \rangle_\theta \beta^2 Q_{\text{расс}}, \quad (6.13.12)$$

где  $\mathbf{p}_i = \hbar k_0 \hat{\mathbf{z}} \langle \cos \theta \rangle_\theta$  представляет собой так называемый *фактор асимметрии*, который определяет относительный вклад интенсивностей излучения, рассеянного вперед и назад. В частности, Дебай получил следующее важное соотношение:

$$\beta^2 \langle \cos \theta \rangle_\theta Q_{\text{расс}} = 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(q+2)}{q+1} \text{Re}(r_q^h r_{q+1}^{h*} + r_q^e r_{q+1}^{e*}) + 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2q+1}{q(q+1)} \text{Re}(r_q^h r_q^{h*}). \quad (6.13.13)$$

С одной стороны, импульс, ушедший из падающего пучка, пропорционален  $\sigma_{\text{экт}}$ , а с другой стороны, как было показано выше,  $\sigma_{\text{расс}}$  содержит в себе член  $\langle \cos \theta \rangle_\theta \sigma_{\text{расс}}$ , пропорциональный импульсу, соответствующему рассеянию вперед. Отсюда мы находим, что полный импульс, потерянный в результате рассеяния, с учетом дополнительного вклада из-за рассеяния вперед, пропорционален величине

$$\sigma_{\text{давл}} = \sigma_{\text{экт}} - \langle \cos \theta \rangle_\theta \sigma_{\text{расс}} = \sigma_{\text{абс}} + (1 - \langle \cos \theta \rangle_\theta) \sigma_{\text{расс}} \equiv \pi a^2 Q_{\text{давл}}, \quad (6.13.14)$$

где  $Q_{\text{давл}}$  — фактор эффективности светового давления (рис. 6.20).

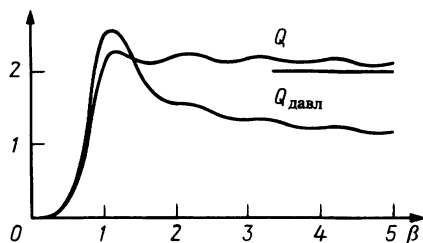


Рис. 6.20. Зависимость эффективности экстинкции ( $Q$ ) и давления ( $Q_{\text{давл}}$ ) от масштабного параметра  $\beta$  для металлической сферы.

Следствием потери импульса при взаимодействии излучения с рассеивающей частицей является появление силы  $F$ , которая действует на частицу в направлении распространения падающей волны:

$$F = (S/c)\sigma_{\text{давл}}; \quad (6.13.15)$$

здесь  $S$  — вектор Пойнтинга падающей волны. Явление *светового давления* хорошо известно астрофизикам. Оно было открыто и измерено в 1899 г. П.Н. Лебедевым в Москве [30]. Сила светового давления — наиболее существенная внешняя сила, действующая на атомы и пыль в межзвездном пространстве [31].

Когда частота падающего света совпадает с линией поглощения рассеивателя, сечение  $\sigma_{\text{абс}}$  может стать очень большим и величина светового давления также увеличится. В последние годы явление светового давления было использовано в задаче охлаждения частиц газа, при этом были достигнуты температуры порядка нескольких градусов Кельвина (см. работу Миногина и Летохова [32] и статью Шена [5], указанную в литературе к гл. 1 настоящей книги)<sup>1)</sup>.

Фактор асимметрии и фактор эффективности  $Q_{\text{давл}}$  детально исследовались Ирвайном [33]. Точный численный расчет выявил наличие регулярной последовательности узких оптических резонансов. Ашкин и Дзидзик тщательно измерили зависимость силы светового давления от длины волны [34]. В частности, используя лазер на красителе с высокой спектральной однородностью выходного излучения, эти авторы исследовали силу светового давления, действующую на прозрачную масляную каплю, и обнаружили ряд узких резонансов, тем самым подтвердив результат численного расчета Ирвайна. Они показали также, что если сфокусировать луч на каплю таким образом, чтобы при этом не задевать края капли, то резонансы исчезнут.

<sup>1)</sup> В настоящее время достигнуты температуры порядка тысячных градуса Кельвина. — *Прим. ред.*

### 6.13.3. Параметры Стокса для рассеянного поля

Матрица рассеяния, определяемая выражением (6.11.1), эквивалентна матрице Джонса  $\mathbf{A}$ , введенной в гл. 1 настоящей книги [см. выражение (1.3.15)]. Таким образом, можно воспользоваться соответствующим формализмом, который был применен в разд. 1.3 при вычислении параметров Стокса рассеянного поля. Например, для рассеивающей среды в матрице Джонса не равны нулю всего два элемента, а именно  $S_1 \equiv A_1$  и  $S_2 \equiv A_2$ , так что матрица  $\mathbf{F}$ , определяемая выражением (1.3.18), принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{F}_{\text{сфера}} = \begin{bmatrix} i_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & -D_{21} \\ 0 & 0 & D_{21} & S_{21} \end{bmatrix}, \quad (6.13.16)$$

где  $i_j = |S_j|^2$  — интенсивности,  $S_{21} = \text{Re}(S_1 S_2^*)$ , а  $D_{21} = \text{Im}(S_1 S_2^*)$ .

Отсюда можно определить степень поляризации  $m(\theta)$  оптического излучения, рассеянного в направлении  $\theta$  [см. выражение (1.3.14)]:

$$m(\theta) = \frac{[(i_1 + i_2)^2 (s_0^2 + s_1^2) + 2(i_2^2 - i_1^2) s_0 s_1 + 2i_1 i_2 (s_1^2 - s_0^2) + 4(S_{21}^2 + D_{21}^2)(s_2^2 + s_3^2)]^{1/2}}{(i_1 + i_2) s_0 + (i_2 - i_1) s_1}, \quad (6.13.17)$$

где  $s_i$  — параметры Стокса для падающего излучения.

### 6.13.4. Малые сферы

При  $\alpha, \beta < 0,8$  возбуждаются лишь первые две электрические моды и первая магнитная мода, так что с хорошей точностью амплитуду рассеяния  $S_1$  можно записать в виде

$$S_1(\theta) \cong \frac{1}{k_0} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \beta^3 \left[ 1 + \left( \frac{3n^2 - 2}{5n^2 - 2} + \frac{n^2 + 2}{30} \cos \theta + \frac{1}{6} \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 3} \cos \theta \right) \beta^2 - i \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2} \beta^3 \right]. \quad (6.13.18)$$

Аналогичное выражение можно записать и для  $S_2$ .

Подставим полученные выражения для  $S_1$  и  $S_2$  в формулу для эффективности рассеяния (6.3.11):

$$Q_{\text{расс}} = \frac{8}{3} \beta^4 \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left( 1 + \frac{6n^2 - 1}{5n^2 + 2} \beta^2 \right). \quad (6.13.19)$$

В частности, при  $\beta \ll 1$  выражение для интенсивности рассеяния сводится к выражению, полученному в 1871 г. Рэлеем, а именно

$$i_1(\theta) = \frac{i_2(\theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{\beta^6}{k_0^2} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2. \quad (6.13.20)$$

Подставляя выражения для интенсивностей в (6.13.17), находим

$$m(\theta) = \sin^2 \theta / (1 + \cos^2 \theta). \quad (6.13.21)$$

В то время как для малых сфер рассеянный под прямым углом свет является линейно поляризованным, для сфер большего радиуса в разложениях для  $S_1$  и  $S_2$  уже нельзя пренебрегать членами более высокого порядка, чем  $\beta^3$ . В этом случае  $|S_2|$  принимает минимальное (почти нулевое) значение при углах  $\theta_{\text{мин}}$ , отличных от прямого и определяемых выражением (см. книгу ван де Хюлста [12, с. 146], указанную в литературе к гл. 1 настоящей книги)

$$\cos \theta_{\text{мин}} = -\beta^2 [(n^2 - 1)(n^2 + 2)] / [15(2n^2 + 3)]. \quad (6.13.22)$$

Если  $n$  — известная величина, то, измерив угол  $\theta_{\text{мин}}$ , для которого свет является линейно поляризованным, можно найти размер частицы.

Другим параметром, который характеризует отклонение рассеяния от рэлеевского [см. выражение (6.13.20)], является отношение интенсивностей рассеяния вперед и назад:

$$|S_1(0)|^2 / |S_1(\pi)|^2 = 1 + (4/15)\beta^2 [(n^2 + 4)(n^2 + 2)] / (2n^2 + 3). \quad (6.13.23)$$

При рассеянии на прозрачных частицах с  $n\beta < 0,8$  вперед рассеивается всегда больше излучения чем назад.

### 6.13.5. Собственные моды диэлектрической сферы

Полюсы матрицы рассеяния соответствуют собственным модам диэлектрической сферы. Эти моды нетрудно найти для вещественных  $n$ . Для этого необходимо вычислить значения параметра  $\beta = k_0 a = (\alpha/c)(\omega' + i\omega'')$ , при которых знаменатель в выражении (6.13.3) обращается в нуль. Таким образом, мы можем записать следующие уравнения соответственно для h- и e-мод собственных колебаний рассеивателя:

$$\begin{aligned} \zeta_q^{(2)'}(\beta) \psi_q(\alpha) - n \psi_q'(\alpha) \zeta_q^{(2)}(\beta) &= 0, \\ n \zeta_q^{(2)'}(\beta) \psi_q(\alpha) - \psi_q'(\alpha) \zeta_q^{(2)}(\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (6.13.24)$$

В предельном случае  $n \rightarrow \infty$  уравнения (6.13.24) сводятся к  $h_q^{(2)}(\beta) = 0$  и  $h_q^{(2)'}(\beta) = 0$ . В случае  $q = 1$  мы имеем (см. книгу ван де Хюлста [12, Sect. 10.51] в литературе к гл. 1 настоящей книги)  $\beta = \pm 0,86 + i0,5$  для e-мод и  $\beta = i$  для h-мод. Действительно, эти моды и моды с большими значениями  $q$  оказывают сильное влияние



на рассеяние на сфере, хотя последние и не дают типичную резонансную картину. К резонансам же, которые играют весьма важную роль, приводят волны, которые удерживаются внутри сферы благодаря внутреннему отражению от ее границы. Затухание этих мод при больших  $\beta$  и  $n$  достаточно мало, поэтому они представляют собой *свободные моды колебаний диэлектрической сферы*. Эти моды первоначально были обнаружены в 1909 г. Дебаем при вычислении параметров  $\alpha$ , близких к  $q + 1/2$ .

Если  $\zeta_q^{(2)'}(\beta)$  приближенно записать как  $-(q/\beta)\zeta_q^{(2)}(\beta)$ , то можно показать, что мнимая компонента  $\omega''$  частоты этих резонансов дается выражениями (см. монографию Вайнштейна [2] в литературе к гл. 7 настоящей книги)

$$(\omega'/\omega'')_{q,m} = [q + (1/2)](n^2 - 1)^{1/2} \exp(2T_{q,m}) \begin{cases} 1/n & \text{(магнитные моды),} \\ n & \text{(электрические моды),} \end{cases} \quad (6.13.25)$$

где

$$T_{q,m} = \left(q + \frac{1}{2}\right) \left( \text{Arch } n - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) + \left[ \frac{q + (1/2)}{2} \right]^{1/3} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} x_m + \frac{1}{n^2}, \quad (6.13.26)$$

здесь  $x_m (< 0)$  —  $m$ -й корень уравнения

$$j_q \{q + 1/2 - [(q + 1/2)/2]^{1/3} x_m\} = 0.$$

Заметим, что добротность  $Q_{qm} (=z'/2\omega'')$  (ср. с разд. 7.3) увеличивается с ростом  $q$  и падает при увеличении  $m$ .

Резонансные частоты определяются выражением

$$\omega'_{qm} = \left(\frac{c}{an}\right) \left\{ q + \frac{1}{2} - [(q + \frac{1}{2})^{1/2}]^{1/3} x_m \right\}.$$

В следующей главе мы рассмотрим оптические приборы, которые генерируют излучение на некоторых дискретных частотах  $\omega'_{\text{рез}}$ , определяемых выражениями, аналогичными записанному выше [см., например, выражение (7.11.5)]. Точнее говоря, частота  $\omega'_{\text{рез}}$  обратно пропорциональна размеру резонатора и прямо пропорциональна сумме целого индекса (в рассмотренном здесь случае — это  $q$ , а в случае резонатора Фабри — Перио — это номер продольной моды) и некоторой дополнительной величины (в рассмотренном случае — это  $x_m$ , а в случае резонатора Фабри — Перио — фаза поперечной гауссовой моды).

### 6.13.6. Теория ван де Хюлста для сферы очень большого размера

В пределе  $\beta \rightarrow \infty$  рассеяние плоской волны на сфере можно описать в рамках геометрической оптики. Связь между этим асимптотическим

приближением и рядами Ми устанавливается при помощи *принципа локализации*, согласно которому парциальная волна  $q$ -го порядка при  $\beta \rightarrow \infty$  соответствует семейству лучей, падающих на сферу на расстоянии  $(q + 1/2)\lambda_0$  от ее центра. Таким образом, будем считать, что моды с индексом  $q$  падают на сферу под углом  $\theta_{1,q} = \arcsin[(q + 1/2)/\beta]$ , в то время как другие моды проходят не рассеиваясь и не отражаясь. Эти последние моды образуют плоский фронт, в котором, однако, отсутствует часть его в виде центрального диска радиусом, равным радиусу сферы. В дальней зоне этот неполный волновой фронт представляет собой поле плоской волны, из которого нужно вычесть компоненту, соответствующую дифракции Фраунгофера на круглом отверстии. Лучи, захваченные сферой, могут затем покинуть ее, претерпев некоторое число внутренних отражений, внося таким образом свой вклад в общую картину рассеяния (часть энергии волна теряет из-за поглощения ее в сфере). В заключение заметим, что рассеянное поле можно представить себе состоящим из двух частей, одна из которых обусловлена отражением и преломлением на сфере, а другая — дифракцией волнового фронта на внешней границе рассеивающей сферы.

Разделение поля на две составляющие проявляется в записи коэффициентов Ми. Действительно, каждый из этих коэффициентов содержит два члена, один из которых равен  $-1/2$  и не зависит от вида рассеивающего тела, а другой равен  $(1/2)e^{-i2\alpha_q}$  и существенно зависит от рассеивателя через фазу  $\alpha_q$ . Первый член определяет дифракцию Фраунгофера, в то время как второй связан с отражением и преломлением света на сфере.

Интерференция между различными составляющими приводит к появлению быстрых осцилляций интенсивности при изменении направления наблюдения рассеяния.

В дальнейшем мы рассмотрим теорию дифракции на сферах больших размеров лишь в общих чертах, более подробно эта теория представлена в книге ван де Хюлста. Например, основное внимание мы обратим на вычисление сумм, содержащих фазовые сдвиги. При этом будем полагать, что оставшиеся члены, пропорциональные постоянно множителю  $1/2$ , дают картину, характерную для дифракции на диске.

С учетом принципа локализации поставим в соответствие  $q$ -й парциальной волне луч, падающий под углом  $\theta_{1,q}$ . Используя асимптотические выражения для цилиндрических функций, сначала Дебай, а затем ван де Хюлст получили следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \exp(-i2\alpha_q^h) &\sim \exp[i2(\beta f_q - \alpha f'_q)] \frac{1 - ir_p \exp(i2\alpha f'_q)}{1 + ir_p \exp(-i2\alpha f'_q)} = \\ &= -i \exp(i2\beta f_q) \sum_{p \neq 0}^{\infty} \varepsilon_p^h [i \exp(-i2\alpha f'_q)]^p, \end{aligned} \quad (6.13.27)$$

в которых коэффициенты  $\varepsilon_p^h$  определяются следующим образом:

$$\varepsilon_p^h = \begin{cases} r_p, & p = 0, \\ (1 - (r^h)^2)(-r_p)^{p-1}, & p = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (6.13.28)$$

здесь  $r_p^h(\theta_1)$  — коэффициенты Френеля для  $h$ -волны, падающей под углом  $\theta_{1,q}$ , а величина  $f_q$  определяется выражениями

$$f_q = \cos \theta_{1,q} + (\theta_{1,q} - \pi/2) \sin \theta_{1,q}, \quad f'_q = \cos \theta_{2,q} + (\theta_{2,q} - \pi/2) \sin \theta_{2,q}, \quad (6.13.29)$$

где  $\theta_{2,q}$  — угол преломления. Заменяя  $r^h$  на  $r^e$ , можно получить аналогичное выражение для  $\exp(-i2\alpha_q^e)$ . Используя затем асимптотические выражения для  $\pi_q$  и  $\tau_q$  при больших  $q$  и конечных  $\theta$ , а именно

$$\begin{aligned} \pi_q &\sim [1/(q+1)][2/(\pi q \sin^3 \theta)]^{1/2} \sin[(q+1/2)\theta - \pi/4], \\ \tau_q &\sim [(1/(q+1))[(2q)/(\pi \sin \theta)]]^{1/2} \cos[(q+1/2)\theta - \pi/4], \end{aligned} \quad (6.13.30)$$

мы получаем (см. работу [22, Sect. 3.5.2])

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\beta} \sum_{t=-1,1} \varepsilon_p^h (\sin \theta_{1,q})^{1/2} e^{i\xi_q}, \\ \xi_q &= 2\beta(npf'_q - f_q) - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4}t + t\beta\theta \sin \theta_{1,q} + 2\pi m; \end{aligned} \quad (6.13.31)$$

здесь  $m$  — произвольное целое число. Поскольку сумма по  $q$  в выражении для  $S_1(\theta)$  содержит большое число относительно медленно меняющихся членов, ее можно заменить интегралом. Таким образом,

$$S_1(\theta) \sim a \left( \frac{a}{\lambda \sin \theta} \right)^{1/2} \sum_{\substack{p=0 \\ t=-1,1}}^{\infty} \int_0^1 d \sin \theta_1 (\sin \theta_1)^{1/2} \varepsilon_p^h e^{i\xi}. \quad (6.13.32)$$

Вычислим этот интеграл методом стационарной фазы. Это означает, что при больших  $\beta$  основной вклад в интеграл дает то значение  $\bar{\theta}_1$  угла  $\theta_1$ , для которого  $d\xi/d\theta_1 = 0$ . Таким образом, мы имеем

$$\Theta + t\theta - 2\pi m = 0, \quad (6.13.33)$$

где

$$\Theta \equiv 2p(\bar{\theta}_2 - \frac{1}{2}\pi) + \pi - 2\bar{\theta}_1. \quad (6.13.34)$$

В окрестности угла  $\bar{\theta}_1$  функцию  $\xi$  можно разложить в ряд по  $q - \bar{q}$ :

$$\xi = \bar{\xi} + b(q - \bar{q})^2 + \dots, \quad (6.13.35)$$

причем  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{q}$  связаны между собой соотношением  $\sin \bar{\theta}_1 = (\bar{q} + 1/2)\beta^{-1}$ , а коэффициент  $b$  дается выражением

$$b = (1/2)(d^2\xi/dq^2)|_{q=\bar{q}} = [1/(2\beta \cos \bar{\theta}_1)](d\Theta/d\bar{\theta}_1). \quad (6.13.36)$$

Таким образом, окончательно получаем следующее асимптотическое выражение:

$$S_1(\theta) \sim a \sum_{p,t} \varepsilon_p^h \left( \frac{\sin 2\bar{\theta}_1}{2 \sin \theta |d\Theta/d\bar{\theta}_1|} \right)^{1/2} \exp \left[ i\pi \left( \frac{s}{4} - \frac{p}{2} - \frac{t}{4} - m \right) + i\delta \right], \quad (6.13.37)$$

где  $s = \text{sgn } d\Theta/d\bar{\theta}_1$  и  $\delta \equiv 2\beta(pn \cos \bar{\theta}_2 - \cos \bar{\theta}_1)$ . Наконец, заменяя в выражении (6.13.37)  $\varepsilon_p^h$  на  $\varepsilon_p^e$ , находим  $S_2(\theta)$ .

Выполненные выше расчеты можно провести более строго, если рассеянное поле представить в виде ряда Ми и затем применить к этому ряду метод Ватсона—Редже. Основная трудность, которую придется преодолеть при таком подходе, заключается в векторном характере процесса рассеяния. Если использовать скалярное представление поля, то в случае сферы можно шаг за шагом повторить выкладки, описанные в разд. 6.5 для кругового цилиндра (подробнее об этом см. в книге Нуссенцевейга [22], указанной в литературе к гл. 4 настоящей книги).

### 6.13.7. Теория глории и радуги в приближении геометрической оптики

Если радиус сферы гораздо больше длины волны, то поле рассеяния такой сферы можно найти, используя приближение геометрической оптики (см. гл. 2) или подход, развитый в разд. 6.13.6. В частности, используя соотношения (6.13.33) и (6.13.34), легко показать, что угол рассеяния  $\theta$ , измеренный относительно направления  $\hat{z}$  падающей волны, связан с углом падения  $\theta_1$  простым соотношением (рис. 6.7, б):

$$\theta = (p - 1)\pi + 2\theta_1 - 2p\theta_2, \quad (6.13.38)$$

где  $p - 1$  — число внутренних отражений, а  $\theta_2$  — угол преломления.

Если на сферу радиусом  $a$  падает плоская волна, то поле отраженного луча  $f(\theta)$  [см. выражение (2.12.42)] пропорционально величине  $(\rho'_1 \rho'_2)^{1/2}$ , где  $\rho'_1$  и  $\rho'_2$  — радиусы кривизны волнового фронта, отраженного от поверхности сферы. Учитывая затем соотношение (2.11.26), мы находим, что  $f(\theta) \propto a/2$ . Таким образом, сфера, у которой радиус больше длины волны, рассеивает свет изотропно.

В более общем случае, т. е. когда лучи проникают в диэлектрическую сферу и испытывают  $p - 1$  внутренних отражений, интенсивность рассеяния  $i(\theta)$  в дальней зоне, как следует из выражения (6.13.37), записывается в следующем виде:

$$i(\theta) \propto \frac{\sin 2\theta_1}{2 \sin \theta (d\theta/d\theta_1)} = \frac{\sin 2\theta_1}{4 \sin \theta [1 - (p/n)(\cos \theta_1/\cos \theta_2)]} \equiv D(\theta_1), \quad (6.13.39)$$

где  $D$  — так называемый коэффициент расходимости [ср. с выражением (2.13.52)].

В соответствии с выражением (6.13.39) интенсивность рассеяния становится бесконечной при  $\sin \theta = 0$  или при  $d\theta/d\theta_1 = 0$ . В случае  $\sin \theta = 0$  при  $\sin 2\theta_1 \neq 0$  интенсивность оказывается бесконечно большой для прямого рассеяния назад (*явление глории*) или для прямого рассеяния вперед, в то время как в случае  $d\theta/d\theta_1 = 0$  мы имеем *явление радуги*.

Глория возникает, когда угол рассеяния отличается от угла падения  $\theta_1 \neq 0, \pi/2$  на число, кратное  $\pi$ . Распределение интенсивности поля в дальней зоне при рассеянии сферической частицей назад, соответствующее лучам глории, совпадает с распределением, которое дает кольцевой волновой фронт. Таким образом, в дальней зоне образуется центральное пятно с максимальной яркостью, окруженное кольцами с постепенно убывающей интенсивностью.

Явление глории хорошо известно в метеорологии. Глория имеет вид окрашенных концентрических колец, красных в наружной части и фиолетовых во внутренней, с яркой областью в центре. Вся картина при этом наблюдается в направлении, противоположном направлению на Солнце. Глорию не нужно путать с дифракционной короной, которая окружает закрытое пеленой или облаками Солнце. Глорию можно наблюдать, если встать на холм и посмотреть на свою собственную тень. Можно увидеть глорию во время полета на самолете, наблюдая за его тенью на окружающих легких облаках или дымке. При благоприятных условиях наблюдатель увидит, что тень от головы или самолета окружена ярким гало.

Из истории физики известно, что в 1895 г. Ч.Т.Р. Вильсон построил первую свою камеру с целью экспериментального изучения глории.

Угол падения луча глории (рис. 6.21) нетрудно вычислить по формуле (6.13.38) с учетом, что  $\sin \theta = 0$ . Учитывая при этом, что любой из углов  $\theta$  и  $\theta_1$  меньше чем  $\pi/2$ , для луча глории, испытывающего  $p - 1$  отражений, находим

$$\theta_1 = p\theta_2 + (2 - p)(\pi/2). \quad (6.13.40)$$

Используя закон Снеллиуса для однократно отраженного луча  $p = 2$ , это соотношение можно записать в виде  $\cos \theta_2 = n/2$ . Поскольку угол  $\theta_2$  принимает значение между 0 и  $\pi/4$ , показатель преломления  $n$  должен быть заключен в интервале между 2 и  $\sqrt{2}$ . Аналогичные ограничения можно получить и для  $p > 2$ . Здесь необходимо указать, что,

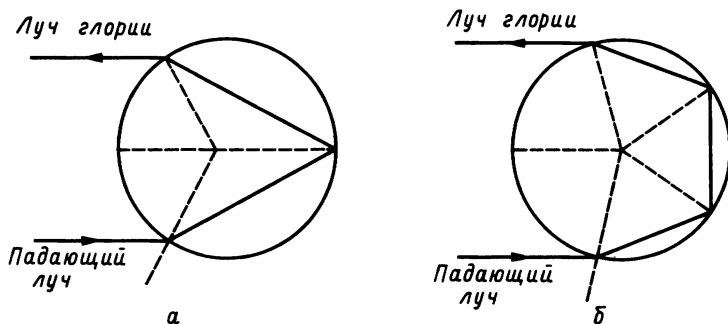


Рис. 6.21. Лучи славы в случае одного (а) и двух отражений (б).

согласно геометрической оптике, слава на водяных каплях ( $n = 1,33$ ) вообще не может наблюдаться! Учитывая невозможность объяснения данного эффекта в рамках геометрического приближения — случай сам по себе довольно значительный с точки зрения физики, — ван де Хюлст пришел к предположению, что поворот лучей славы происходит как вследствие нескольких отражений внутри капли, так и частично из-за пробега по поверхности капли в виде поверхностной волны.

Красивое явление радуги с древнейших времен привлекало внимание натуралистов [35]. Она часто возникает после грозы, когда лучи солнца освещают облака. Аристотель предполагал, что радуга — это необычный тип отражения солнечных лучей от облаков, возникающий при определенных углах падения и приводящий к возникновению радужных лучей, образующих круговой конус. Английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон [36] впервые в 1266 г. измерил угол ( $138^\circ$ ) между лучами радуги и падающим светом. В 1304 г. немецкий монах Теодорик из Фрейберга предположил, что радуга возникает в каждой капельке облака. Ту же идею высказал впоследствии Антонио Доминиканский (архиепископ из Спалато) в своей книге “De Radiis Visus et Lucis” (1611). Исаак Ньютон приводит следующий отрывок из этой книги: « ... ибо он учит там, что внутренняя дуга образуется в круглых каплях дождя посредством двух преломлений солнечного света и одного отражения между ними в каждой капле воды; он доказывает свои объяснения при помощи опытов, произведенных с фиалом, наполненным водой, и со стеклянными шарами, наполненными водой и помещенными на солнце так, чтобы были видны цвета обеих дуг. То же объяснение приводил Декарт в своих Метеорах, исправив объяснение внешней дуги...»<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ньютон И. Оптика. Книга I, ч. 2, предложение 9, задача 4. — М.—Л.: 1927. — Прим. перев.

Ньютон дополнил геометрическую теорию радуги объяснением ее наиболее загадочного свойства — окрашиваться в разные цвета. Основываясь на результатах своих исследований по разложению белого света в призмах, он объяснил, что наблюдаемая картина является набором монохроматических радуг, каждая из которых немного смещена относительно предыдущей. На основе тщательных измерений Ньютон вычислил радужный угол для красного  $137^\circ 58'$  и для фиолетового  $139^\circ 43'$  цветов.

В 1835 г. Р. Поттер указал, что пересечение различных групп световых лучей в капле приводит к образованию каустики. На основе этих данных Эйри в 1838 г. удалось найти распределение интенсивности в монохроматической радуге, причем в своих расчетах он использовал знаменитый интеграл радуги, известный теперь как функция Эйри. Метод, которым воспользовался Эйри (рис. 6.22), состоял в применении принципа Гюйгенса к волновому фронту, огибающая которого описывается кубической функцией.

В соответствии с формулой (6.13.39) радуга возникает при условии, что  $d\theta/d\theta_1 = 0$ . Таким образом, с учетом выражения (6.13.38) углы падения  $\theta_{1,R}$  определяются выражением

$$\theta_{1,R} = \arcsin[(p^2 - n^2)/(p^2 - 1)]^{1/2}. \quad (6.13.41)$$

Поскольку аргумент функции  $\arcsin x$  должен быть меньше единицы, радужный луч должен претерпеть более чем  $n - 1$  внутренних отражений ( $n$  — показатель преломления капли). Например, для капель воды ( $n \cong 4/3$ ) первый радужный луч возникает при  $p = 2$  и рассеивается под углом  $\theta_R^{(1)}$ :

$$\theta_R^{(1)} = \pi + 2 \arcsin[(4 - n^2)/3]^{1/2} - 4 \arcsin[(4 - n^2)/(3n^2)]^{1/2} \cong 138^\circ. \quad (6.13.42)$$

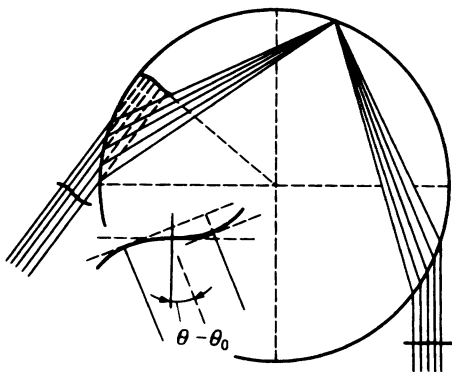


Рис. 6.22. Слияние лучей, рассеянных на капле, приводящее к конгруэнции обратного рассеянных лучей с S-образным волновым фронтом.

Второй радужный луч образуется в результате двух отражений, его угол  $\theta_2^{(2)} \cong 128,7^\circ$ .

Амплитуда поля вблизи радужного угла  $\theta_R$  может быть найдена путем вычисления интеграла в выражении (6.13.32). При этом необходимо заметить, что в окрестности  $\theta_R$  квадратичное разложение (6.13.35), отвечающее форме волнового фронта, заменится на кубическое (см. рис. 6.22):

$$\xi = \xi_R + (q - q_R) \partial \xi / \partial q + (1/6)(q - q_R)^3 \partial^3 \xi / \partial q^3. \quad (6.13.43)$$

При этом гауссов интеграл, приводящий к выражению (6.13.37), заменится функцией Эйри. Картина поля, характерная для монохроматической радуги, определяется распределением поля вблизи каустики и выглядит как ряд полос на освещенной стороне капли. Вычисления, проделанные на основе рядов Ми, развеяли оставшиеся сомнения о фактическом присутствии резких полос. Недавно в работе [37] к интегралу, аналогичному интегралу из выражения (6.13.32) и полученному при вычислении амплитуды рассеяния методом Ватсона — Редже, авторы применили метод Честера — Фридмана — Урселла (ЧФУ). Метод ЧФУ дает выражение, в котором функция Эйри входит в комбинации со своей производной  $Ai'$ ; таким образом, нули функции Эйри компенсируются присутствием функции  $Ai'$ . Как видно из рис. 6.23, эти изменения приводят к значительно более высокой точности расчетов.

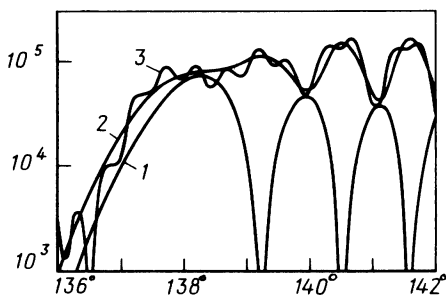


Рис. 6.23. Угловое распределение интенсивности рассеянного света, вычисленное для лучей из рис. 6.22; масштабный параметр  $\beta = 1500$ . 1 — распределение интенсивности, полученное вычислением дифракционного интеграла для  $S$ -образного волнового фронта; 2 — распределение волн, полученное с учетом вклада поверхностных волн, возникающих в представлении Ватсона — Редже при скалярной аппроксимации рассеянного поля; 3 — решение, полученное при сложении более чем 1500 членов разложения в представлении рассеянного поля в виде ряда по парциальным волнам. (Из книги Нуссенцвейга [36].)



## ЗАДАЧИ

## Раздел 6.2

1. Покажите, что для металлической полуплоскости интеграл из (6.2.2) при  $\phi' > \pi$  записывается в виде

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \phi) &= \frac{-i}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\rho \cos \beta} \frac{\cos[(\beta + \phi)/2]}{\sin[(\beta + \phi)/2 + \cos(\phi'/2)]} d\beta = \\
 &= e^{ik\rho \cos(\phi - \phi')} U(\phi - \phi' + \pi) + e^{-ik\rho \cos(\phi + \phi')} U(\phi + \phi' - 3\pi) + \frac{i}{4\pi} \times \\
 &\times \int_{\text{КНС}_2} \left\{ \frac{-1}{\sin[(\beta + \phi)/2] + \cos(\phi'/2)} + \frac{1}{-\sin[(\beta + \phi)/2] + \cos(\phi'/2)} \right\} + \\
 &+ \cos\left(\frac{\beta + \phi}{2}\right) e^{-ik\rho \cos \beta} d\beta.
 \end{aligned}$$

2. Учитывая приведенное в задаче 1 интегральное представление, получите соотношения Зоммерфельда для поля при дифракции  $p$ - или  $s$ -волны на металлической полуплоскости, а именно

$$\begin{aligned}
 u_{p,s}(\rho, \phi) &= e^{ik\rho \cos(\phi - \phi')} F\{- (2k\rho)^{1/2} \cos[(\phi - \phi')/2]\} \mp \\
 &\mp e^{ik\rho \cos(\phi + \phi')} F\{- (2k\rho)^{1/2} \cos[(\phi + \phi')/2]\},
 \end{aligned}$$

где  $F$  — комплексный интеграл Френеля, а знаки минус и плюс относятся соответственно к  $p$ - и  $s$ -поляризациям.

3. Вычислите распределение токов на металлической полуплоскости при освещении ее  $s$ -волной с углом падения  $\phi' = \pi/2$ .

4. Покажите, что функция Малюжинца  $M$ , определяемая выражением (6.2.15), может быть представлена следующим интегралом:

$$M(\alpha) = \exp\left[ \frac{i}{8\Phi} \int_0^\alpha d\mu \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi v}{4\Phi}\right) \frac{1}{\cos(v - \mu)} dv \right].$$

*Подсказка.* Найдите выражение для функции  $d \ln M/d\alpha$ .

5. Используя приведенное в задаче 4 представление функции  $M(\alpha)$ , докажите следующие соотношения:

$$M(\alpha + 2\Phi)/M(\alpha - 2\Phi) = \operatorname{ctg} [(1/2)(\alpha + \pi/2)],$$

$$M(\alpha + \pi/2)M(\alpha - \pi/2) = M^2(\pi/2) \cos[(\pi\alpha)/(4\Phi)],$$

$$M(\alpha + \Phi)M(\alpha - \Phi) = M^2(\Phi)M'(\alpha),$$

где  $M'$  — функция Малюжинца при  $\phi' = \Phi/2$ .

6. Покажите, что при  $\Phi = \pi$  функция  $M$  из предыдущей задачи принимает вид

$$M(\alpha) = \exp\left[ \frac{1}{8\pi} \int_0^\alpha \frac{\pi \sin(u) - 2^{3/2} \pi \sin(u/2) - 2u}{\cos u} du \right].$$

7. Покажите, что при  $\Phi = \pi$  функцию Малюжинца  $M$  можно записать следующим образом:

$$M(\alpha) = \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1 - 2^{1/2} \alpha}{1 + 2^{1/2} \alpha} \right)^{1/8} \exp \left[ -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_{2n}| \alpha^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} \right];$$

здесь  $E_{2n}$  — числа Эйлера.

8. Вычислите функцию  $g(\alpha)$  при  $\Phi = \pi$  и  $\theta_B \cong \pi/2$ , аппроксимировав функцию  $M(\alpha + \theta_B)$  выражением

$$\begin{aligned} M(\alpha + \theta_B) &\cong M(\alpha + \pi/2) + (\theta_B - \pi/2) dM/d\alpha = \\ &= M(\alpha + \pi/2) - (\theta_B - \pi/2) M(\alpha + \pi/2) \times \\ &\quad \times [\cos(\alpha) - 2^{3/2} \sin(\alpha/2 + \pi/4) - 2\alpha/\pi - 1]/(8 \cos \alpha). \end{aligned}$$

Подсказка. См. задачу 6.6.

9. Покажите, что при  $\Phi = 3\pi/4$  функция Малюжинца  $M$  определяется выражением

$$M(\alpha) = \cos[(\alpha - \pi)/6] \cos[(\alpha + \pi)/6] / [\cos^2(\pi/6) \cos(\alpha/6)].$$

10. Выведите выражение (6.2.11) с помощью тождества (E2) из приложения, учитывая следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{\text{КНС}_2} [S(\beta + \phi) - S(\beta + \phi - 2\pi)] e^{-ik\rho \cos \beta} d\beta &\cong \\ &\cong -(2\pi/k\rho)^{1/2} e^{i\pi/4} [S(2\pi + \phi) - S(\phi)] e^{-ik\rho}. \end{aligned}$$

11. Вычислите коэффициенты дифракции  $D_S$  для прямоугольного клина с помощью выражения (6.2.18). Обсудите, в частности, зависимость  $D_S$  от  $\theta_B$ .

12. Вычислите амплитуду  $S_+$  поверхностной волны, которая возбуждается  $s$ -волной единичной амплитуды, падающей на прямоугольный клин ( $\Phi = 3\pi/4$ ). Подсказка. Используйте выражение, полученное в задаче 9.

## ЛИТЕРАТУРА

1. King R. W. P., Wu T. T., The Scattering and Diffraction of Waves, Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1959.
2. Electromagnetic Scattering, (ed. P.L.E. Uslenghi), Academic Press, New York, 1978.
3. Малюжинец Г. Д. — ДАН СССР, 1958, т. 121, № 3, с. 436—439.
4. Kouyoumtjian R. G. — In: Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics (ed. R. Mittra), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975, p. 166—215.
5. Joo G.-S., Ra J.-W., Shin S.-Y., Electron. Lett., 16, 934, 1980.
- 5a. Keller J. B., J. Appl. Phys., 28, 426, (1957).
6. Rhodes D. R., On the Theory of Scattering by Dielectric Bodies, Rep. 475-1, Antenna Lab., Ohio State Univ., Columbus, 1953.
7. Debye P. J., Phys. Zs., 9, 775 (1908).
8. Poggio A. J., Miller E. K. — In: Computer Techniques for Electromagnetics (ed. R. Mittra), Pergamon, New York, 1973, Ch. 4.
9. Harrington R. F., Field Computation by Moment Method, Macmillan, New York, 1968.
10. Baum C. E., Proc. IEEE, 64, 1598 (1976). [Имеется перевод: Баум К. Э. — ТИИЭР, 1976, т. 64, № 11, с. 53.]
11. Harrison G. R., Appl. Opt., 4, 1275 (1965).

12. *Stroke G. W.* — In: *Handbuch der Physik*, v. 29 (ed. S. Flugge), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1967, p. 426—754.
13. *Денисюк Ю. Н.* — ДАН СССР, 1962, т. 144, № 6, с. 789—791.
14. *Schmahl G., Rudolf D. R.*, *Prog. Opt.*, **14**, 195 — 244, (1976).
15. *Labeysie A., Flamand J.*, *Opt. Commun.*, **1**, 5, (1969).
16. *Tamir T.*, *Integrated Optics*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975. [Имеется перевод: *Тамир Т.* Интегральная оптика. — М.: Мир, 1978.]
17. *Samson J. A. R.*, *Techniques of Vacuum Ultraviolet Spectroscopy*, Wiley, New York, 1967.
18. *Electromagnetic Theory of Gratings* (ed. R. Petit), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.
19. *Zaki K. A., Neurenther A. R.*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **AP-19**, 208 (1971).
20. *Hessel A., Oliner A. A.*, *Appl. Opt.*, **4**, 1275 (1965).
21. *Microwave Antenna Theory and Design* (ed. S. Silver), MIT Radiat. Lab. Ser., v. 12, Cambridge, Massachusetts, 1949, Ch. 2.
22. *Newton R. G.*, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York, 1966. [Имеется перевод: *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. — М.: Мир, 1969.]
23. *Kerker M.*, *The Scattering of Light*, Academic Press, New York, 1969.
24. *Twersky V.*, *Appl. Opt.*, **3**, 1150 (1964).
25. *Noble B.* — In: *Electromagnetics Waves* (ed. R. Langer), Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1962, p. 323—360.
26. *Kleinman R. E.*, *Proc. IEEE*, **53**, 848 (1965). [Имеется перевод: *Клейнман Р.Е.* — ТИИЭР, 1965, т. 53, № 8, с. 975.] См. также ссылку [2] из гл. 1 настоящей книги.
27. *Mie G.*, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **25**, 377 (1908).
28. *Debye P.*, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **30**, 57 (1909).
29. *Wickramasinghe N. C.* *Light Scattering Functions for Small Particles*, Wiley, New York, 1973.
30. *Ландсберг Г.С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.
31. *Vauclair S.* — In: *Astrophysical Processes in Upper Main Sequence Stars* (eds. B. Hauck., A. Maeder), Geneva Observ., CH-1290, Sauverny, Switzerland, 1983, p. 167.
32. *Minogin V. G., Letokhov V. S.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 413 (1979).
33. *Irvine W. M.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 16 (1965).
34. *Ashkin A., Dziedzic J. M.*, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1351, 1977.
35. *Tricker R. A. R.*, *Introduction to Meteorological Optics*, Am. Elsevier, New York, 1970.
36. *Nussenzveig H. M.* — In: *Light from the Sky* (ed. J. Walker), Freeman, San Francisco, California, 1980, p. 54—65.
37. *Khare V., Nussenzveig H. M.*, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 976, 1974.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Bohren C. F., Huffman D. R.*, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, New York, 1983.
- Фабелинский И.Л.* Молекулярное рассеяние света. — М.: Наука, 1976.
- Ishimaru A.*, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, 1978. [Имеется перевод: *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — В 2-х т. — М.: Мир, 1981.]

- Казанцев А. П.* — ВФН, 1978, т. 124, вып. 1, с. 113 — 145.
- Lax P. D., Phillips R. S.* Scattering Theory, Academic Press, New York, 1967.
- Maystre D.*, Prog. Opt., 21, 3 — 57 (1984).
- Reed M., Simon B.*, Methods of Modern Mathematical Physics, v. 3, Academic Press, New York, 1979.
- Stenholm S., Minogin V. G., Letokhov V. S.*, Opt. Commun., 25, 107 (1978).
- Stroke G. W.*, Prog. Opt., 2, 1 — 72 (1963).
- van de Hulst H. C.*, Multiple Light Scattering, Academic Press, New York, 1980.
- Wilcox C. H.*, Scattering Theory for Diffraction Gratings, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.
- Welford W. T.*, Prog. Opt., 4, 241—280, 1965.

# ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ И ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ ФАБРИ — ПЕРО

## 7.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕЗОНАТОРОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 7.1.1. Обычные колебательные системы

Физическая система, выведенная из состояния равновесия импульсным воздействием, через некоторое время возвращается в исходное состояние, совершая при этом ряд затухающих колебаний. Данное свойство имеет общую природу и присуще как небоскрегам, раскачиваемым под действием ветра, так и атомам, взаимодействующим с импульсным электромагнитным полем. Единственным различием в поведении этих систем является скорость затухания колебаний. В некоторых случаях, когда основную роль играют процессы затухания, колебания вообще не возникают, в других случаях колебания могут длиться столь долго, что систему можно рассматривать как *идеальный осциллятор*.

Читатели, владеющие элементарными навыками в области электроники, знают, что возбуждение системы из параллельно соединенных катушки индуктивности  $L$  и конденсатора емкостью  $C$  приведет к тому, что в ней возникает переменный ток, угловая частота колебаний которого дается выражением  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , причем этот ток будет течь бесконечно долго. Однако как катушка индуктивности, так и конденсатор имеют омические потери, которые можно учесть, если в соответствующие эквивалентные цепи ввести активные сопротивления  $R_L$  и  $R_C$  (см. врезку на рис. 7.1), что приведет к затуханиям колебаний в рассматриваемой системе. Если через  $i(t)$  обозначить ток, протекающий через контур, сформированный из  $L$  и  $C$ , то можно записать следующее выражение:

$$i(t) = (i_0/\sin \phi) e^{-Rt/2L} \sin \{ [1/(LC) - [R/(2L)]^2]^{1/2} t + \phi \}, \quad (7.1.1)$$

где  $R_L + R_C = R$ , а  $i_0$  и  $\phi$  — соответственно начальный ток и фаза колебаний. Удобно характеризовать затухание этих колебаний *добротностью*  $Q$ :

$$Q = \pi\tau/T = [L/(CR^2) - \frac{1}{4}]^{1/2} \sim (L/C)^{1/2} 1/R, \quad (7.1.2)$$

где  $\tau \sim 2L/R$  — постоянная затухания и  $T = 2\pi/\omega_0$  — период колебаний [см. выражение (7.1.1)]. Добротность  $Q$  является мерой отклонения данной системы от идеальной, т. е. от системы, колеблющейся

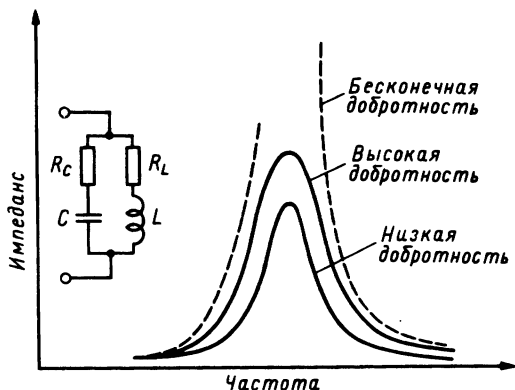


Рис. 7.1. Зависимость импеданса резонансной цепи от частоты при различных  $Q$ .

бесконечно долго. Чем больше  $Q$ , тем более близка данная система к идеальной. С помощью выражения (7.1.1) нетрудно показать, что  $Q = (1/2)\omega_0[Li^2 + (1/C)(\int i dt)^2]/Ri = 2\pi$ ; иными словами, с точностью до множителя  $2\pi$  величина  $Q$  равна отношению энергии, запасенной в  $LC$ -контуре, к энергии, теряемой за один период колебаний.

Найдем теперь импеданс  $Z(\omega)$   $LC$ -контур, выразив его через  $L$  и  $C$ . Для случая  $R^2 \ll L/C$  вблизи резонансной частоты  $\omega_0 \cong \cong 1/(LC)^{1/2}$  импеданс  $Z(\omega)$  дается выражением

$$Z(\omega) = (L/C)^{1/2}Q/[1 + i2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0] \cong |Z(\omega)|e^{i\beta(\omega)}. \quad (7.1.3)$$

(В данном разделе мы будем использовать круговую частоту  $\omega$ ; в следующем разделе мы перейдем к частоте  $\nu$ .)

В соответствии с выражением (7.1.3) при  $Q \gg 1$  зависимость модуля величины  $Z$  от расстройки  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  имеет очень острый резонансный характер (рис. 7.1), в то время как фаза  $\beta(\omega)$  при прохождении  $\omega$  через  $\omega_0$  претерпевает резкий скачок.

Кроме того, из выражения (7.1.3) нетрудно показать, что полоса частот по уровню 0,71 от максимального значения (или по уровню 3 дБ от резонансной амплитуды) равна  $B = \omega_0/Q$ .

Выражение (7.1.1) для тока  $i(t)$  остается справедливым, даже если сопротивления  $R_L$  и  $R_C$  отрицательны, причем величина  $R$  также отрицательна. Это означает, что ток в системе будет совершать колебания с экспоненциально нарастающей амплитудой.

Если параллельно соединить два контура с одной и той же резонансной частотой, но с разными  $Q$  и разными импедансами  $Z(\omega_0)$ , то результирующий импеданс запишется в виде

$$Z_{\text{рез}}(\omega) = Z_{\text{эКВ}}/[1 + i2Q_{\text{эКВ}}(\omega - \omega_0)/\omega], \quad (7.1.4)$$

где

$$Z_{\text{эКВ}} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2), \quad Q_{\text{эКВ}} = (Q_1 Z_2 + Q_2 Z_1) / (Z_1 + Z_2), \quad (7.1.5)$$

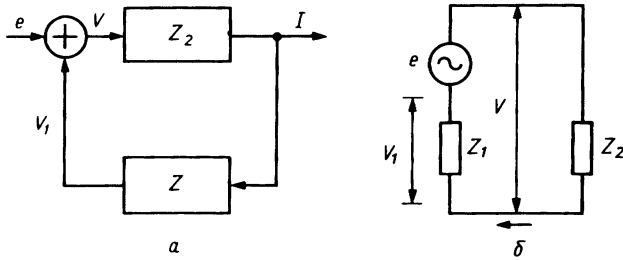


Рис. 7.2. *a* — цепь с обратной связью; *б* — эквивалентная схема для определения тока  $I$  в зависимости от величины напряжения  $e$ , создаваемого генератором.

причем  $Z_1 = Z_1(\omega_0)$  и  $Z_2 = Z_2(\omega_0)$ . Таким образом, когда  $Z_1 + Z_2 = 0$ , величина  $Z_{\text{эв}}$  может быть очень большой. Следовательно, чтобы получить резонансную цепь с бесконечно большим импедансом, к имеющейся резонансной цепи необходимо подключить другую цепь, импеданс которой противоположен по знаку и равен по абсолютной величине импедансу первой цепи. Отрицательное значение  $Z_2(\omega_0)$  является лишь необходимым условием для достижения этой цели.

Любой генератор может быть представлен в виде генератора шума с комплексной амплитудой  $e$ , включенного в цепь из элементов  $Z_1$  и  $Z_2$  (рис. 7.2, *a*), где  $Z_1$  представляет собой пассивный, а  $Z_2$  — активный элемент. В теории систем связь между амплитудой  $e$  и током  $I$ , протекающим через цепь, есть не что иное, как связь типа замкнутой петли, показанной на рис. 7.2, *б*. Отклик  $Z_1(\omega)$  фильтра обратной связи может сильно зависеть от частоты, определяя таким образом частоту генератора, в то время как  $Z_2(\omega)$  может практически не зависеть от частоты вблизи резонанса. Кроме того, если  $Z_1$  соответствует обычно линейному отклику, то  $Z_2$  нелинейно зависит от прикладываемого напряжения и, таким образом, определяет амплитуду генерации.

В качестве альтернативы цепи, изображенной на рис. 7.2, можно представить себе цепь (рис. 7.3), состоящую из генератора с нелинейной обратной связью, насыщаемого усилителя с усилением  $A(V)$ , почти не зависящим от частоты  $\omega$  вблизи  $\omega_0$  и уменьшающимся с увеличением  $V$ , и фазосдвигающей цепи, имеющей частотный отклик

$$F(\omega) = |F|e^{-i\beta(\omega)} = [1 + i2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0]^{-1}, \quad (7.1.6)$$

где  $\beta$  — фазовый сдвиг входного сигнала после полного обхода петли обратной связи. Иными словами, в цепь насыщаемого усилителя мы включили все частотно-независимые члены, для того чтобы отклик  $F$  в цепи обратной связи при  $\omega = \omega_0$  был в точности равен единице. Строго говоря, с целью учета нелинейного вклада активных элементов в фазовый множитель к этому необходимо добавить еще и условие зависимости амплитуды  $V$  от добротности  $Q$ .

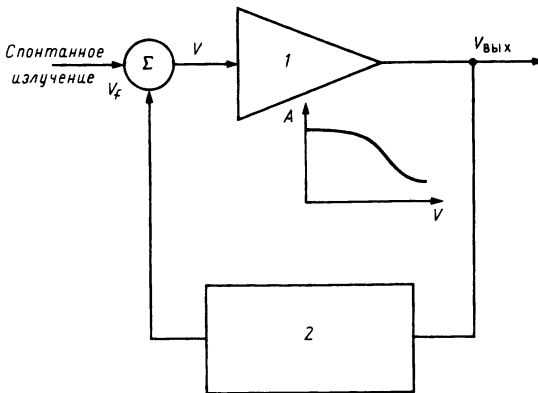


Рис. 7.3. Цепь с обратной связью, представляющая нелинейный генератор, который включает в себя насыщаемый усилитель (1) с характеристической кривой зависимости  $A(V)$  усиления от входного напряжения, изображенной на врезке, и насыщаемую фазосдвигающую цепочку с  $F(\omega) = e^{i\beta(\omega)}$  (2).

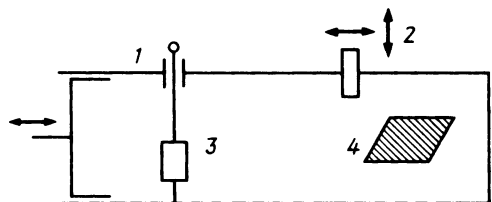
### 7.1.2. Микроволновые (СВЧ) и оптические генераторы

В отличие от низкочастотных генераторов, для которых параметры резонансной цепи определяются легко и однозначно, *микроволновые* [1] и *оптические* [2—6] генераторы требуют более глубокого математического и физического анализа. Для определенности рассмотрим генератор, в резонатор которого помещен лавинный диод с обратносмещенным переходом (рис. 7.4). Диод можно характеризовать поляризацией  $P$ , действующей как источник электрического поля в соответствии с выражением (1.2.8). Таким образом, электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  можно интерпретировать как отклик резонатора на излучение диполей, распределенных в области диодного перехода:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \iiint_{\text{Переход}} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') dV', \quad (7.1.7)$$

где  $\Gamma$  — диадное представление отклика на излучение диполя, расположенного в точке  $\mathbf{r}'$  и включенного в момент времени  $t'$  на очень ко-

Рис. 7.4. Схематическое представление микроволнового генератора с отрицательным сопротивлением. 1 — к источнику смещающего напряжения; 2 — настройка; 3 — устройство; 4 — нагрузка.





роткий промежуток времени, т. е. представляет собой пространственно-временную функцию Грина резонатора.

Поскольку  $P$  является нелинейной функцией вектора  $\mathbf{E}$ , для вычисления амплитуды и частоты генерации можно в принципе воспользоваться уравнением (7.1.7) [или эквивалентным ему уравнением (1.2.9) с граничными условиями]: Эти расчеты можно значительно упростить, если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  представить в виде комбинации *мод резонатора*. Согласно этому представлению, которое мы рассмотрим ниже более детально, резонатор и, следовательно, весь генератор можно промоделировать *бесконечной дискретной последовательностью простых генераторов со свойствами LC-контуров*. Отсюда в свою очередь следует, что *система может генерировать на нескольких частотах*, так что в одних случаях имеет место генерация на одной частоте, в других — на нескольких частотах одновременно. Таким образом возникает совершенно новая ситуация, которая не может быть описана в рамках традиционного анализа LC-цепей; она и определяет коренное различие между генераторами *радиочастотного* и *микроволнового* диапазона.

Третий класс генераторов — это *мазеры* и *лазеры*, которые обычно объединяют в класс *квантовых генераторов*. Их работа основывается на *одноквантовом* обмене энергией между лазерным полем и активной средой, что, как показали Шавлов и Таунс, позволяет снять термодинамические ограничения на ширину линии, характерные для стандартных источников излучения.

Одним из наиболее существенных различий между оптическими и микроволновыми генераторами является то, что в последнем случае активная область имеет, как правило, малые размеры по сравнению с длиной излучаемой волны  $\lambda$ , и поэтому такой генератор можно рассматривать как точечный диполь. В лазерном же генераторе, наоборот, размеры активной области велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , поэтому здесь сразу же возникает проблема, связанная с необходимостью учета взаимодействия поля и распределенных диполей.

Замкнутые резонаторы можно применять только в микроволновых генераторах. Известно, что частоты прямоугольного резонатора определяются выражением

$$\omega_{lmn} = \pi c [(l/a)^2 + (m/b)^2 + (n/d)^2]^{1/2}, \quad (7.1.8)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $d$  — размеры прямоугольной области резонатора, а  $l$ ,  $m$  и  $n$  — неотрицательные целые числа, такие, что  $l + m + n \geq 2$ . Если учесть, что, исходя из практических соображений, размеры резонатора должны превышать 1 мм, то очевидно, что такой резонатор уже невозможно использовать для генерации волн субмиллиметрового диапазона ( $< 1$  мм).

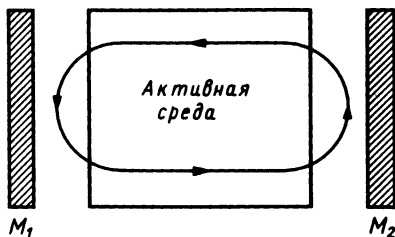


Рис. 7.5. Схематическое представление лазерного генератора.

Для того чтобы преодолеть эту трудность, Прохоров, Шавлов и Таунс предложили использовать (открытый) резонатор Фабри — Перо. Таким образом, лазерный генератор имеет вид, показанный на рис. 7.5, в котором плоская волна со средней интенсивностью  $I$  совершает много проходов в прямом и обратном направлениях между зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  (с коэффициентами отражения  $R_1$  и  $R_2$  соответственно), усиливаясь активной средой.

Представление пучка плоской волной на самом деле прямо связано с предположением о стационарном режиме генерации лазера, когда потери и усиление взаимно компенсируются (*надпороговый режим*). При работе *ниже порога* каждый элементарный объем излучает некогерентно с соседними, так что результирующее поле представляет собой суперпозицию полей, распространяющихся во *всех направлениях*.

Используя условия обратной связи, можно записать,

$$1 = R_1 R_2 e^{2G}, \quad (7.1.9)$$

где  $G$  — усиление за полный проход. Кроме того, если потребовать, чтобы при  $\omega = \omega_0$  фазовый набег плоской волны за полный проход был равен  $2m\pi$ , где  $m$  — целое число, то в общем случае (7.1.6) мы получаем выражение

$$\beta_m(\omega) = 2m\pi + \arctg [2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0], \quad (7.1.10)$$

которое в последующих разделах выведем с помощью более строгого рассмотрения.

В некоторых случаях важно учесть расстройку частоты генерации резонатора относительно частоты  $\omega_L$ , соответствующей максимуму кривой коэффициента усиления активной среды. Соответственно необходимо также учитывать спектральную зависимость коэффициента усиления  $G$  и полного усиления  $A$ , так что в общем случае мы имеем  $A = A(I, \omega, \omega_L)$ . Кроме того, не всегда можно пренебречь и набегом фазы, обусловленным активной средой. В этом случае обычно вводится *фазосдвигающая цепочка* с функцией отклика  $F_L(I, \omega, \omega_L) = \exp[-i\beta_L(I, \omega, \omega_L)]$  (где  $\beta_L(I, \omega, \omega_L)$  — нелинейная функция, зависящая от интенсивности  $I$ ) в цепи обратной связи, показанной на рис. 7.3.

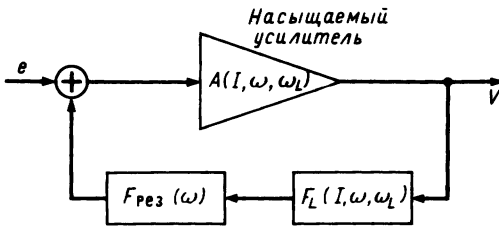


Рис. 7.6. Цепь с нелинейной обратной связью, эквивалентная лазерному генератору.

Таким образом, исходя из проведенного выше рассмотрения, мы можем связать в цепи обратной связи на рис. 7.6 выход  $V(\omega)$  ( $|V|^2 = I$  — средняя интенсивность оптического излучения внутри лазера) с входом  $e(\omega)$ ; это — эквивалентная схема лазерного генератора, изображенного на рис. 7.5. Соответствующее соотношение записывается следующим образом:

$$V(\omega) = e(\omega) A(I, \omega, \omega_L) / [1 - A(I, \omega, \omega_L) F_{\text{рез}}(\omega) F_L(I, \omega, \omega_L)]. \quad (7.1.11)$$

В отсутствие входного сигнала  $e(\omega)$  система будет находиться в режиме свободной генерации, если выполняется следующее *условие резонанса*:

$$A(I, \omega, \omega_L) |F_{\text{рез}}(\omega)| \exp[-i\beta_{\text{рез}}(\omega) - i\beta_L(I, \omega, \omega_L)] = 1. \quad (7.1.12)$$

Это условие можно записать в виде системы двух нелинейных уравнений

$$\beta_{\text{рез}}(\omega) + \beta_L(I, \omega, \omega_L) = 2\pi n, \quad A(I, \omega, \omega_L) |F_{\text{рез}}(\omega)| = 1, \quad (7.1.13)$$

из которых можно найти частоту  $\omega$  и интенсивность  $I$  генерируемого пучка.

В принципе лазер должен генерировать линейчатый спектр. Однако в рассматриваемой модели совершенно пренебрегалось наличием у лазера шума. Шавлов и Таунс, привлекая статистические методы, показали, что уширение линии вследствие квантового шума (см. книгу Ярива [8], указанную в литературе к гл. 1 нашей книги) дается выражением

$$\Delta\omega_{\text{ген}} = [(\hbar\omega)/P](\Delta\omega_{\text{рез}})^2 \mu, \quad (7.1.14)$$

где  $\Delta\omega_{\text{рез}}$  — полуширина резонанса по полувывоте,  $P$  — излучаемая лазером мощность, а параметр  $\mu = N_a / [N_a - N_b (g_a/g_b)]_{\text{пор}}$  учитывает тот факт, что в условиях порога, чтобы сохранялось равенство усиления и потерь, конечное увеличение населенности нижнего лазерного состояния  $N_b$  должно сопровождаться увеличением населенности  $N_a$  верхнего лазерного состояния. Поскольку на генерируемое излучение оказывают сильное влияние флуктуации параметров лазерной среды и вибрация выходных зеркал, практически невозможно достичь узкой ширины линии, определяемой выражением (7.1.14).

## 7.2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Микроволновые объемные резонаторы были разработаны главным образом для сантиметрового диапазона волн. Увеличение длины волны  $\lambda$  приводит к необходимости увеличивать линейные размеры резонатора; в предельном случае он сводится к обычному  $LC$ -контур. Уменьшение же  $\lambda$  требует и уменьшения размеров резонатора, что соответственно приведет к понижению его добротности  $Q$ . Вообще говоря, в миллиметровом диапазоне  $Q$  уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из частоты. Для генерации коротких длин волн, скажем субмиллиметрового диапазона, уже невозможно сконструировать объемный резонатор для генерации отдельной моды низшего порядка (например, моды  $TE_{011}$ ), поскольку потребовались бы практически неосуществимые малые размеры резонатора. Поэтому приходится иметь дело с генерацией мод очень высокого порядка, причем режим одномодовой генерации оказывается принципиально недостижимым. При возрастании порядка моды частотный сдвиг между соседними модами сравнивается с шириной отдельной моды, что приводит к уменьшению селективности. Пользоваться такими резонаторами крайне неудобно, поскольку заранее не известно, на какой частоте они будут возбуждаться. Фактически же они генерируют одновременно несколько мод с почти непрерывным спектром, характеризующимся некоторой средней частотой.

Согласно *формуле Рэлея — Джинса*, в случае очень высоких частот число мод в интервале  $\Delta\nu$  для закрытого резонатора объемом  $V$  произвольной формы записывается в виде [7]

$$\Delta n_m = [(8\pi)/c^3] \nu^2 \Delta\nu V, \quad (7.2.1)$$

где  $c$  — скорость света. Отсюда следует, что с возрастанием частоты плотность мод в спектре увеличивается. Для  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Гц (частота генерации He—Ne-лазера) и  $\Delta\nu = 1,5$  ГГц формула (7.2.1) дает около  $1,7 \cdot 10^8$  мод на кубический сантиметр. Отсюда с очевидностью следует, что резонатор объемом  $10 \text{ см}^3$ , представляющий собой замкнутую цилиндрическую полость с металлическими стенками, к которой и применима формула (7.2.1), не в состоянии выделить какую-либо определенную частоту из спектра излучения гелий-неоновой плазмы. В данном случае в спектре генерации будут наблюдаться миллиарды линий, отстоящих друг от друга по частоте на 1 Гц.

Рассуждая таким же образом, Шавлов, Таунс [8] и Прохоров [9] пришли к идее использования резонаторов другого типа, которые выделяли бы из всех остальных мод лишь некоторые, так называемые *основные моды*. Эти авторы рассмотрели такую конфигурацию резонатора, которая обеспечивает очень высокую добротность для основ-

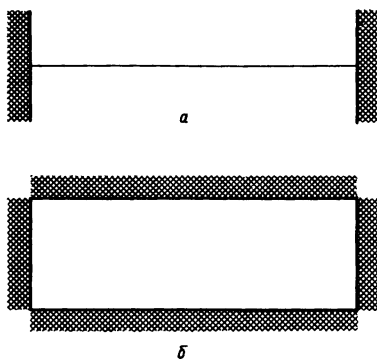


Рис. 7.7. Плоскопараллельный открытый резонатор (а), полученный устранением боковых стенок цилиндрического закрытого резонатора (б).

ных мод, в то время как для остальных (весьма многочисленных) мод потери должны быть столь велики, чтобы при заполнении резонатора активной средой их генерация была бы невозможна.

Простейшим примером резонатора, который удовлетворяет указанным требованиям, является *интерферометр Фабри — Перо* [10] с парой плоскопараллельных зеркал (рис. 7.7). Этот резонатор можно представить себе как обычный резонатор, имеющий форму замкнутой цилиндрической поверхности, у которой устранены боковые стенки, так что модам с высокой добротностью соответствуют лишь две квазиплоские волны, бегущие в противоположных направлениях перпендикулярно плоскости зеркал. Условия распространения этих волн более благоприятны, чем любых других волн, распространяющихся под косыми углами к оптической оси интерферометра Фабри — Перо. То, что некоторая часть мощности теряется вне резонатора за счет плоской коллимированности лучей в пучке, приводит к снижению относительной добротности  $Q$ .

Предполагая, что в резонаторах Фабри — Перо основные моды адекватно представляются плоскими волнами, распространяющимися между зеркалами в прямом и обратном направлениях (расстояние между зеркалами равно  $d$ ), для частот  $\nu_n$  этих мод можно написать простое соотношение:  $\nu_n = \nu_0(1 + n)$ , где  $\nu_0 = c/2d$  — частотный интервал между двумя соседними модами. Заметим, что в случае когда в качестве резонатора используется интерферометр Фабри — Перо, частоту  $\nu$  можно измерить с точностью до величины, кратной  $\nu_0$ . Поэтому  $\nu_0$  называют *областью свободной дисперсии*.

Характерной особенностью этих резонаторов является то, что каждой его моде соответствует определенное *распределение узлов и пучностей стоячих волн*. Однако в некоторых случаях удобно использовать резонаторы, моды которых представляют собой *бегущие волны*. Например, в *кольцевом резонаторе*, предложенном Мацеком и

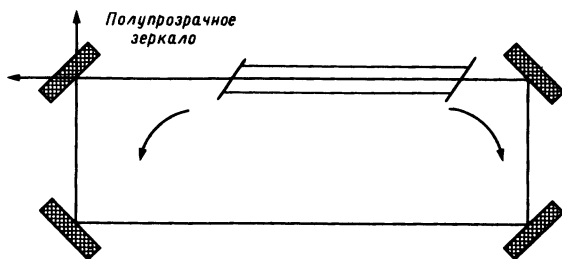


Рис. 7.8. Схематическое представление кольцевого резонатора с квадратным расположением зеркал. Другим типичным расположением зеркал является треугольное. Зеркала могут быть заменены призмами полного внутреннего отражения, которые имеют более высокий порог оптического разрушения.

Дэвисом [11], волны распространяются как по часовой, так и против часовой стрелки (рис. 7.8). Если одну из этих волн удастся устранить, то поле в резонаторе будет представлять собой одну бегущую волну. Вращение кольцевого резонатора вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, приводит к расщеплению частот этих двух противоположно направленных волн. Измеряя их частоту биений, можно определить скорость вращения системы. Этот принцип применяется в *лазерных гироскопах*.

Если уширение резонансов, обусловленное потерями резонатора, становится много больше межмодового интервала, то спектр собственных значений мод такого резонатора превращается в почти непрерывный. Такого же эффекта можно добиться, если одно из зеркал резонатора заменить рассеивающей поверхностью. Аналогично, если в активную среду поместить достаточное количество рассеивающих частиц, то возникает обратная связь и система может действовать как лазер. Вообще говоря, резонаторы, имеющие большое число вырожденных мод, могут использоваться для создания нерезонансной обратной связи [12]. Важное преимущество этих резонаторов перед резонаторами типа Фабри — Перо заключается в том, что их частота генерации не зависит от геометрических размеров лазера. Это позволяет использовать лазеры с такими резонаторами в качестве стандартов частоты, которые, однако, не имеют преимуществ, связанных с временной и пространственной когерентностью обычных лазеров.

Для полноты рассмотрения нельзя обойтись без того, чтобы не упомянуть о распределенной обратной связи, которая позволяет обойтись без зеркал резонатора. Для сужения спектра излучения инжекционных лазеров Когельник и Шанк [13] впервые предложили использовать брэгговское отражение двух волн, бегущих в противоположных направлениях через периодическую среду (см. рис. 3.27), что позволило совместить эти лазеры с интегрально-оптической технологией.

### 7.3. ЧАСТОТНЫЙ ОТКЛИК РЕЗОНАТОРА

В идеальном резонаторе поле возникает только тогда, когда частота внешнего возмущения совпадает с собственной частотой резонатора. Практически же резонатор может быть заметно возбужден в некоторой узкой полосе частот, включающей в себя собственную частоту резонатора.

Если поле в резонаторе возбуждается монохроматическим электрическим (или магнитным) диполем с постоянной амплитудой колебаний, то амплитуда поля  $|F(\nu)|$  в некоторой произвольной точке будет изменяться с частотой так, как показано на рис. 7.9. В противоположность закрытому резонатору резонансная кривая открытого резонатора состоит из множества пиков, из которых лишь совсем немногие являются такими же, как и у закрытого. Это обусловлено тем, что из-за устранения боковой поверхности сильно уменьшилось эффективное число мод.

Частичное подавление резонансных пиков происходит вследствие вывода излучения как непосредственно через зеркала, так и с их краев, а также вследствие диссипации энергии на неидеально отражающей поверхности. Поскольку потери в резонаторе возрастают при усложнении картины распределения поля, ширина резонансного пика для

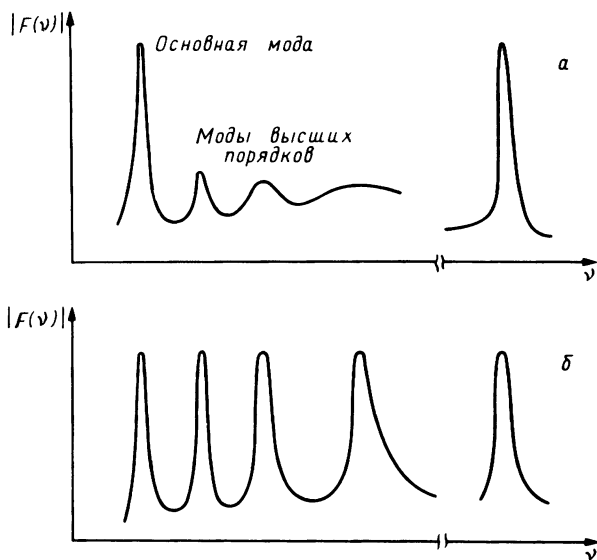


Рис. 7.9. Качественная зависимость амплитуды частотного отклика  $|F(\nu)|$  от частоты для плоскопараллельного резонатора (а), изображенного на рис. 7.7, а, и закрытого резонатора (б), изображенного на рис. 7.7, б.

данной моды становится тем больше, чем больше ее расстояние от основной моды.

Рассматривая резонатор как набор резонансных  $LC$ -контуров с сосредоточенными параметрами, комплексный частотный отклик  $F(\nu)$  резонатора можно написать в виде

$$F(\nu) = \sum_n \frac{F_n}{1 + i(\nu - \nu_n)2Q_n/\nu_n} + \int f(\nu, \nu') d\nu', \quad (7.3.1)$$

где  $\nu_n$  — собственная частота  $n$ -й моды,  $Q$  — добротность, определяющая ширину  $n$ -го резонанса, а  $F_n$  — весовой коэффициент, зависящий от геометрических параметров резонатора. Интеграл в правой части выражения (7.3.1) представляет собой вклад непрерывной части спектра, которая всегда существует в открытых системах. Во многих случаях удобно использовать комплексную частоту  $\tilde{\nu}_n = \nu_n + i\nu_n/(2Q_n)$ , что позволяет записать знаменатель в резонансном члене выражения (7.3.1) в виде  $i(\nu - \tilde{\nu}_n)2Q_n/\nu_n$ .

Спектр резонатора можно считать дискретным в той степени, в которой ширина

$$\Delta\nu_n = \nu_n Q_n^{-1} \quad (7.3.2)$$

$n$ -й моды меньше расстояния между двумя соседними невырожденными модами.

В соответствии с выражением (7.3.1), если излучение в резонаторе возбуждается полем, имеющим вид временной  $\delta$ -функции, то генерируется поле, пропорциональное функции  $f(t)$ , определяемой выражением (если пренебречь вкладом от непрерывной части спектра)

$$f(t) = \sum_n F_n \exp\left(-\pi\nu_n \frac{t}{Q_n} + i2\pi\nu_n t\right). \quad (7.3.3)$$

Отсюда следует, что параметр  $Q_n/\nu_n\pi$  представляет собой постоянную затухания  $n$ -й моды. Предполагая, что возбуждается лишь  $n$ -я мода,  $Q_n$  можно записать в виде

$$Q_n = 2\pi \frac{\text{Запасенная энергия}}{\text{Потери энергии за период}} = 2\pi\nu_n t_{\text{фотон}}, \quad (7.3.4)$$

где  $t_{\text{фотон}}$  — время жизни фотона в резонаторе. В интерферометре Фабри — Перо моды состоят из двух плоских волн, и поэтому потери за период колебаний для них эквивалентны потерям энергии за проход, поделенным на соответствующее число совершенных за проход колебаний. Следовательно, если через  $\alpha_n$  обозначить потери за проход, то  $Q_n$  можно записать в виде

$$Q_n = k_n d / \alpha_n, \quad (7.3.5)$$

где  $k_n = 2\pi\nu_n/c$  — волновое число  $n$ -й моды и  $d$  — длина резонатора.

С добротностью  $Q$  тесно связан параметр, называемый *резкостью*



$F_n$  резонатора:

$$F_n = 1/\alpha_n = v_0/\Delta v_n. \quad (7.3.6)$$

Резкость резонатора является мерой ширины резонансов по сравнению с областью свободной дисперсии. Таким образом, все величины  $Q$ ,  $F$ ,  $t_{\text{фотон}}$ , ОСД и  $\alpha$  связаны между собой. Например,  $Q = F\nu/\text{ОСД}$  и  $t_{\text{фотон}} = F/\text{ОСД} = 1/\alpha \text{ ОСД}$ .

#### 7.4. РАССМОТРЕНИЕ ЗАКРЫТОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА В РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Для того чтобы ознакомиться с основными особенностями распределения полей в резонаторе, рассмотрим точно решаемую (в рамках геометрической оптики) модель оптического резонатора, состоящего из цилиндрической полости с эллиптическим сечением, полуоси которого равны  $a$  и  $d/2$  (рис. 7.10). Чтобы не загромождать рассуждения математическими выкладками, ограничимся рассмотрением двумерной конфигурации мод, поле которых  $u(x, z)$  не зависит от координаты  $y$ . В рамках лучевой оптики поле  $u$ , как показано в гл. 2, можно записать в виде линейной суперпозиции полей  $A \exp(-ikS)$ :

$$u(x, z) = A_1 e^{-ikS_1} + A_2 e^{-ikS_2} + \dots + A_m e^{-ikS_m}. \quad (7.4.1)$$

Разложение поля  $u$  по  $m$  каноническим функциям, каждая из которых описывает конгруэнцию лучей, в общем случае зависит от формы границ. В рассматриваемом случае из симметрии эллипса следует, что  $u$

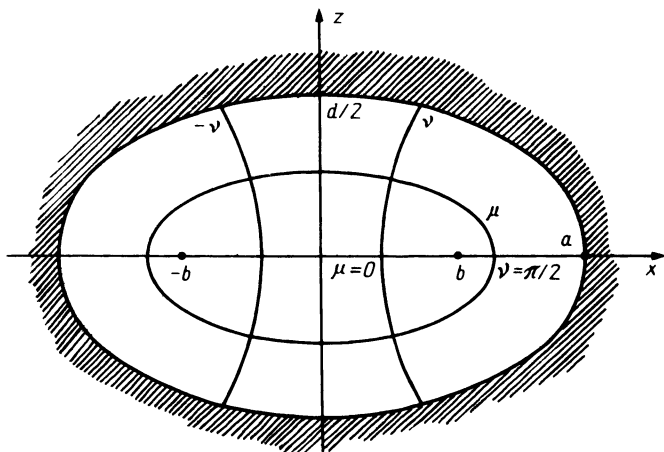


Рис. 7.10. Сечение цилиндрического эллиптического резонатора. Кривые  $\mu = \text{const}$  и  $\nu = \text{const}$  представляют собой соответственно семейства конфокальных гипербол и эллипсов. Ось  $x$  определяется выражениями  $\nu = \pm \pi/2$ ,  $0 \leq \mu < \infty$  и  $\mu = 0$ ,  $-\pi < \nu < \pi$ .

может быть представлена суммой двух функций (например, для кольцевого резонатора, изображенного на рис. 7.8, требуется восемь функций, по две на каждое плечо).

Функция  $S$  может быть решением уравнения эйконала. В рассматриваемом случае удобно ввести систему эллиптических координат, определяемую выражениями (2.7.10), с ограниченными переменными  $\mu \geq 0$  и  $-\pi \leq \nu \leq \pi$ . Условию  $\mu = \text{const}$  соответствуют эллипсы с фокусами в точках  $x = \pm b$ , в то время как граница резонатора определяется кривой  $\mu = \bar{\mu}$ . При этом простой способ решения уравнения эйконала состоит в поиске решений вида (см. разд. 2.12; координату  $\nu$  не надо путать с частотой  $\nu$ )

$$S(\mu, \nu) = M(\mu) + E(\nu). \quad (7.4.2a)$$

В результате этого мы получаем (см. задачу 1)

$$M(\mu) = \pm b \int_0^{\mu} (\text{sh}^2 \mu' + \cos^2 \nu_c)^{1/2} d\mu' + M(0), \quad (7.4.2б)$$

$$E(\nu) = \pm b \int_0^{\nu} (\cos^2 \nu' - \cos^2 \nu_c)^{1/2} d\nu' + E(0). \quad (7.4.2в)$$

Поскольку подынтегральное выражение в интеграле (7.4.2в) становится мнимым при  $|\nu| > |\nu_c|$ , продольное сечение каустики представляет собой гиперболу  $\nu = \pm \nu_c$  (рис. 7.11, в); при этом пространственная структура мод описывается параметром  $\cos \nu_c$ . Распределение для каждого значения  $\nu_c$  в интервале  $(0, \pi/2)$  зависит, как мы покажем ниже, от дискретного индекса  $n$ , поэтому произвольная мода обозначается двумя индексами, учитывающими непрерывный параметр  $\nu_c$  и дискретный параметр  $n$ .

В случаях когда  $\nu_c = \pm \pi/2$ , каустика вырождается в прямые линии, выходящие из фокусов и уходящие в бесконечность (рис. 7.11, а), в то время как волновые фронты ( $S = \text{const}$ ) вырождаются в окружности с центрами в точках  $x = \pm b$ . Лучи с фокусами при  $x = -b$  и направленные к точке  $z = +\infty$  описываются уравнением эйконала

$$S_-(\mu, \nu) = S_-(0, -\pi/2) - \text{sgn}(z)b(\text{ch } \mu + \sin \nu), \quad (7.4.3)$$

где  $\text{sgn}(\ )$  — знаковая функция, принимающая значение  $+1$  или  $-1$  в зависимости от знака аргумента и учитывающая то, что при  $z < 0$  волновые фронты сходятся в направлении к фокусу и расходятся от него при  $z > 0$ . Аналогично, лучи, проходящие через фокус  $x = b$  и направленные в точку  $z = -\infty$ , описываются уравнением эйконала

$$S_+(\mu, \nu) = S_+(0, \pi/2) + \text{sgn}(z)b(\text{ch } \mu - \sin \nu), \quad (7.4.4)$$

так что окончательно мы можем написать

$$u = A_+ e^{-ikS_+} + A_- e^{-ikS_-} \equiv u_+ + u_-. \quad (7.4.5)$$

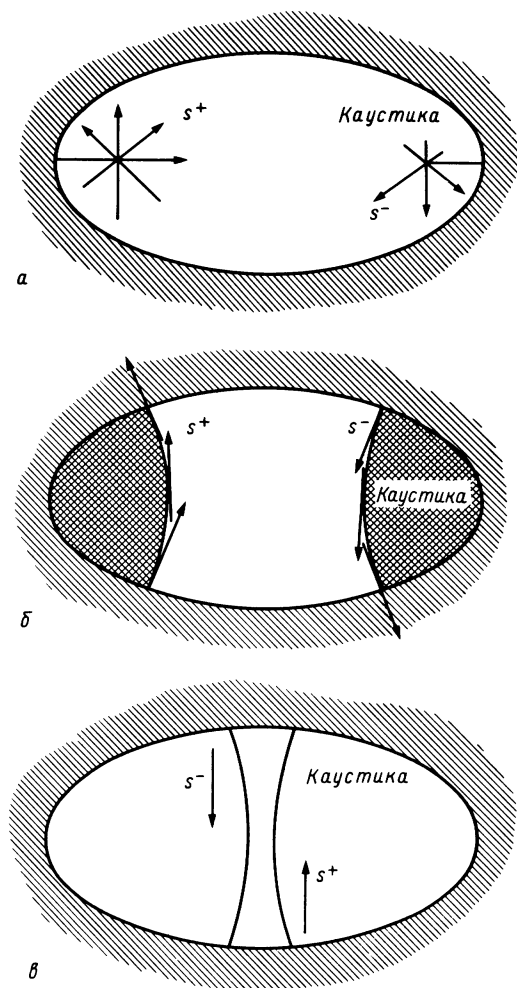


Рис. 7.11. Моды эллиптического резонатора, полученные суперпозицией двух лучевых конгруэнций, движущихся соответственно вверх и вниз и описываемых гиперболическими каустиками с фокусами в точках  $x = \pm b$ ; когда обе каустики вырождаются в линию, лежащую на оси  $z$ , возникают два мнимых фокуса в точках  $z = \pm ib$  и мода становится гауссовой. *а* — каустики вырождены в линию, лежащую на оси  $z$ ; *б* — каустики с фокусами в точках  $x = \pm b$ ; *в* — каустики с фокусами в точках  $z = \pm ib$ .

Поскольку функция  $u$  должна удовлетворять граничному условию, волновое число  $k$ , соответствующее незатухающим колебаниям резонатора, должно принимать дискретные значения, которые в дальнейшем мы будем обозначать через  $k_{\text{рез}}$ . Используя соотношение (7.4.5) и

считая поле  $u$  на границе резонатора ( $\mu = \bar{\mu}$ ) равным нулю, получаем

$$A_+(\bar{\mu}, \nu) = A_-(\bar{\mu}, \nu), \quad (7.4.6a)$$

$$k_{\text{рез}}[S_+(\bar{\mu}, \nu) - S_-(\bar{\mu}, \nu)] = k_{\text{рез}}[S_+(0, \pi/2) - S_-(0, -\pi/2)] \pm 2k_{\text{рез}}b \operatorname{ch} \bar{\mu} = (2n_{\pm} + 1)\pi; \quad (7.4.6b)$$

в этом выражении знаки плюс и минус относятся к частям границы соответственно с положительным и отрицательным значением  $z$ . Далее, вычитая выражение (7.4.6b), записанное для  $n_-$ , из такого же выражения, записанного для  $n_+$ , получаем

$$2k_{\text{рез}}(n, \pi/2)b \cos \bar{\mu} = (n_+ - n_-)\pi \rightarrow k_{\text{рез}} = n\pi/(2a), \quad (7.4.7)$$

причем  $n = n_+ - n_- = 1, 2, \dots$ .

Рассмотрим теперь случай  $\nu_c = 0$  (см. рис. 7.11, в). Используя выражения (7.4.2), нетрудно проверить, что формулы (7.4.3) и (7.4.4) принимают вид

$$S_{\pm}(\mu, \nu) = S_{\pm}(\mp i\pi/2, 0) + \operatorname{sgn}(z)b(\pm \operatorname{sh} \mu + i \cos \nu). \quad (7.4.8)$$

Эти эйконалы описывают поля с фокусами в точках с эллиптическими координатами  $\mu_f = \mp i/2$  и  $\nu_f = 0$ , которые в прямоугольных координатах соответствуют точкам  $x_f = 0$  и  $z_f = \pm ib$ . Соответствующие поля запишутся в виде

$$u_{\pm}(\mu, \nu) = \exp[-ikS_{\pm}(\mp i\pi/2, 0) \mp i \operatorname{sgn}(z)kb \operatorname{sh} \mu + \operatorname{sgn}(z)kb \cos \nu] \cong \cong \exp[-ikS_{\pm}(\mp i\pi/2, 0) \mp ikz + kb - \frac{1}{2}kb x^2/(b^2 + z^2)], \quad (7.4.9)$$

где  $\cos \nu$  мы заменили его приближенным выражением  $1 - \nu^2/2$ . В то время как для действительных фокусов поле  $u_{\pm}$  имеет однородный волновой фронт, в случае мнимых фокусов его волновой фронт принимает гауссову форму, т. е. амплитуда поля экспоненциально спадает с квадратом расстояния  $x^2$  от оси  $z$ . Обе моды, определяемые выражением (7.4.9), можно объединить, чтобы получить моду колебаний, которая удовлетворяет следующему резонансному условию, аналогичному (7.4.7):

$$2k_{\text{рез}}(n, 0)b \operatorname{sh} \bar{\mu} = (n_+ - n_-)\pi \rightarrow k_{\text{рез}} = n\pi/d, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.4.10)$$

Вообще говоря, каждая мода, соответствующая определенному значению  $\nu_c$ , описывается *гиперболической каустикой*. При  $\nu_c = 0$  обе ветви гиперболы стремятся прижаться к оси  $z$  и поле сосредоточивается вдоль малой оси эллиптического резонатора. Моды с  $\nu_c > 0$  занимают большую часть объема резонатора и называются *неустойчивыми*, в то время как моды с  $\nu_c = 0$  называются *устойчивыми*. Если удалить значительную часть стенок эллиптического резонатора, то это никак не отразится на распределении поля в устойчивых модах (рис. 7.12, а), но сильно повлияет на распределение поля в неустойчи-

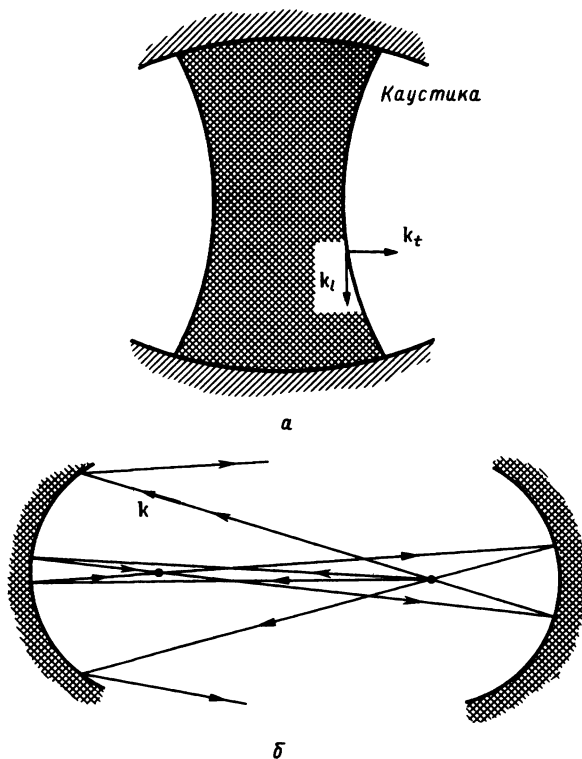


Рис. 7.12. *а* — устойчивый резонатор с зеркалами в виде бесконечных полос, полученный устранением части поверхности закрытого эллиптического резонатора вблизи вершин большой оси; при удалении от оси резонатора поле быстро уменьшается и может быть представлено затухающей волной с чисто мнимым волновым вектором  $k_t = i|k_t|$ ; на отражающие поверхности падает излучение с почти гауссовым профилем интенсивности; *б* — неустойчивый резонатор с зеркалами в виде бесконечных полос, полученный удалением части поверхности вблизи вершин малой оси; следует обратить внимание на постепенное расхождение лучей после каждого отражения, вследствие чего отражатели освещаются почти однородно.

вых модах (рис. 7.12, *б*), а именно приведет к так называемым *радиационным потерям*.

## 7.5. ЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Математические выражения, полученные нами для эллиптических резонаторов, качественно справедливы и для большинства открытых резонаторов, которые представляют собой обычно конструкцию из двух зеркал, обращенных друг к другу отражающими поверхностями. Это

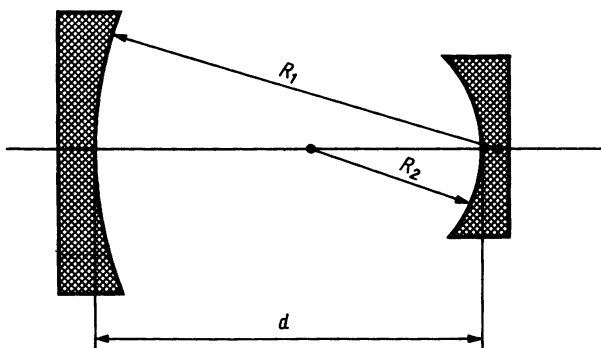


Рис. 7.13. Простой *линейный оптический резонатор*. Излучение из резонатора выводится различными способами: с помощью частично просветленного зеркала, с помощью отверстия, высверленного в одном из глухих зеркал, или с использованием лучей, претерпевших дифракцию на краях зеркала (в неустойчивых резонаторах).

так называемый *линейный резонатор*, показанный на рис. 7.13. Поперечными размерами линейного резонатора можно пренебречь и, следовательно, считать, что он имеет одну размерность, которая определяет *оптическую ось*. Поле в таком резонаторе можно рассматривать в геометрическом приближении в виде  $\exp(-ikS)$ , представляющем собой *поперечные электромагнитные (TEM) волны*. Эти предположения позволят нам в последующих разделах применить приближение параксиальной оптики, для которой построен метод лучевых матриц. Кроме того, моды линейного резонатора можно подразделить на *устойчивые* и *неустойчивые*. В то время как в замкнутых эллиптических резонаторах могут существовать моды обоих этих типов, в открытых резонаторах может быть лишь один тип колебаний, и поэтому резонаторы подразделяются на *устойчивые* и *неустойчивые*. Моды устойчивого резонатора концентрируются вблизи оптической оси, и, вообще говоря, на них не влияют размеры зеркал. Моды неустойчивого резонатора заполняют весь объем резонатора и сильно зависят от формы и размеров зеркал. Неустойчивые резонаторы применяют в тех лазерах, в которых необходимо возбуждать генерацию в больших объемах активной среды (как, например, в лазерах высокой мощности). Характерной особенностью неустойчивых резонаторов является то, что излучение на выходе лазеров с такими резонаторами является пульсирующим (рис. 7.14).

В устойчивом резонаторе компонента  $k_y$  волнового вектора, перпендикулярного оптической оси, является мнимой; действительно, вещественная величина  $k_y$  означала бы, что сечение пучка изменяется при его отражении (рис. 7.12).

Устойчивые моды, как известно, ограничены каустической поверх-

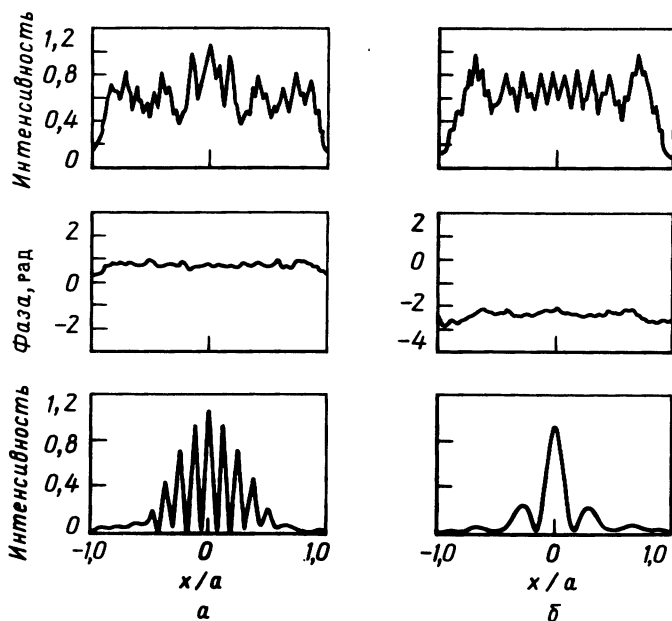


Рис. 7.14. Распределения интенсивности поля в ближней (верхний ряд диаграммы) и дальней (нижний ряд диаграммы) зонах, вычисленные для неустойчивых конфокальных резонаторов. Представлены два типа диаграмм для различных чисел Френеля  $N$  и разных значений увеличения  $M$ . а —  $N = 3$ ,  $M = 1,42$ ; б —  $N = 60$ ,  $M = 5$ . (Из работы Ренша и Честера [13а].)

ностью, которая как бы заменяет недостающую боковую поверхность резонатора и удерживает пучок вблизи оптической оси. Если диаметр зеркал резонатора сделать достаточно большим, то краевой эффект в резонаторе будет отсутствовать и резонатор не будет иметь дифракционных потерь.

Среди всех возможных конфигураций резонаторов, отличающихся радиусом кривизны и расстоянием  $d$  между зеркалами, в настоящее время используется лишь небольшое их число (рис. 7.15). Первым из них стоит упомянуть плоскопараллельный резонатор (интерферометр) Фабри — Перо, который является прародителем всех открытых резонаторов. В симметричном конфокальном резонаторе два одинаковых зеркала, разделенных расстоянием  $d$ , имеют одинаковые радиусы кривизны. Сферический резонатор получается при разнесении зеркал с одинаковой кривизной на удвоенное фокусное расстояние. Полусферический и полуконфокальный резонаторы состоят из плоского зеркала и половины сферического или конфокального резонатора.

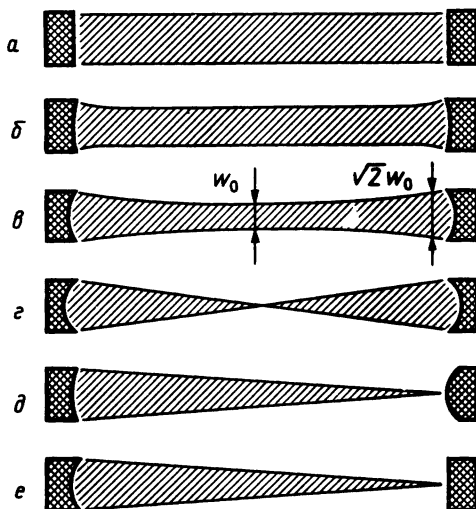


Рис. 7.15. Распределение интенсивности излучения внутри резонатора для различных конфигураций резонаторов. *a* — плоскопараллельный резонатор; *b* — с зеркалами большого радиуса кривизны; *v* — конфокальный; *г* — сферический; *д* — вогнутовыпуклый; *e* — полусферический. (Из работы Блума [136].)

Особенность плоского и сферического резонаторов состоит в том, что они *слабо устойчивы*, т. е. любое небольшое отклонение их геометрии от идеальной сразу же делает их неустойчивыми.

## 7.6. РАССМОТРЕНИЕ РЕЗОНАТОРА КАК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЗ

С целью ограничения числа параметров, определяющих положение и размеры зеркал, любой резонатор можно рассматривать как периодическую фокусирующую систему, в которой траекториям световых лучей, распространяющихся в прямом и обратном направлениях между зеркалами, поставлены в соответствие траектории лучей, периодически меняющих свое направление при попадании на искривленные поверхности линз. В параксиальном приближении тонкая линза эквивалентна зеркалу с таким же фокусным расстоянием, так что резонатор можно рассматривать как бесконечную последовательность линз, фокусные расстояния которых равны фокусному расстоянию соответствующих зеркал, а расстояние  $d$  между линзами равно длине резонатора (рис. 7.16) (принято считать, что радиус кривизны вогнутого зеркала положителен, а выпуклого — отрицателен). Таким образом, поведение волнового фронта в резонаторе можно изучать, рассматривая



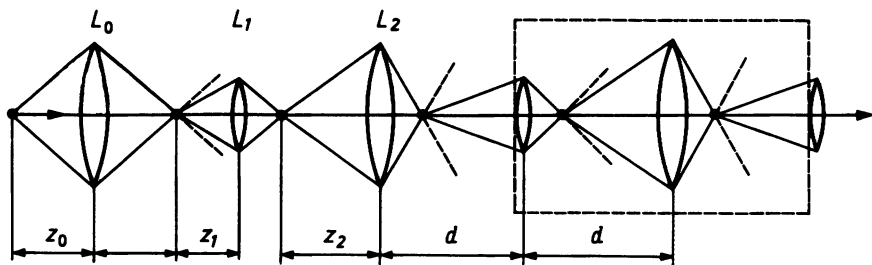


Рис. 7.16. Последовательность линз, эквивалентная резонатору, изображенному на рис. 7.13. Расстояние  $z_i$  берется с положительным знаком, если соответствующий фокус располагается с левой стороны линзы  $L_i$ .

его распространение в оптической линии передачи (состоящей из бесконечной последовательности линз  $L_i$ , таких, что линза  $L_i$  имеет такие же характеристики, как и линза  $L_{i+2}$ ), моды которой взаимно однозначно соответствуют модам резонатора.

Характеристики этих мод можно найти по изображению точечного источника, расположенного в произвольной точке оптической оси линзового волновода. Предположим, что при прохождении луча через линзу  $L_i$  он пересекает оптическую ось на расстоянии  $z_{i+1}$  от плоскости линзы  $L_{i+1}$ . Заметим, что в общем случае как  $z_i$ , так и  $z_{i+1}$  отличаются от  $z_0$  (расстояние от точечного источника до линзы  $L_0$ ), если только  $z_0$  не принимают некоторых конкретных значений. Действительно, распределение изображения получается периодическим, когда  $z_2 = z_0$ , так что в соответствии с формулой тонкой линзы условие взаимного отображения можно записать следующим образом:

$$1/z_0 + 1/(d - z_1) = 1/f_1, \quad 1/z_1 + 1/(d - z_0) = 1/f_2. \quad (7.6.1)$$

Отсюда мы получаем два решения для  $z_0$ , каждое из которых представляет собой расстояние от двух фокусов пучка до зеркала 1:

$$z_0^{(\pm)} = d \left\{ 1/2 + [g_1 - g_2 \pm 2(g_1^2 g_2^2 - g_1 g_2)^{1/2}] / [2(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)] \right\}; \quad (7.6.2)$$

здесь мы ввели *параметры*  $g$ , определяемые выражением

$$g_{1,2} = 1 - d/(2f_{1,2}). \quad (7.6.3)$$

В конфокальной конфигурации фокусы двух зеркал совпадают ( $d = f_1 + f_2$ ). Это условие, записанное через параметры  $g$ , имеет следующий вид:

$$g_1 + g_2 = 2g_1 g_2. \quad (7.6.4)$$

Следовательно, если  $g_1^2 g_2^2 > g_1 g_2$ , то в соответствии с (7.6.2) один пучок является коллимированным, а другой имеет общий фокус с одним из зеркал (рис. 7.17), и мы имеем

$$z_0^{(+)} = \infty \quad \text{и} \quad z_0^{(-)} = d/[2(1 - g_1)]. \quad (7.6.5)$$

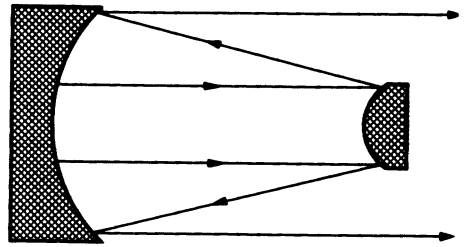
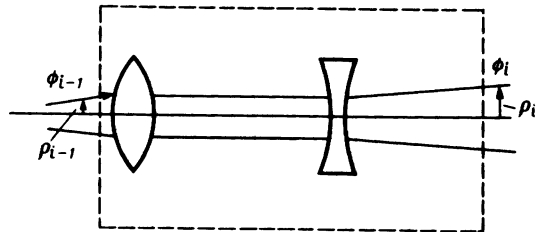


Рис. 7.17. Последовательность линз, эквивалентная конфокальному резонатору. Обратите внимание на то, что один пучок является коллимированным, а другой — конфокальным с зеркалами.



В соответствии со знаком подкоренного выражения в (7.6.2) координаты источника могут быть либо вещественными, либо комплексными; в частности, координаты будут комплексными (которые, как мы выясним ниже, соответствуют устойчивым резонаторам), если выполняется условие

$$1 \geq g_1 g_2 \geq 0, \quad (7.6.6)$$

Вещественные же значения координат соответствуют неустойчивому резонатору.

Рассматривая в разд. 7.7 свойства гауссовых пучков, связанных с комплексными координатами источника, мы покажем, что настоящая классификация резонаторов совпадает с приведенной в разд. 7.4. Следовательно, моды резонатора могут быть описаны гауссовыми пучками, только если произведение  $g_1 g_2$  удовлетворяет неравенству (7.6.6).

Таблица 7.1. Координаты фокусов сферических волн, образующих основные моды

| Резонатор                    | $\frac{z_0^+}{d}$                    | $\frac{z_0^-}{d}$                    |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Плоскопараллельный           | $\infty$                             | $\infty$                             |
| С зеркалами большого радиуса | $1/2 + i \frac{1}{[2(1 - g)]^{1/2}}$ | $1/2 - i \frac{1}{[2(1 - g)]^{1/2}}$ |
| Конфокальный                 | $1/2 + i/2$                          | $1/2 - i/2$                          |
| Сферический                  | $1/2$                                | $1/2$                                |

В табл. 7.1. перечислены комплексные координаты фокусов для наиболее распространенных резонаторов. Обратите внимание на то, что плоские и сферические резонаторы имеют действительные фокусы в соответствии с их определением как *слабоустойчивых* резонаторов (см. конец разд. 7.5).

В параксиальном приближении любое распределение поля  $u$  в плоскости  $z = z_0$  является периодически повторяющимся. Таким образом, распределение поля будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= 2ik \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\rho_0, z_0) G(\rho - \rho_0, z - z_0) dx_0 dy_0 = \\ &= 2ik \sum_{lm} \frac{f_{lm}(z_0)}{l! m!} u_{lm}(\rho, z - z_0), \end{aligned} \quad (7.6.7a)$$

где  $G$  — функция Грина для однородной области, а функции  $f_{lm}(z_0)$  определяются выражением

$$f_{lm}(z_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\rho_0, z_0) x_0^l y_0^m dx_0 dy_0. \quad (7.6.7б)$$

Функция Грина  $G$  может быть разложена в ряд по степеням  $x_0^l y_0^m$ , коэффициентами которого являются функции

$$u_{lm}(\rho, z) \equiv (\partial^l / \partial x_0^l) (\partial^m / \partial y_0^m) G(\rho - \rho_0, z) |_{x_0=y_0=0}, \quad (7.6.7в)$$

которые описывают поле, излучаемое мультиполем, расположенным в точке  $z_0$  и имеющим порядок  $l$  в направлении оси  $x$  и  $m$  — в направлении оси  $y$ . Таким образом, любое поле  $u$  можно представить в виде суперпозиции мод  $u_{lm}$ , имеющих фокус в точке  $z = z_0$  на оптической оси.

## 7.7. ПОЛЯ ОТ ИСТОЧНИКОВ,

### РАСПОЛОЖЕННЫХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Выше мы показали, что если источник расположен в точке с вещественной координатой  $z_0$ , то поле, обусловленное этим источником и распространяющееся вдоль цепочки линз, полностью описывается последовательностью фокальных точек, определяемых выражением (7.6.2) (см. пример, иллюстрируемый на рис. 7.16). Менее наглядна физическая интерпретация другого случая, а именно когда положение источника определяется комплексной координатой  $z_0$ . Вообще говоря, в этой ситуации легче было бы отбросить саму возможность распространения излучения и по аналогии с электромагнитными волнами в

металлических волноводах с частотами ниже частоты отсечки сделать вывод о том, что при комплексных  $z_0$  излучение вдоль цепочки линз распространяться не может. Однако известно, что в структурах, подобных волноводной, существует стационарное поле, амплитуда которого вдоль оси волновода экспоненциально убывает. Отсюда можно предположить, что в рассматриваемом случае поле также будет затухать в направлениях, перпендикулярных оптической оси.

С учетом этих предварительных замечаний рассмотрим источник  $S'$ , расположенный в точке  $P$  с координатами  $(0, 0, -ib)$ . Излучаемое им поле пропорционально скалярной функции Грина  $G$ , которая в предположении, что величина  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  много меньше  $|z + ib|$ , определяется формулой Френеля (см. разд. 4.10)

$$G = 1/[4\pi(z + ib)] \exp[-ik(z + ib + (1/2)\rho^2/(z + ib))]. \quad (7.7.1)$$

Согласно этому определению,  $G$  описывает волну, распространяющуюся из точки  $z = -\infty$  в точку источника и из точки источника в точку  $z = +\infty$ ; следовательно,  $G$  не удовлетворяет однородным образом излучательному условию Зоммерфельда и не может рассматриваться как уходящая функция Грина.

Записывая тождества

$$1/q(z) \equiv 1/(z + ib) = z/(z^2 + b^2) - ib/(z^2 + b^2) \equiv 1/R(z) - i\lambda/[\pi w^2(z)], \quad (7.7.2a)$$

$$\psi \equiv \arctg(z/b), \quad (7.7.2b)$$

мы имеем

$$1/(z + ib) = -(i/b)[w_0/w(z)]e^{i\psi(z)}, \quad (7.7.2в)$$

где  $w_0 = w(0) = (\lambda b/\pi)^{1/2}$ . Выбрав значения  $b$  положительными и таким образом обеспечив затухание функции  $G$  в направлениях от оптической оси, получим

$$\begin{aligned} G &\cong -\frac{i}{4\pi b} \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-i\left(kz - \psi + \frac{k\rho^2}{2R}\right) - \frac{\rho^2}{w^2(z)} + kb\right] = \\ &= \frac{1}{4\pi q(z)} \exp\left[-i\left(kz + \frac{\rho^2}{2q(z)}\right) + kb\right]. \end{aligned} \quad (7.7.3)$$

В соответствии с выражением (7.7.3) функция  $w(z)$  соответствует радиальному расстоянию, на котором амплитуда поля уменьшается в  $e$  раз относительно своего максимального значения. В противоположность сферической волне поле, излучаемое источниками, расположенными в комплексных точках, на сферической поверхности постоянной фазы имеет гауссово распределение амплитуды, и излучение, распространяющееся вдоль оси  $z$ , по существу ограничено сечением радиусом  $w(z)$  в плоскости  $xu$ . Если величина  $w$  очень мала, то поле можно представить пучком лучей, распространяющихся параллельно оси  $z$ . Таким образом, переход от вещественных координат  $z_0$  к комплекс-

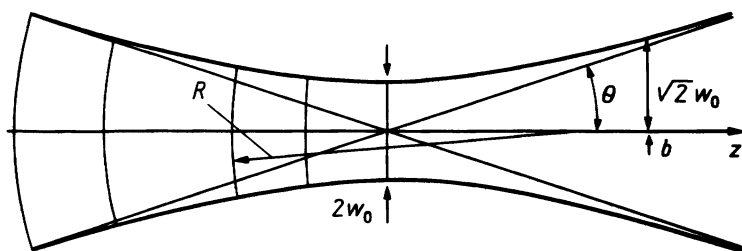


Рис. 7.18. Вид сбоку на гауссов пучок. Показаны волновые фронты, перетяжка, рэлеевская длина  $b$  и угол дифракции  $\theta$ .

ным преобразует сферическую волну в пучки более или менее хорошо коллимированных лучей.

Ширина  $w(z)$  *пятна гауссова пучка* изменяется с расстоянием  $z$  в соответствии с выражением

$$w^2(z) = w_0^2(1 + z^2/b^2) \quad (7.7.4)$$

и имеет минимальное значение при  $z = 0$ , что согласуется с определением *перетяжки гауссова пучка*  $w_0$  как характерного параметра. Пучок ограничен поверхностью гиперboloида, пересечения которого с плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ , представляют собой окружности радиусом  $w(z)$  (рис. 7.18). Величину  $b$  можно рассматривать как расстояние от перетяжки, на котором пучок еще можно считать хорошо коллимированным. Вне участка  $z = b$  (обозначаемого также  $z_R$ ), который называют, как правило, *рэлеевской длиной*, из-за дифракционных эффектов пучок начинает расходиться.

По мере удаления от перетяжки гиперboloид  $w(z)$ , ограничивающий контур пучка, все больше принимает форму конуса, угол полураствора которого равен полууглу расходимости  $\theta_{\text{пучок}}$  в дальней зоне, определяемому выражением

$$\theta_{\text{пучок}} = \text{atctg} [\lambda/(\pi w_0)] \cong \lambda/(\pi w_0) = [\lambda/(\pi b)]^{1/2}. \quad (7.7.5)$$

В соответствии с выражением (7.7.5) чем *уже* перетяжка, тем больше апертура пучка; это согласуется с представлением о том, что поле в дальней зоне является фурье-образом поля в перетяжке. Здесь можно провести аналогию с ситуацией, которая имеет место в случае щелевой антенны для главного лепестка ее диаграммы излучения.

Из выражения (7.7.2а) непосредственно следует, что радиус кривизны волнового фронта  $R(z) = z + b^2/z$  в перетяжке становится очень большим. При удалении от перетяжки величина  $R$  сначала уменьшается и достигает минимального значения  $2b$  на расстоянии  $b$ , а затем вновь увеличивается и в конечном счете становится равной  $z$ .

Проведенное выше рассмотрение предполагает, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  строго и полностью определяются функцией Грина  $G$ . Здесь стоит на-

помнить, не вдаваясь в подробности, некоторые выводы из векторного анализа волновых пучков, полученные Губау и Шверингом [14]. Используя подход, основанный на решении уравнений Максвелла, эти авторы показали, что волновые пучки только тогда адекватно описываются выражениями, аналогичными (7.7.3), когда они немного расходятся (на несколько градусов). Этот результат согласуется с тем фактом, что только хорошо коллимированные пучки могут быть представлены ТЕМ-волнами, к которым применение скалярной теории является корректным.

## 7.8. ЭРМИТ-ГАУССОВЫ И ЛАГЕРР-ГАУССОВЫ ПУЧКИ

При выводе выражений для полей, описывающих оптические пучки, можно использовать аналогию между гауссовыми пучками и сферическими волнами. Действительно, сферические волны принадлежат обширному семейству мультипольных полей, в котором они представляют мультиполь нулевого порядка. Можно предположить, что то же самое справедливо и для гауссовых пучков, определяемых формулами (7.6.7а)—(7.6.7в).

Поскольку мультипольные поля, определяемые выражением (7.6.7в), не являются взаимно ортогональными в поперечной плоскости, найдем другое (более удобное) семейство мультиполей, называемых *модами*, которые затем используем в качестве базиса при разложении поля. Для этого запишем поле в виде  $u(x, y, z) = A(x, y, z)e^{ikz}$ , где  $k = k' + ik''$  — в общем случае комплексная постоянная распространения. Нетрудно показать, что в рамках параксиального приближения для  $u$  амплитуда  $A$  удовлетворяет параболическому волновому уравнению, рассмотренному в разд. 2.6 гл. 2 настоящей книги. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= [1/w(z)]f[2^{1/2}\rho/w(z)] \exp\{-i[\beta(z) + [k/(2q)]\rho^2 + kz]\} = \\ &= A(\rho, z) \exp(-ikz), \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

где  $\rho = \hat{x}x + \hat{y}y$ , а  $w(z)$  и  $q(z)$  — соответственно размер перетяжки и комплексная кривизна волнового фронта гауссова пучка, определяемые формулами (7.7.2), в которых длина волны  $\lambda = 2\pi/k'$  и фазовый множитель  $\beta(z)$  (не путать  $\beta$  с волновым вектором) должны быть определены вместе с неизвестной функцией  $f$ . Подстановка выражения (7.8.1) в (2.6.12) дает следующее уравнение:

$$[\nabla_{\rho}^2 - (4/w^2)\rho \cdot \nabla_{\rho}]f = (4/w^2 + 2k d\beta/dz)f = \mu(w)f, \quad (7.8.2)$$

где  $\nabla_{\rho} = \hat{x} \partial/\partial x + \hat{y} \partial/\partial y$ . Предположим, что  $f$  — квадратично-интегрируемая функция в плоскости  $xu$ . Тогда уравнение (7.8.2) одно-

значно определяет  $f(x, y)$  как собственную функцию дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения, с собственным значением  $\mu(w)$ . Вспоминая, что дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Эрмита, записывается в виде

$$d^2 H_m(t)/dt^2 - 2t dH_m(t)/dt = -2mH_m(t), \quad (7.8.3)$$

можно сразу показать, что в прямоугольной декартовой системе координат нормализованные собственные функции уравнения (7.8.2) запишутся в виде

$$f^{(H)}(x, y) = (\pi 2^{l+m-1} l! m!)^{-1/2} H_l(2^{1/2} x/w) H_m(2^{1/2} y/w), \quad (7.8.4)$$

причем соответствующие им собственные значения даются выражением

$$\mu_{lm}(w) = -(4/w^2)(l+m). \quad (7.8.5)$$

Сравнивая последнее выражение с выражением для  $\mu(w)$  из (7.8.2), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$(1 + ik''/k') d\beta_{lm}/dz = -2(m+l+1)/[k'w^2(z)] = -(m+l+1)b/(z^2 + b^2), \quad (7.8.6)$$

решение которого для  $\beta_{lm} = \beta'_{lm} - i\beta''_{lm}$  записывается в комплексном виде следующим образом:

$$\beta_{lm}(z) = \frac{(l+m+1)}{1 + ik''/k'} \operatorname{arctg} \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} = \frac{(l+m+1)}{1 + ik''/k'} \psi(z); \quad (7.8.7)$$

здесь  $\psi(z)$  определяется выражением (7.7.26).

Следует заметить, что, согласно (7.8.1), кривизна фазового фронта не зависит от порядка моды  $l$  и  $m$ , в то время как *фазовая скорость*  $v_{lm}$  уменьшается с ростом порядка моды и увеличивается с расстоянием от перетяжки пучка:

$$v_{lm}(z) = \frac{\omega}{k' + (d/dz)\beta'_{lm}} = \frac{\omega/k'}{1 + [(l+m+1)/(bk')] \{1/[1 + (z/b)^2]\} \{1/[1 + (k''/k')^2]\}}. \quad (7.8.8)$$

Из табл. 7.2 можно определить некоторые моды низших порядков

$u_{lm}^{(H)} = A_{lm}^{(H)} \exp(-ikz)$ , используя выражение

$$u_{lm}^{(H)}(\rho, z) = \frac{(\pi 2^{l+m-1} l! m!)^{-1/2}}{w(z)} H_l\left(2^{1/2} \frac{x}{w}\right) H_m\left(2^{1/2} \frac{y}{w}\right) \times \\ \times \exp\left[-i\left(-\frac{l+m+1}{1 + ik''/k'} \psi(z) + \frac{k\rho^2}{2q} + kz\right)\right]. \quad (7.8.9)$$

Для данного  $k$  функции  $u_{lm}^{(H)}$ , являющиеся собственными функциями лапласиана  $\nabla^2$  и имеющие собственные значения  $k^2$ , образуют полный и ортонормированный набор мод, который заменяет мультипольные поля, определяемые выражением (7.6.7в). Верхний индекс (H)

Таблица 7.2. Полиномы Эрмита (в колонке слева) и обобщенные полиномы Лагерра (в колонке справа) низших порядков

|   |  |
|---|--|
| $H_0(t) = 1$  | $L_0^l(t) = 1$   |
| $H_1(t) = 2t$   | $L_1^l(t) = l + 1 - t$   |
| $H_2(t) = 4t^2 - 2$                                     | $L_2^l(t) = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - (l+2)t + \frac{t^2}{2}$                     |
| $H_3(t) = 8t^3 - 12t$                                   | $L_3^l(t) = \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - \frac{(l+2)(l+3)}{2}t +$               |
| $H_{n+1} = 2tH_n - 2nH_{n-1}$                           | $+ \frac{l+3}{2}t^2 - \frac{t^3}{6}$   |
| $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}) =$ | $L_n^l(t) = \frac{1}{n!} e^{t^l} t^{-l} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^l} t^{n+l}) =$ |
| $= 2^n t^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} t^{n-2} +$            | $= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+l}{n-m} \frac{t^m}{m!}$                        |
| $+ 2^{n-2} 1 \cdot 3 \binom{n}{4} t^{n-4} -$            | $(n+1)L_{n+1}^l = (2n+l+1-t)L_n^l - (n+l)L_{n-1}^l$                            |
| $- 2^{n-3} 1 \cdot 3 \cdot 5 \binom{n}{6} t^{n-6}$      |  |

употребляется для того, чтобы отличить пучки, записанные в прямоугольных координатах, для которых естественным выбором являются полиномы Эрмита, от пучков в полярных координатах, где удобнее использовать полиномы Лагерра. Действительно, уравнение (7.8.2) допускает также следующий набор решений, представляемых в виде комбинации полиномов Лагерра и тригонометрических функций:

$$f_{pl}^{(L)} = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \left(2^{1/2} \frac{\rho}{w}\right)^l L_p^l \left(2 \frac{\rho^2}{w^2}\right) \begin{Bmatrix} \sin l\phi \\ \cos l\phi \end{Bmatrix}, \quad (7.8.10)$$

где  $L_p^l$  — полиномы Лагерра с радиальным индексом  $p$  и угловым индексом  $l$ . Это нетрудно доказать, используя те же рассуждения, с помощью которых было получено выше выражение (7.8.4). Замена полиномов Эрмита полиномами Лагерра приводит к следующему выражению для фазового множителя  $\beta_{pl}^{(L)}$ :

$$\beta_{pl}^{(L)}(z) = [(2p+l+1)/(1+ik''/k')] \psi(z), \quad (7.8.11)$$

так что  $u_{pl}^{(L)}$  можно теперь записать в виде

$$u_{pl}^{(L)} = \frac{1}{w(z)} \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \left(2^{1/2} \frac{\rho}{w}\right)^l L_p^l \left(2 \frac{\rho^2}{w^2}\right) \begin{Bmatrix} \sin l\phi \\ \cos l\phi \end{Bmatrix} \times \\ \times \exp \left[ -i \left( -\frac{2p+l+1}{1+ik''/k'} \psi(z) \right) + \frac{k\rho^2}{2q} + kz \right]. \quad (7.8.9a)$$



Таблица 7.3. Гауссовы пучки в прямоугольной  $[u_{lm}^{(H)}(x, y, z)]$  и цилиндрической  $[u_{pl}^{(L)}(\rho, z)]$  системах координат

$$u_{00}^{(H)}(xyz) = u_{00}^{(L)}(\rho, z) = (\sqrt{2/\pi}/w) \exp[-i(kz + k\rho^2/2R - \psi)] \exp(-\rho^2/w^2)$$

$$w(z) = w_0(1 + z^2/b^2)^{1/2}, \quad R(z) = z + b^2/z, \quad \psi(z) = \arctg(b)/(1 + ik''/k')$$

$$u_{01}^{(H)} = 2(y/w)e^{i\psi}u_{00} \qquad u_{10}^{(L)} = (1 - 2\rho^2/w^2)e^{2i\psi}u_{00}$$

$$u_{10}^{(H)} = 2(x/w)e^{i\psi}u_{00} \qquad u_{11}^{(L)} = \frac{3}{2}(\rho/w)(1 - \rho^2/w^2)e^{i3\psi} \begin{cases} \sin \phi \\ \cos \phi \end{cases} u_{00}$$

$$u_{11}^{(H)} = 4(xy/w^2)e^{2i\psi}u_{00} \qquad u_{20}^{(L)} = [1 - 4(\rho^2/w^2) + 2(\rho^4/w^4)]e^{4i\psi}u_{00}$$

$$u_{20}^{(H)} = (1/\sqrt{2})[4(x^2/w^2) - 1]e^{2i\psi}u_{00} \qquad u_{21}^{(L)} = \sqrt{2/3}(\rho/w)[3 - 6(\rho^2/w^2) + 2(\rho^4/w^4)]e^{5i\psi} \begin{cases} \sin \phi \\ \cos \phi \end{cases} u_{00}$$

$$u_{02}^{(H)} = (1/\sqrt{2})[4(y^2/w^2) - 1]e^{2i\psi}u_{00} \qquad u_{22}^{(L)} = (2/\sqrt{3})(\rho^2/w^2)(3 - 4\rho^2/w^2 + \rho^4/w^4)e^{6i\psi} \begin{cases} \sin 2\phi \\ \cos 2\phi \end{cases} u_{00}$$

$$u_{0l}^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{l!}} (2^{1/2}\rho/w)^l e^{il\psi} \begin{cases} \sin l\phi \\ \cos l\phi \end{cases} u_{00}$$

$$u_{1l}^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{(l+1)!}} (2^{1/2}\rho/w)^l e^{i(2+l)\psi} (l+1 - 2\rho^2/w^2) \times$$

$$\times \begin{cases} \sin l\phi \\ \cos l\phi \end{cases} u_{00}$$

В табл. 7.3 приведены некоторые моды  $u_{pl}^{(L)}$  низших порядков. Легко проверить, что любую моду  $u_{pl}^{(L)}$  можно представить в виде линейной комбинации мод  $u_{lm}^{(H)}$  [например,  $u_{10}^{(L)} = (u_{20}^{(H)} + u_{02}^{(H)})/4$ ]. На рис. 7.19 показаны распределения интенсивностей для нескольких мод  $TEM_{pl}$ .

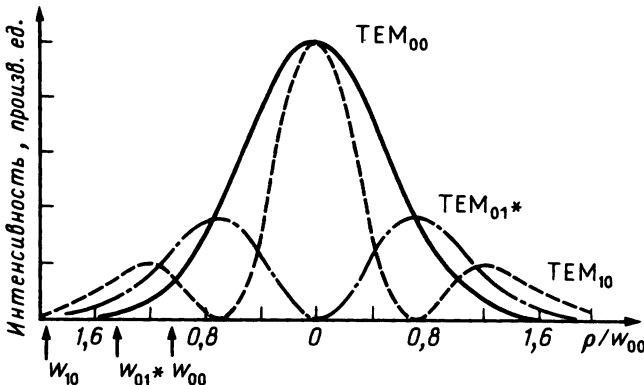


Рис. 7.19. Распределение интенсивности некоторых мод в цилиндрических координатах.

На рис. 7.19 приведено также распределение интенсивности  $TEM_{01}$ -моды, которая представляет собой гибридную моду с угловым распределением, возникающим в результате некогерентной суперпозиции двух  $TEM_{01}$ -мод, каждая из которых пропорциональна либо  $\cos \phi$ , либо  $\sin \phi$ :

$$u_{0,1^*}(x, y) \propto (a \sin \phi + b \cos \phi) \rho \exp(-\rho^2/w^2); \quad (7.8.12)$$

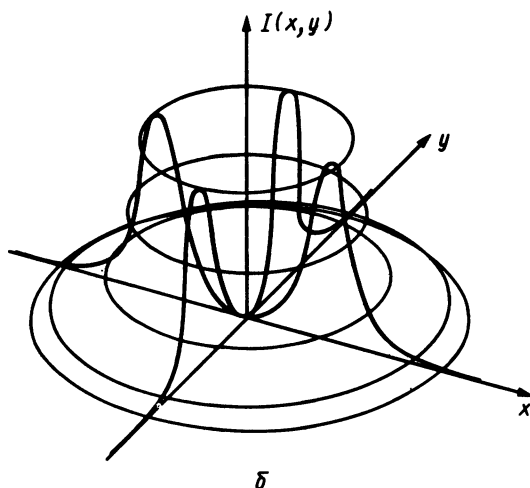
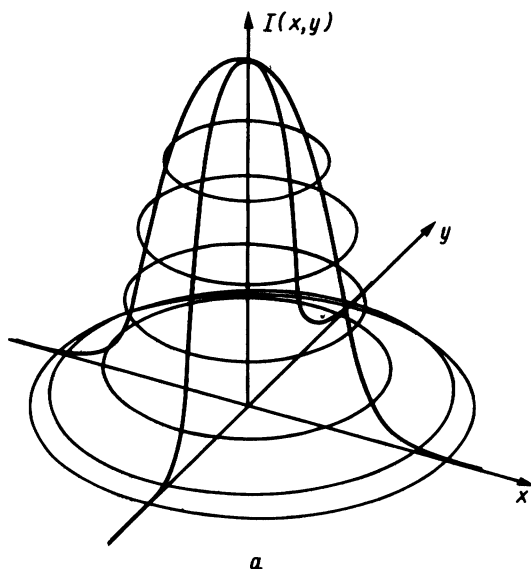


Рис. 7.20. Распределение интенсивности основной моды (а) и гибридной моды  $TEM_{01^*}$  (б).

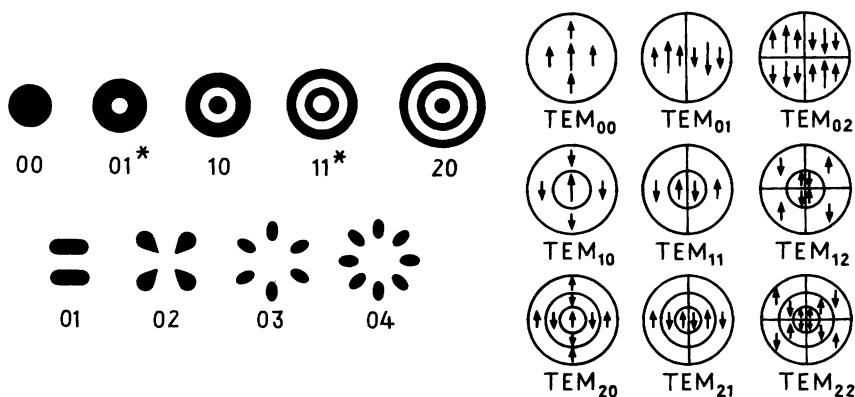


Рис. 7.21. Пространственная структура и конфигурация поля для некоторых мод гауссовых пучков. Длина стрелки и ее направление соответствуют амплитуде и поляризации лаггер-гауссовой моды.

здесь  $a$  и  $b$  флуктуируют независимо друг от друга (например, вследствие нестабильной работы лазера). В случае когда  $\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle$ , средняя интенсивность  $I_{01}$  моды  $TEM_{01}$  записывается в виде (рис. 7.19 и 7.20)

$$I_{01} \propto \langle a^2 \rangle \rho^2 \exp(-2\rho^2). \quad (7.8.13)$$

Моды Лагерра — Гаусса в случае  $l = 0$  являются аксиально-симметричными и соответствуют набору темных колец, число которых равно  $p$ . При  $p = 0$  поле  $u_0^{(L)}$  имеет  $2l$  радиальных темных полос. С ростом радиальных и угловых индексов растет и секционирование мод. В случае эрмит-гауссовых мод темные кольца заменяются полосами, параллельными осям симметрии. Число полос совпадает с номером соответствующего индекса. На рис. 7.21 показана пространственная структура мод и конфигурации мод для линейно-поляризованных мод Лагерра — Гаусса (обратите внимание на тороидальную форму моды  $TEM_{01}$ ).

## 7.9. ПРИМЕНЕНИЕ ЛУЧЕВЫХ МАТРИЦ

### ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЗ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ РЕЗОНАТОРУ

Альтернативным методом решения систем уравнений, описывающих последовательное построение изображения осевого источника [см. выражение (7.6.1)], является использование формализма *лучевых матриц* (см. разд. 2.15). Этот метод представляет собой по существу метод, разработанный Пирсом для анализа прохождения электронного пучка

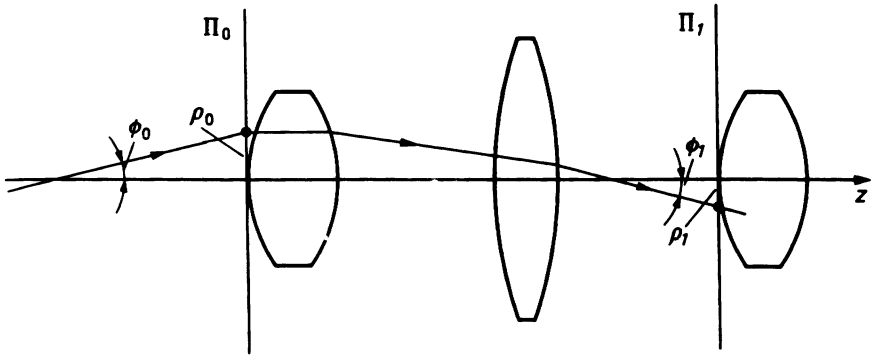


Рис. 7.22. Элементы последовательности линз. Плоскости  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ , касательные к поверхностям линз, являются соответственно входными и выходными плоскостями блока (см. на рис. 7.16 прямоугольную область, очерченную штриховой линией).

через последовательность электронных линз (см., например, работу Стеффена [27], указанную в литературе к гл. 2 настоящей книги).

Группируя эквивалентную резонатору последовательность линз в блоки, образуемые наименьшим числом элементов (рис. 7.22), мы можем записать соотношение

$$\mathbf{v}_{i+1} = \gamma \mathbf{v}_i, \quad (7.9.1)$$

где вектор  $\mathbf{v}_i$  (рис. 7.23) зависит от пространственной  $\rho_i$  и угловой  $\phi_i$  координат меридионального луча на входе  $i$ -го блока, в то время как  $\gamma$  зависит от фазового сдвига и ослабления вектора  $\mathbf{v}_i$  при прохождении через блок.

### 7.9.1. Увеличение

Вводя лучевую матрицу  $\mathbf{S}$  блоков, соотношение (7.9.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}. \quad (7.9.2)$$

Это соотношение определяет величину  $\gamma$  как собственное значение матрицы  $\mathbf{S}$ . Из вида этой матрицы [см. выражение (2.15.21)] с учетом того, что  $\det|\mathbf{S}| = 1$ , следует

$$\gamma_{\pm} = (A + D)/2 \pm i\{1 - [(A + D)/2]^2\}^{1/2} \equiv e^{\pm i\delta}; \quad (7.9.3)$$

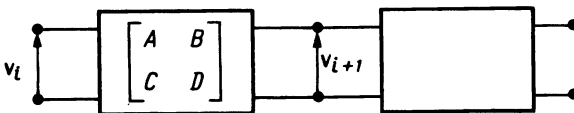


Рис. 7.23. Цепочка четырехполюсников, эквивалентная бесконечной последовательности линз.  $\mathbf{v}_i = (\rho_i, \phi_i)$  — двухкомпонентный вектор, составленный из пространственной  $\rho_i$  и угловой  $\phi_i$  координат луча на входе  $i$ -го блока.

здесь  $\delta = \arccos[(1/2)(A + D)]$ . В соответствии с комплексным или вещественным значением  $\delta$  величина вектора  $\mathbf{v}$  либо изменяется, либо остается постоянной вдоль цепочки четырехполосников. Обобщая неравенство (7.6.6), можно получить следующее условие *устойчивости* резонатора:

$$|A + D| < 2. \quad (7.9.4)$$

Если величина  $\gamma$  вещественна и больше единицы, то при прохождении пучка через один блок она соответствует *увеличению*  $M$  пучка. Из рис. 7.17 и 7.23 мы видим, что величина  $M$  совпадает с отношением  $\rho_{i+1}/\rho_i$  высот луча на выходной и входной плоскостях блока. Таким образом, для последовательности линз, изображенной на рис. 7.16, имеем

$$\gamma = M = \rho_{i+1}/\rho_i = [z_1/(d - z_1)][z_2/(d - z_2)]. \quad (7.9.5)$$

Отсюда, используя выражение (7.6.2), можно определить *увеличение*  $M$  за полный обход резонатора с параметрами  $g_1$  и  $g_2$ :

$$M = [1 + (1 - g_1^{-1}g_2^{-1})^{1/2}]/[1 - (1 - g_1^{-1}g_2^{-1})^{1/2}]. \quad (7.9.6)$$

### 7.9.2. Комплексная кривизна волнового фронта

Вектор  $\mathbf{v}$  при известном  $\gamma$  можно записать через собственные векторы  $\mathbf{v}_\pm$  матрицы  $\mathbf{S}$  в виде

$$\mathbf{v}_\pm = \begin{bmatrix} -B \\ A - \gamma_\pm \end{bmatrix}. \quad (7.9.7)$$

Отсюда следует, что углы наклона  $\phi_\pm$  лучей, входящие в выражение для  $\mathbf{v}_\pm$ , связаны с их высотами соотношением

$$\rho_\pm/\phi_\pm = -B/(A - \gamma_\pm). \quad (7.9.8)$$

Поскольку, согласно геометрической оптике, поле  $u(x, y)$  пропорционально величине  $\exp[-ikS(x, y)]$  и угол наклона  $\phi$  луча связан с  $S$  соотношением  $\phi = \partial S/\partial \rho$ , из (7.9.8) можно получить следующее выражение:

$$S_\pm(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2(\gamma_\pm - A)/B = \frac{1}{2}\rho^2/q_\pm, \quad (7.9.9)$$

где  $q_\pm$  — комплексная кривизна волнового фронта, удовлетворяющая соотношению

$$1/q_\pm = -(1/2B)\{(A - D) \pm i[4 - (A + D)^2]^{1/2}\}, \quad (7.9.10)$$

которое согласуется с условием (7.9.4) устойчивости резонатора с гауссовыми модами.

Комплексную кривизну волнового фронта на выходе каждого блока можно получить, используя простое соотношение

$$q_{\text{вых}} = (Aq_{\text{вх}} + B)/(Cq_{\text{вх}} + D), \quad (7.9.11)$$

известное как *закон ABCD* и которое нетрудно проверить подстанов-

кой  $q = \rho/\phi$ . Если под  $q_{\text{вх}}$  понимается величина, определяемая выражением (7.9.10), то как следствие самосопряженности пучков, образуемых лучами, удовлетворяющими (7.9.10), мы имеем  $q_{\text{вых}} = q_{\text{вх}}$ .

В заключение можно показать, что для резонаторов, описываемых параметрами  $g_1$  и  $g_2$ , матрица  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{S}_{21}$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2g_2 - 1 & 2g_2 d \\ \frac{2}{d}(2g_1 g_2 - g_1 - g_2) & 4g_1 g_2 - 2g_2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (7.9.12)$$

Заменой индексов можно получить аналогичное выражение для  $\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{12}$ . Выражение (7.9.10) для  $q_1$  и  $q_2$  относительно двух зеркал дает

$$1/q_1 = 1/R_1 - i(1/d)[(g_1/g_2)(1 - g_1 g_2)]^{1/2}, \quad (7.9.13a)$$

$$1/q_2 = 1/R_2 - i(1/d)[(g_2/g_1)(1 - g_1 g_2)]^{1/2}. \quad (7.9.13b)$$

В устойчивых резонаторах коэффициенты при мнимой единице в правых частях выражений (7.9.13) определяют размер пятна  $w_i$ :

$$w_1^2/(\lambda d) = N_1 = (1/\pi)[(g_1/g_2)(1 - g_1 g_2)]^{-1/2}, \quad (7.9.14a)$$

$$w_2^2/(\lambda d) = N_2 = (1/\pi)[(g_2/g_1)(1 - g_1 g_2)]^{-1/2} \quad (7.9.14b)$$

(где  $N_1$  и  $N_2$  — число Френеля для первого и второго зеркал). Для симметричного резонатора числа Френеля одинаковы и равны  $N = \pi^{-1}(1 - g^2)^{-1/2}$ , а размер пятна соответственно равен  $w = (\lambda R/\pi)^{1/2}[d/(2R - d)]^{1/4}$ .

### 7.9.3. Диаграмма устойчивости Бойда — Когельника

Предыдущее обсуждение выявило связь между условием устойчивости (7.6.6) и поперечным распределением мод внутри резонатора (эквивалентной последовательности линз). *Диаграмма устойчивости Бойда — Когельника* [15], построенная в соответствии с неравенством [7.6.6] (рис. 7.24), обобщает модовые свойства как оптических резонаторов, так и периодических фокусирующих систем. Любой резонатор представляется отдельной точкой в плоскости  $g_1 g_2$ . Резонаторы, расположенные в незаштригованных областях, устойчивы в том смысле, что любая осциллирующая лучевая траектория всегда остается ограниченной их пределами. Наоборот, для систем, расположенных в заштригованных областях, решения уравнения  $\mathbf{v}_{i+1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{S})' \cdot \mathbf{v}_0$  являются расходящимися, а соответствующие им лучевые траектории — пространственно неограниченными. Если параметры  $g$  резонатора таковы, что соответствующие им точки лежат достаточно глубоко в области устойчивости, то основная мода этого резонатора будет огра-

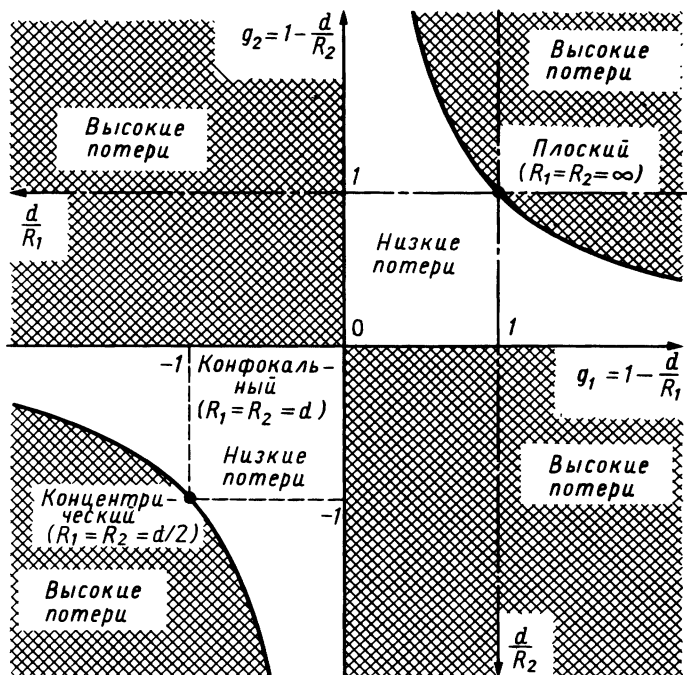


Рис. 7.24. Диаграмма Бойда — Когельника. Незаштрихованные области на плоскости  $g_1 g_2$  ( $g_{1,2}$  — параметры, определяемые значениями радиусов зеркал и расстояний  $d$  между ними) соответствуют устойчивым конфигурациям резонаторов (низким потерям), а заштрихованные — неустойчивым конфигурациям (высоким потерям).

ничена небольшим пространством в окрестности оптической оси, а энергетические потери в этой моде, связанные с дифракцией пучка на краях зеркал, будут минимальны. Наоборот, в неустойчивых резонаторах потери значительно выше — недостаток, который вполне компенсируется большим модовым объемом и более эффективной дифракционной связью, которая устраняет недостатки частично пропускающих зеркал.

Анализ в рамках волновой оптики, представленный в разд. 7.14—7.19, показывает, что в устойчивом резонаторе поперечные размеры мод увеличиваются при приближении к границам областей устойчивости. В частности, слабо устойчивые резонаторы (т. е. находящиеся очень близко к границе устойчивости) ведут себя аналогично открытому волноводу, у которого стенками являются зеркала резонатора и распространение излучения происходит в перпендикулярном оптической оси направлении [2]. Эти волноводы работают в области

критических углов, что обеспечивает близкие к единице коэффициенты отражения на открытых концах.

### 7.10. МОДОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ВНУТРИ УСТОЙЧИВОГО РЕЗОНАТОРА, НЕ ИМЕЮЩЕГО ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

Рассмотрим линейный резонатор, ограниченный двумя бесконечно протяженными сферическими зеркалами с коэффициентами отражения по амплитуде  $r_1$  и  $r_2$ . Для того чтобы найти поле  $u$ , возбуждаемое источником гармонических колебаний, расположенным внутри резонатора, удобно представить  $u$  как сумму собственных функций  $\Phi_{lmn}$  (то, что у  $\Phi_{lmn}$  используются три индекса, мы объясним ниже) лапласиана  $\nabla^2$  (см. работу ван Бладеля [8], указанную в литературе к гл. 4 настоящей книги):

$$\nabla^2 \Phi_{lmn} = -k_{lmn}^2 \Phi_{lmn}, \quad (7.10.1)$$

удовлетворяющих следующему условию ортогональности (см. задачу 7):

$$(k_{l'm'n'}^2 - k_{lmn}^2) \iiint_{\text{Резонатор}} \Phi_{l'm'n'} \Phi_{lmn} dV = 0, \quad (7.10.2)$$

и граничному условию на поверхности зеркал (ср. с разд. 3.23):

$$\partial \Phi_{lmn} / \partial n_0 = (-ik_0 / \zeta_0) Z_s \Phi_{lmn}, \quad (7.10.3)$$

где импеданс на поверхности зависит от коэффициента отражения, т. е.  $Z_s = (r - 1)/(r + 1)$ .

Поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , наведенное полем поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ , присутствующим внутри резонатора, удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца и граничному условию (7.10.3) на зеркалах. Если  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  являются линейно-поляризованными и ортогональными оптической оси и  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ , то уравнение (1.1.11) сводится к неоднородному скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\omega^2/c^2) \mathbf{E} = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (7.10.4)$$

Разложим вектор электрического поля  $\mathbf{E}$  в ряд по модам резонатора:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{E}_n \Phi_n(\mathbf{r}), \quad (7.10.5)$$

где три индекса  $lmn$  мы суммировали в один. При этом уравнение (7.10.4) принимает вид

$$\sum_n \mathbf{E}_n (k^2 - k_n^2) \Phi_n = -\omega^2 \mu_0 \mathbf{P}. \quad (7.10.6)$$

Отсюда находим следующее выражение для коэффициентов  $\mathbf{E}_n$ :

$$\mathbf{E}_n = \frac{\omega^2 \mu_0}{k_n^2 - k^2} \frac{\iiint \mathbf{P} \Phi_n dV}{\iiint \Phi_n^2 dV} = \frac{\omega^2 \mu_0}{k_n^2 - k^2} \mathbf{P}_n. \quad (7.10.7)$$



При выводе этого выражения мы использовали условие (7.10.2), причем было сделано дополнительное предположение о том, что различные ортогональные собственные функции могут иметь одно и то же собственное значение. Таким образом, разложение (7.10.5) можно переписать в виде

$$E(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \sum_n \frac{P_n}{k_n^2 - k^2} \Phi_n(\mathbf{r}). \quad (7.10.8)$$

В частности, когда  $\mathbf{P}$  описывается дельта-функцией [ $\mathbf{P} \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ],  $u$  представляет собой отклик резонатора на электромагнитное излучение точечного источника и, таким образом, совпадает с функцией Грина резонатора  $G_{\text{рез}}$ , которая в соответствии с (7.10.8) запишется в виде

$$G_{\text{рез}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \omega^2 \mu_0 \sum_n \frac{1}{k_n^2 - k^2} \frac{\Phi_n(\mathbf{r})\Phi_n(\mathbf{r}_s)}{\iiint_{\text{рез}} \Phi_n^2 dV}. \quad (7.10.9)$$

Читатель должен обратить особое внимание на то, что поле в резонаторе в общем случае состоит из набора мод  $\Phi_{lmn}$  даже тогда, когда в резонаторе возбуждается всего одна частота. В частности, когда говорят, что лазер работает в одномодовом режиме, подразумевается то, что поле в резонаторе имеет одну частоту, при этом оно необязательно представлено одной собственной функцией  $\Phi_{lmn}$ .

Оставим пока проблему определения собственных функций  $\Phi_{lmn}$ . Предположим, что зеркала достаточно велики и отражают гауссовы пучки любого порядка. Тогда мы можем записать следующее выражение:

$$\Phi_{lmn} \propto u_{lmn}^{(+)} + C_{lmn} u_{lmn}^{(-)}, \quad (7.10.10)$$

где  $u_{lmn}^{(+)}$  и  $u_{lmn}^{(-)}$  представляют либо эрмит-гауссовы, либо лаггер-гауссовы пучки, распространяющиеся соответственно справа налево и слева направо, волновые фронты которых на выходе резонатора совпадают с поверхностями зеркал.

Коэффициенты  $C_{lmn}$  определяются из граничных условий (7.10.3), которые можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$C_{lmn} u_{lmn}^{(-)}(x, y, z_2) = r_2 u_{lmn}^{(+)}(x, y, z_2), \quad (7.10.11a)$$

$$u_{lmn}^{(+)}(x, y, z_1) = r_1 C_{lmn} u_{lmn}^{(-)}(x, y, z_1). \quad (7.10.11b)$$

Поскольку эта система уравнений может быть решена, только если  $u_{lmn}^{(-)}(x, y, z_2) u_{lmn}^{(+)}(x, y, z_1) = r_1 r_2 u_{lmn}^{(+)}(x, y, z_2) u_{lmn}^{(-)}(x, y, z_1)$ , граничные условия можно преобразовать в следующее уравнение для волнового вектора  $k_{lmn}$  эрмит-гауссовой моды:

$$\exp\{-2i[k_{lmn}d - (l + m + 1)[\psi(z_2) - \psi(z_1)]]\} = 1/(r_1 r_2), \quad (7.10.12)$$

которое удобно разделить на два уравнения

$$2k''d - 2(k''/k')/[1 + (k''/k')^2](l + m + 1) \times \\ \times [\arctg(z_2/b) - \arctg(z_1/b)] = -\ln|r_1r_2|, \quad (7.10.13a)$$

$$2k'd - 2(l + m + 1)/[1 + (k''/k')^2] \times \\ \times [\arctg(z_2/b) - \arctg(z_1/b)] = 2\pi n + \arg(r_1r_2), \quad (7.10.13b)$$

где в выражениях для  $k' = \operatorname{Re} k_{lmn}$  и  $k'' = \operatorname{Im} k_{lmn}$  индексы  $lmn$  для простоты опущены.

Здесь удобно заметить, что моды, возбуждаемые источником с частотой  $\omega$ , имеют собственные значения  $k_n$ , близкие к  $\omega/c$ . В этом можно убедиться, исследуя выражение для функции Грина (7.10.9). Кроме того, поскольку коэффициенты отражения зеркал резонатора обычно очень близки к единице, с учетом выражения (7.10.13a) мы имеем  $k'' = O(1/d)$  и аналогично  $k' = O(1/\lambda)$ ; так как  $d/\lambda \gg 1$ , то  $|k''/k'| \ll 1$ . Таким образом, уравнения (7.10.13a) и (7.10.13b) принимают вид

$$2k''_{lmn}d = -\ln|r_1r_2|, \quad (7.10.14a)$$

$$k'_{lmn}d - (l + m + 1)[\arctg(z_2/b) - \arctg(z_1/b)] = n\pi + \frac{1}{2}\arg(r_1r_2). \quad (7.10.14b)$$

В соответствии с (7.10.14a) мнимая величина  $k''_{lmn} \cong (1 - |r_1 r_2|)/(2d)$  не зависит от порядка рассматриваемой моды, в то время как вещественная часть величины  $k_{lmn}$  зависит от продольного индекса  $n$  и поперечных индексов  $l$  и  $m$ . Для лаггер-гауссовой моды уравнение (7.10.14b) необходимо заменить на следующее:

$$k'_{lpm}d - (2p + l + 1)[\arctg(z_2/b) - \arctg(z_1/b)] = n\pi + \frac{1}{2}\arg(r_1r_2). \quad (7.10.14в)$$

Наконец, для симметричного резонатора в случае  $r_1 = r_2$  совместное решение уравнений (7.10.10) и (7.10.11) дает

$$\Phi_{lmn} \propto \frac{w_0}{w} H_l H_m \exp\left(-i \frac{k'_{lmn} \rho^2}{2R} - \frac{\rho^2}{w^2}\right) \sin\left[k_{lmn}z - (l + m + 1)\psi(z) + n \frac{\pi}{2}\right]. \quad (7.10.15)$$

### 7.10.1. Приближение медленноменяющейся амплитуды

Несмотря на внешнюю простоту, модовое представление поля  $u$  с помощью разложения (7.10.5) само по себе не дает простого описания поля. Если подставить выражение (7.10.15) в разложение (7.10.5) и обозначить через  $\bar{n}$  значение индекса  $n$ , при котором разность  $|k_{lmn} - \omega/c|$  принимает минимальное значение, то можно записать следующее выражение:

$$E \propto \left[ \sum_{lmn} e^{-i(n-\bar{n})\pi/2} E_{lmn} e^{-i(n-\bar{n})\pi z/d} \right] u_{lm\bar{n}}^{(+)} - \left[ \sum_{lmn} e^{i(n-\bar{n})\pi/2} E_{lmn} e^{i(n-\bar{n})\pi z/d} \right] u_{lm\bar{n}}^{(-)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{lm} [E_{lm}^{(+)}(z)u_{lm\bar{n}}^{(+)} + E_{lm}^{(-)}(z)u_{lm\bar{n}}^{(-)}]. \quad (7.10.16)$$

Если число возбуждаемых мод ограничено условием  $|n - \bar{n}| \ll d/\lambda$ , то  $E_{lm}^{(\pm)}(z)$  является медленноменяющейся функцией координаты  $z$  на длине  $\lambda$ , а именно  $|d^2 E_{lm}^{(\pm)}/dz^2| \ll k|dE_{lm}^{(\pm)}/dz|$ .

Поскольку поляризация  $\mathbf{P}$  представляет собой функцию отклика среды на действие поля  $\mathbf{E}$ , разумно предположить, что  $\mathbf{P}$  определяется выражением, аналогичным (7.10.16), в котором медленноменяющиеся функции  $E_{lm}^{(\pm)}(z)$  заменены аналогичными функциями  $P_{lm}^{(\pm)}(z)$ . Таким образом, подставляя соответствующие выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  в уравнение (7.10.4) и пренебрегая вторыми производными, мы имеем следующее уравнение:

$$\sum_{lm} \left[ E_{lm}^{(+)}(k^2 - k_{\bar{n}}^2) - 2ik_{\bar{n}} \frac{dE_{lm}^{(+)}}{dz} + \omega^2 \mu_0 P_{lm}^{(+)} \right] u_{lm\bar{n}}^{(+)} + \sum_{lm} \left[ E_{lm}^{(-)}(k^2 - k_{\bar{n}}^2) + 2ik_{\bar{n}} \frac{dE_{lm}^{(-)}}{dz} + \omega^2 \mu_0 P_{lm}^{(-)} \right] u_{lm\bar{n}}^{(-)} = 0, \quad (7.10.17)$$

которое с учетом условия ортогональности между различными модами  $u_{lm\bar{n}}$  можно записать в виде системы дифференциальных уравнений, связывающих амплитуды  $E_{lm}^{(\pm)}(z)$  двух пространственно неоднородных волн, а именно ТЕМ-мод резонатора, с аналогичными величинами, связанными с поляризацией. Решения этих уравнений мы рассмотрим в разд. 7.19.

## 7.11. УСТОЙЧИВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Согласно представленному выше рассмотрению, в устойчивых резонаторах собственными модами являются гауссовы пучки. Это впервые экспериментально подтвердили Когельник и Ригрод [16], получившие с помощью ЭОП фотоснимки отдельных мод He—Ne-лазера ( $\lambda = 1,15$  мкм), который имел концентрический резонатор длиной 230 см. Из-за трудностей, связанных с получением высокой точности измерений распределения интенсивности эти авторы ограничились измерениями расстояний между узлами и обнаружили хорошее согласие со значениями, полученными в предыдущем разделе. Отсутствие частоты модуляции в спектре интенсивности излучения явилось подтверждением того, что в распределении отсутствуют другие моды [17, 18].

После этого короткого отступления вернемся теперь к определению параметров моды (размера пятна и положения перетяжки). Эти параметры можно получить двумя различными способами. С одной

стороны, используя выражение (7.6.2), можно определить комплексную абсциссу  $z_0$ , а затем из соотношения (7.7.2а) вычислить  $w$  и  $R$  на зеркалах. С другой стороны, можно определить величину комплексной кривизны на зеркалах, используя матрицу  $ABCD$  [см. выражение (7.9.10)].

Диаметр перетяжки  $w_0$  для симметричного резонатора можно вычислить по формуле

$$w_0 = (\lambda/\pi)^{1/2} (d/2)^{1/4} (R - d/2)^{1/4} = [(\lambda d)/(2\pi)]^{1/2} [(1 + g)/(1 - g)]^{1/4}, \quad (7.11.1)$$

а размер пятна за зеркалами дается выражением

$$w = w_0 [2/(1 + g)]^{1/2}. \quad (7.11.2)$$

Можно показать, что диаметр перетяжки в асимметричном резонаторе записывается в виде

$$w_0 = (\lambda/\pi)^{1/2} \{ [d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)] / (R_1 + R_2 - 2d)^2 \}^{1/4}, \quad (7.11.3)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  положительны, если зеркала вогнутые, и отрицательны, если зеркала выпуклые. Кроме того, мы имеем следующее выражение для расстояний  $d_1$  и  $d_2$  от перетяжки до зеркал:

$$d_{1,2} = R_{1,2}/2 + (1/2)(R_{1,2}^2 - 4b^2)^{1/2}. \quad (7.11.4)$$

*Резонансные частоты* можно найти, если потребовать, чтобы фаза гауссовой моды при смещении волнового фронта от одного зеркала к другому изменялась на число, кратное  $\pi$  [см. выражения (7.10.14б) и (7.10.14в)]. Таким образом, мы имеем для резонаторов прямоугольной и цилиндрической геометрии соответственно

$$v_{imn} = v_0 \{ n + [(l + m + 1)/\pi] \arccos(g_1 g_2)^{1/2} \}, \quad (7.11.5a)$$

$$v_{ipn} = v_0 \{ n + [(2p + l + 1)/\pi] \arccos(g_1 g_2)^{1/2} \}. \quad (7.11.5б)$$

Для конфокального резонатора модовые множители  $l + m + 1$  и  $2p + l + 1$  заменяются множителем  $1/2$ , так что в этом случае мы имеем сильное вырождение мод. Точные выражения для резонансных частот в резонаторах с зеркалами конечных размеров мы рассмотрим ниже (см. разд. 7.14), а пока, за исключением резонаторов с плоскопараллельной и концентрической конфигурациями (которые, как уже указывалось, являются слабоустойчивыми и у которых моды отличаются от гауссовых), будем пользоваться выражениями (7.11.5).

Выражения для резонансных частот, записанные выше, справедливы лишь для пустых резонаторов. В случае когда резонатор заполнен усиливающей средой, аномальная дисперсия приводит к изменению показателя преломления с частотой вблизи центральной частоты лазерного перехода. Вследствие этого частоты продольных мод уже не будут отделены друг от друга одинаковыми интервалами. Однако в

газовых лазерах эти частотные сдвиги составляют величину всего лишь порядка  $10^{-3}$ .

### 7.11.1. Дифракционные потери и расходимость

Потери в резонаторе можно вычислить, учитывая дифракционные эффекты, обусловленные конечным размером зеркал. В разд. 7.14 мы покажем, что дифракционные эффекты эквивалентны ослаблению, которому подвергается излучение, распространяющееся от одного зеркала к другому в среде с мнимой компонентой  $k''$  волнового вектора  $k$ . Определим потери  $pl$ -й моды за один проход  $\alpha_{pl}$ :

$$\alpha_{pl} = 2k''_{pl}d. \quad (7.11.6)$$

Ниже мы покажем, что  $\alpha_{pl}$  зависит от параметров резонатора  $g$  и числа Френеля  $N = a^2/\lambda d$ , где  $a$  — радиус зеркала. В общем случае величину  $\alpha_{pl}$  приходится вычислять путем решения интегральных уравнений Фокса — Ли (см. разд. 7.14), поскольку она связана с собственными значениями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  этих уравнений соотношением

$$\alpha_{pl} = 1 - |\gamma_{1lp}\gamma_{2lp}|. \quad (7.11.7)$$

Вайнштейн [2] получил некоторые асимптотические выражения для коэффициента потерь  $\alpha$  и фазового сдвига  $\beta$  за один проход для мод *плоскопараллельного* резонатора с круглыми зеркалами. Таким образом, при больших числах Френеля мы имеем

$$\alpha_{pl} = 8k_{lp}\delta(m + \delta)/[(m + \delta)^2 + \delta^2]^2, \quad \beta_{lp} = [m/(4\delta)]\alpha_{lp}; \quad (7.11.8)$$

здесь  $\delta = 0,824$  [см. разд. 7.16 и, в частности, выражение (7.16.23)],  $k_{lp}$  —  $p$ -й нуль функции Бесселя  $J_l$ , а  $m = (8\pi N)^{1/2}$ . Для конфокальных резонаторов Слепян [19] нашел, что при  $N \gg 1$

$$\alpha_{pl} = [2\pi(8\pi N)^{2p+l+1}e^{-4\pi N}]/[p!(p+l)!], \quad \beta_{lp} = (2p+l+1)\pi/2. \quad (7.11.9)$$

Таблица 7.4. Отношение  $\alpha_{pl}/\alpha_{00}$  потерь для моды высоких порядков к потерям для основной моды

| TEM <sub>pl</sub> | Плоскопараллельный резонатор | Конфокальный резонатор |
|-------------------|------------------------------|------------------------|
| 01                | 1,59                         | 4N                     |
| 02                | 2,13                         | 10N <sup>2</sup>       |
| 10                | 2,29                         | 16N <sup>2</sup>       |
| 03                | 2,65                         | 21N <sup>3</sup>       |
| 11                | 2,92                         | 85N <sup>3</sup>       |
| 04                | 3,15                         | 32N <sup>4</sup>       |
| 12                | 3,50                         | 160N <sup>4</sup>      |

Из этих выражений видно, что потери в конфокальных резонаторах сильнее зависят от модовых индексов  $l$  и  $p$ , чем в плоскопараллельных. В табл. 7.4 приводятся величины отношений  $\alpha_{pl}/\alpha_{00}$  потерь за один проход для плоского и конфокального резонаторов. В частности, при  $N = 1$ , т. е. когда диаметр моды такой же, как и у зеркала, для конфокального резонатора  $\alpha_{10}/\alpha_{00} = 16$ . Таким образом, становится понятным, почему по сравнению с другими резонаторами в плоскопараллельном резонаторе основная мода легче распадается на моды высоких порядков в результате рассеяния на неоднородностях среды (например, на частицах пыли на зеркалах) и других препятствиях.

Если конфигурация устойчивого резонатора отличается от плоскопараллельной, концентрической или конфокальной, то профили мод резонатора близки к гауссовым, поэтому в первом приближении дифракционные потери в нем можно вычислить, считая, что часть мощности излучения, падающего на зеркала, отражается назад в резонатор [20]. Таким образом, мы имеем

$$\alpha_{pl} \cong 1 - \frac{\iint_{M_1} |u_{pl}|^2 dS_1}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |u_{pl}|^2 dS_1} - \frac{\iint_{M_2} |u_{pl}|^2 dS_2}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |u_{pl}|^2 dS_2}. \quad (7.11.10)$$

Наиболее важным параметром резонатора является *полная угловая расходимость*  $2\theta$  в одномодовом режиме. Для симметричного резонатора эта величина дается выражением [см. выражение (7.7.5)].

$$2\theta = 2\lambda/(\pi w_0) = 2[2\lambda/(\pi d)]^{1/2}[(1-g)/(1+g)]^{1/4}. \quad (7.11.11)$$

### 7.11.2. Влияние разъюстировки резонатора

До сих пор рассматривались только идеально съюстированные резонаторы. Если одно из зеркал, скажем  $M_1$ , немного повернуть на угол  $\delta\phi_1$  (рис. 7.25), то пучок будет распространяться вдоль новой оси, проходящей через новый центр кривизны  $O'_1$  зеркала  $M_1$ . Новые оптиче-

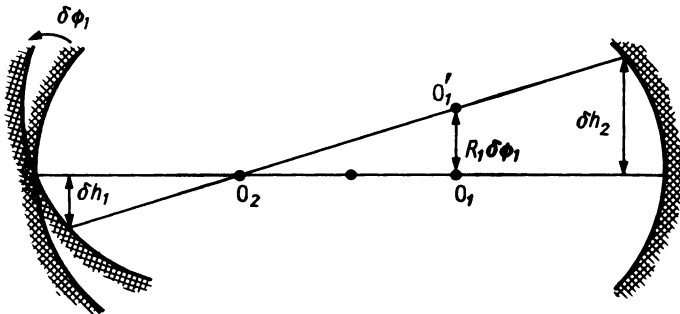


Рис. 7.25. Смещение оптической оси, вызванное наклоном зеркала.

ские оси пересекут поверхности обоих зеркал в других точках, положения которых относительно прежних смещаются на расстояния  $\delta h_1$  и  $\delta h_2$ . Если оба зеркала повернуты на угол соответственно  $\delta\phi_1$  и  $\delta\phi_2$ , то для смещений  $\delta h_1$  и  $\delta h_2$  имеем

$$\delta h_1/d = [g_2/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_1 + [1/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_2, \quad (7.11.12)$$

$$\delta h_2/d = [1/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_1 + [g_2/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_2.$$

Вычитая первое уравнение из второго, *угловой сдвиг*  $\delta\phi$  новых оптических осей относительно прежних можно записать в виде

$$\delta\phi = [(1 - g_2)/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_1 - [(1 - g_1)/(1 - g_1g_2)]\delta\phi_2. \quad (7.11.13)$$

## 7.12. НЕУСТОЙЧИВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Лазеры высокой мощности можно разделить на два типа. В так называемых *усилителях мощности с задающим генератором* (название заимствовано из радиотехники) стабилизированный маломощный лазер управляет несколькими ступенями усиления. Напротив, если процессы генерации и стабилизации частоты излучения в генераторе идут одновременно с усилением, то лазеры относят к типу *мощных генераторов*. Лазеры первого типа более устойчивы, чем лазеры с самовозбуждающимся генератором. Последние чаще находят применение в тех случаях, когда важную роль играют небольшие размеры и компактность, а не требования к стабильности. Однако к обоим этим типам лазерных систем должно предъявляться важное требование, а именно работать по возможности в режиме одной поперечной моды ( $TEM_{00}$ ); это необходимо для получения почти однородного волнового фронта на выходе системы, что позволяет сфокусировать лазерный пучок до дифракционного предела, поскольку любое отклонение волнового фронта от однородного приведет к увеличению размеров фокального пятна и расходимости в дальнем поле. В режиме многомодовой генерации характерные нерегулярности структуры волнового фронта флуктуируют столь быстро, что их трудно уменьшить даже специальным образом сконструированными фазовыми корректорами на выходе. Опуская рассмотрение свойств систем с задающими генераторами, мы сконцентрируем свое внимание на изучении мощных генераторов.

Для получения оптически однородной моды резонатор необходимо конструировать таким образом, чтобы все элементарные излучатели в нем (возбужденные атомы или молекулы) сильно взаимодействовали между собой, поскольку это обеспечивает необходимую фазовую когерентность колебаний отдельных источников. Пучок, расходящийся за счет дифракции, возбуждает множество элементарных источников, а

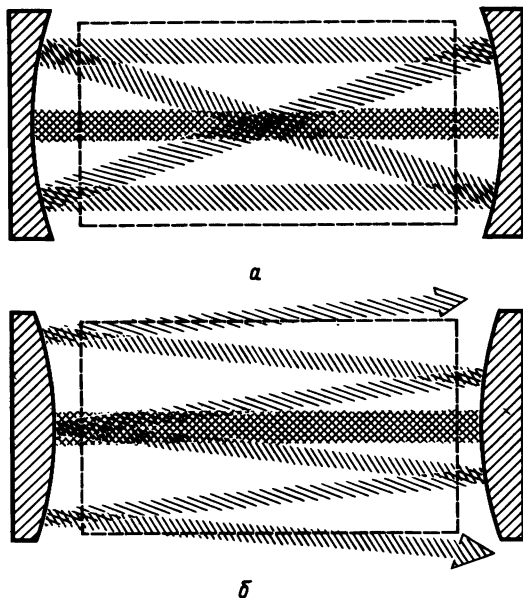


Рис. 7.26. Схематическое представление основной моды и мод высших порядков при  $N \gg 1$  для устойчивого (а) и неустойчивого (б) резонаторов. (Из работы Чоцко и Честера [5]. © John Wiley and Sons, Inc., 1976.)

поскольку число Френеля представляет собой главный фактор, ответственный за этот эффект, можно сделать заключение, что *малое число Френеля  $N$  является необходимым условием сильного дифракционного взаимодействия элементарных источников в резонаторе*. Действительно, режим одномодовой генерации достигается в устойчивых резонаторах с числом Френеля, близким к единице. Однако это условие не применимо к лазерам высокой мощности, которые, как известно, характеризуются большим объемом активной среды (например, при объеме активной среды 1 л, чтобы получить на длине волны 3 мкм число Френеля, равное единице, необходим резонатор длиной 15 метров). Следовательно, в данной ситуации приходится идти на увеличение числа Френеля.

На рис. 7.26, а схематически показана конфигурация поля в устойчивом резонаторе с большим числом Френеля. Выходной пучок (изображен перекрестными штрихами) образуется в результате некогерентных вкладов различных мод, что является следствием неэффективной дифракционной связи. В неустойчивом же резонаторе (рис. 7.26, б) дифракционные эффекты компенсируются геометрическим взаимодействием между лучами, поскольку в данном случае лучи



перекрывают весь объем резонатора. Иными словами, в центральной области резонатора, для которой число Френеля порядка единицы, существует некоторое ядро моды, обеспечивающее однородное усиление волнового фронта при каждом полном проходе; при этом излучение выводится с краев выходного зеркала<sup>1)</sup>.

На преимущества неустойчивых резонаторов впервые указал Сигмэн [21] в 1965 г., который разработал также простой метод в приближении геометрической оптики [22]. В этом методе предполагается, что основная мода неустойчивого резонатора состоит из двух сферических волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Обозначим через  $\Gamma_1$  ту часть энергии волны, которая распространяется в направлении зеркала 2 после отражения от зеркала 1 сферической волны единичной интенсивности. Аналогичным образом определим и  $\Gamma_2$ . С помощью рис. 7.16 нетрудно показать, что

$$\Gamma_1 = \{z_1 a_1 / [(d - z_1) a_2]\}^2, \quad \Gamma_2 = \{z_2 a_2 / [(d - z_2) a_1]\}^2, \quad (7.12.1)$$

здесь  $z_{1,2}$  — расстояния от фокусов двух сферических волн до зеркал (см. разд. 7.6), а  $a_{1,2}$  — радиусы зеркал. Таким образом, относительную интенсивность волны на любом из зеркал после полного прохода в прямом и обратном направлениях можно записать в виде

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \left[ \frac{z_1 z_2}{(d - z_1)(d - z_2)} \right]^2 = \left[ \frac{1 - (1 - g_1^{-1} g_2^{-1})^{1/2}}{1 + (1 - g_1^{-1} g_2^{-1})^{1/2}} \right]^2 = \frac{1}{M^2}. \quad (7.12.2)$$

Главный результат этого геометрического рассмотрения состоит в том, что *потери за полный проход*  $\alpha = 1 - \Gamma$  *зависят лишь от увеличения*  $M$  *резонатора и не зависят от диаметра зеркал*. На плоскости  $g_1 g_2$  можно построить семейство гипербол, каждая из которых соответствует различным конфигурациям резонаторов с одинаковыми потерями (рис. 7.27).

На рис. 7.28 показаны различные типы неустойчивых резонаторов. Из них наиболее часто применяются первые два, поскольку фокусы зеркал располагаются вне резонатора. Действительно, если фокусы лежат в области активной среды, то образующееся в них интенсивное световое поле может вызвать нелинейные эффекты (даже пробой), что, естественно, ухудшит качество оптического пучка. *Отрицательная* же конфигурация неустойчивых резонаторов (рис. 7.28, *г*) менее чувствительна к недостаточно точному изготовлению зеркал и их юстировке. *Положительная конфокальная* (рис. 7.28, *а*) конфигурация, впервые предложенная Ананьевым [3], применяется наиболее ча-

<sup>1)</sup> Такой способ вывода излучения лазера называется дифракционным. — *Прим. перев.*

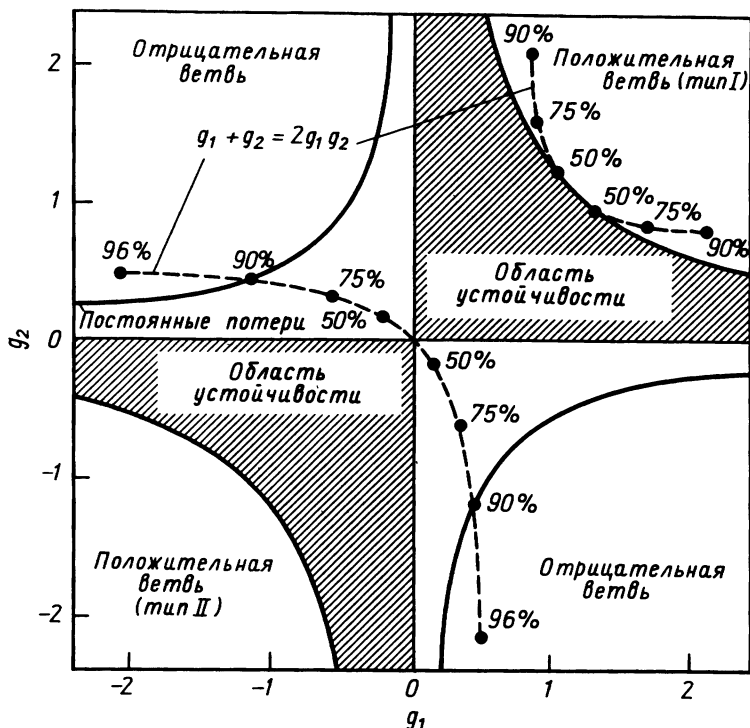


Рис. 7.27. Конфигурации резонаторов с одинаковыми значениями увеличения и потерь (90%) (гипербола, изображенные непрерывной линией) в плоскости  $g_1g_2$ . Гипербола, изображенная штриховой линией, представляет собой геометрическое место точек для различных конфокальных конфигураций. (Из работы Чоцко и Честера [5] © John Wiley and Sons, Inc., 1976.).

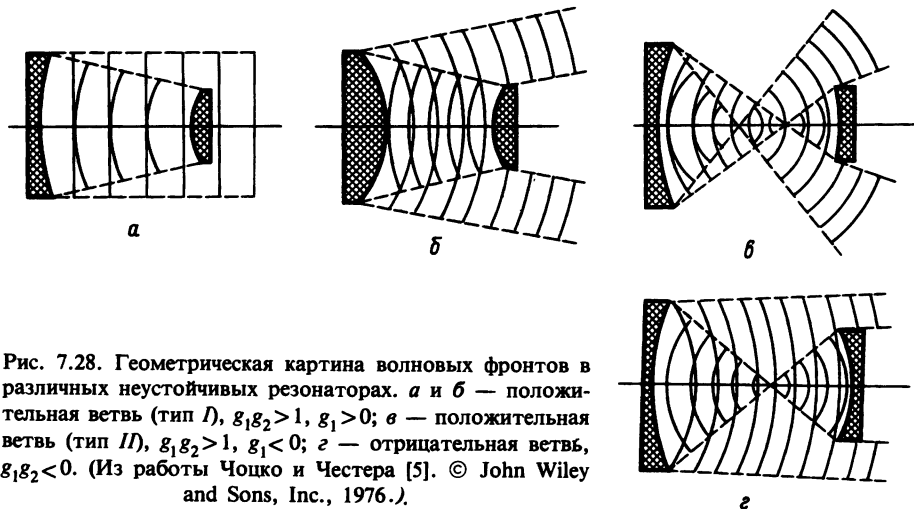


Рис. 7.28. Геометрическая картина волновых фронтов в различных неустойчивых резонаторах. а и б — положительная ветвь (тип I),  $g_1g_2 > 1, g_1 > 0$ ; в — положительная ветвь (тип II),  $g_1g_2 > 1, g_1 < 0$ ; г — отрицательная ветвь,  $g_1g_2 < 0$ . (Из работы Чоцко и Честера [5]. © John Wiley and Sons, Inc., 1976.).

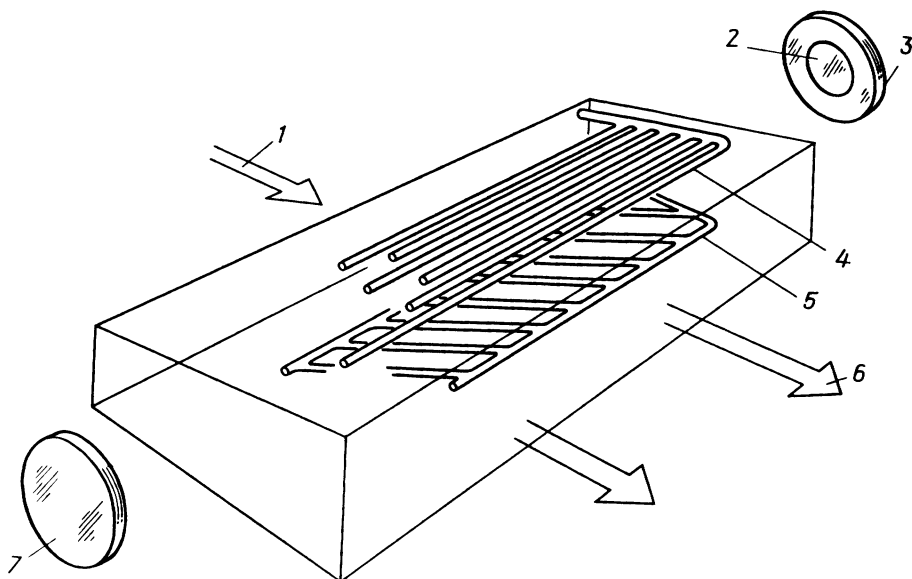


Рис. 7.29. Схематическое представление телескопического резонатора, используемого в проточных лазерах с поперечным разрядом. 1 — входной поток; 2 — выходное зеркало; 3 — фокусирующее зеркало; 4 — катод; 5 — анод; 6 — выходной поток; 7 — глухое зеркало.

сто, поскольку в этом случае коллимированное выходное излучение снимается с одного конца резонатора (рис. 7.29). Своим названием эта конфигурация обязана выпуклому выходному зеркалу и тому, что в плоскости  $g_1 g_2$  она располагается в правом верхнем квадранте<sup>1)</sup>. Выходное зеркало (меньшего размера) радиусом  $a_2$  имеет отрицательную кривизну радиуса  $R_2$ , в то время как глухое зеркало радиусом  $a_1$  имеет положительную кривизну радиуса  $R_1$ . Потери  $\alpha$  за полный оборот в приближении геометрической оптики равны коэффициенту связи  $C$ , определяемому выражением

$$C = 1 - \Gamma = 1 - 1/M^2, \quad (7.12.3)$$

причем увеличение  $M$  связано с  $R_1$  и  $R_2$  простым соотношением

$$M = -R_1/R_2, \quad (7.12.4)$$

а параметры  $g_1$  и  $g_2$  записываются в виде

$$g_1 = (M + 1)/(2M), \quad g_2 = (M + 1)/2. \quad (7.12.5)$$

Пучок, выходящий из этих резонаторов, в ближней зоне имеет форму бублика, поскольку центральная область ослаблена выходным зеркалом. В промежуточной зоне могут появиться постепенно исчеза-

<sup>1)</sup> Этот резонатор называется телескопическим. — Прим. перев.

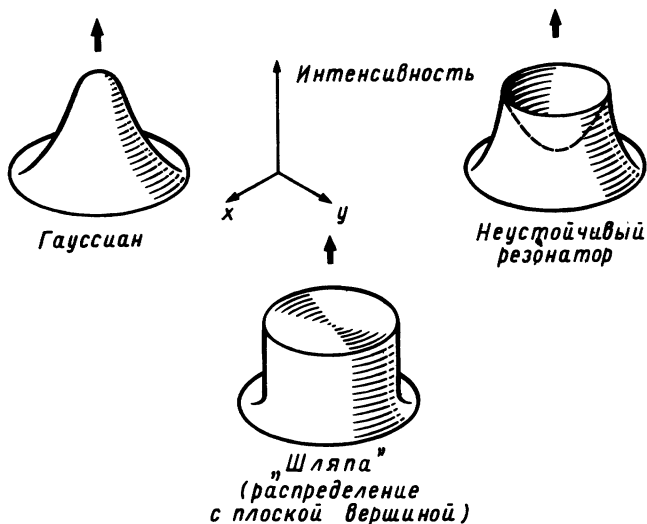


Рис. 7.30. Типичная форма пучков, используемых в лазерах высокой мощности.

ющие с расстоянием от источника *кольца Френеля*, модулирующие бубликовую форму профиля пучка, в центре которого возникает маленькое пятно, имеющее чрезвычайно высокую плотность мощности излучения и могущее потенциально приводить к разрушению оптических элементов. Это пятно называют *пуассоновским*, или *пятном Араго*. В дальней зоне поперечный профиль пучка описывается функцией Эйри.

На рис. 7.30 схематически показаны профили пучков, которые наиболее часто используются в различного рода лазерных приложениях. Промежуточной между гауссовой формой и формой с провалом является *распределение с плоской вершиной*, которое можно рассматривать как гауссиан с усеченной вершиной. Неустойчивые резонаторы исключительно чувствительны к разъюстировке, в частности к наклону зеркал [23]. Если в телескопическом резонаторе наклонить заднее зеркало на угол  $\delta\phi$ , то выходной пучок отклонится на угол  $\phi$  [ср. выражения (7.11.13) и (7.12.5)], определяемый выражением

$$\phi = [2M/(M - 1)] \delta\phi. \quad (7.12.6)$$

Из-за наличия здесь в знаменателе разности  $M - 1$  величину  $M$  выбирают, как правило, больше чем 1,5.

### 7.13. ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ ПУСТЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Как дифракционные потери, так и преобразование гауссовых пучков внутри резонаторов определяются конечным размером зеркал. Поэто-

му окончательная пространственная конфигурация мод может значительно отличаться от гауссова распределения. Используя приближение геометрической оптики, можно найти конфигурацию и собственную частоту моды как в устойчивых, так и в неустойчивых резонаторах; при этом эффектами, связанными с дифракцией на краях зеркал или на введенных внутрь резонатора апертурах, можно, как правило, пренебречь. Однако существуют параметры (к ним относятся потери  $\alpha$ ), которые не могут быть точно вычислены в рамках данного приближения.

Метод, который позволит преодолеть указанную трудность, основан на рассмотрении уравнений Максвелла с граничными условиями, которым соответствуют конечные размеры выходных зеркал. В 1893 г. Дж. Дж. Томсон в своем труде «Последние исследования по электричеству и магнетизму» впервые проанализировал замкнутый резонатор с точки зрения теории электромагнетизма.

Для простоты предположим, что поле описывается скалярной функцией  $u$ , нормальная производная которой на границах обращается в нуль. Используя выражение (4.2.10), поле на границе можно записать через интеграл вида

$$u(\mathbf{r}) = - \iint_{\substack{\text{Стенки} \\ \text{резонатора}}} \left[ \frac{\partial}{\partial n_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] u(\mathbf{r}') dS, \quad (7.13.1)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиусы-векторы стенок резонатора, а  $\hat{\mathbf{n}}_0$  — внешняя нормаль. Выражение (7.13.1) является интегральным уравнением, решения которого определяют конфигурацию мод. Собственные частоты мод входят в это уравнение через функцию Грина  $G$ , экспонента которой содержит волновое число  $k$ .

Физически уравнение (7.13.1) является следствием того, что поле в любой точке, принадлежащей стенкам резонатора (границе), совпадает с полем, индуцированным всей совокупностью пристеночных токов (которые в свою очередь пропорциональны  $u$ ). Взаимодействие между полем и токами способствует установлению равновесной конфигурации в генерируемой моде, в то время как собственная частота моды определяется фазовым сдвигом между вкладами отдельных элементов тока.

Интегральное уравнение (7.13.1) дает вещественные значения собственных частот только в том случае, когда стенки резонатора образуют замкнутую поверхность и омическими потерями на них можно пренебречь.

Открытый резонатор [2, 24] можно рассматривать как замкнутую полость, у которой часть поверхности совпадает со сферой бесконеч-

ного радиуса. Поскольку из бесконечности ничего не отражается, моды такого резонатора характеризуются комплексными собственными частотами. В некоторых случаях в открытых резонаторах может существовать набор мод с низкими потерями, образующих дискретный спектр в данном частотном диапазоне.

## 7.14. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФОКСА — ЛИ

Ограничимся здесь рассмотрением линейного резонатора Фабри — Перо. Можно считать, что если число Френеля не очень велико, то основные моды резонатора будут приблизительно ТЕМ-типа. Это предположение является необходимым для обоснования перехода к скалярной дифракционной теории. Кроме того, можно использовать результаты, полученные в приближении геометрической оптики, а именно те, что моды состоят из двух противоположно направленных волн. Обозначим через  $u^{(+)}$  и  $u^{(-)}$  амплитуды прямой и обратной волн, отраженных от зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Пользуясь формулами из разд. 4.2, можно связать поле  $u^{(-)}$  на зеркале  $M_1$  с полем  $u^{(-)}$  на зеркале  $M_2$ . Применив те же формулы [см. выражение (4.2.14)] к  $u^{(+)}$  и предположив, что волновые фронты совпадают с поверхностью зеркал, можно написать следующие выражения:

$$u_2^{(+)}(x_2, y_2) = \frac{i}{2\lambda} \iint_{M_1} u_1^{(+)}(x_1, y_1) \frac{\exp[-ik(R + W_1 - W_2)]}{R} (1 + \cos \theta_1) dS_1, \quad (7.14.1)$$

$$u_1^{(-)}(x_1, y_1) = \frac{i}{2\lambda} \iint_{M_2} u_2^{(-)}(x_2, y_2) \frac{\exp[-ik(R + W_2 - W_1)]}{R} (1 + \cos \theta_2) dS_2,$$

где нижние индексы 1 и 2 относятся соответственно к зеркалам 1 и 2,  $R$  — расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 7.31),  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы

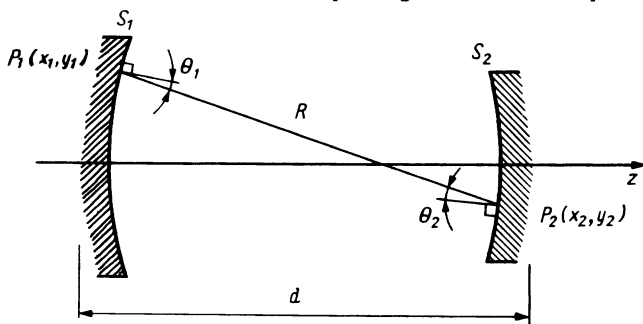


Рис. 7.31. К вычислению пространственной конфигурации мод резонатора с помощью дифракционного интеграла Кирхгофа.

между вектором  $\mathbf{R}$  и нормальными к  $M_1$  и  $M_2$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ , а  $W_1$  и  $W_2$  — функции aberrаций на соответствующих зеркалах. Формулы (7.14.1) справедливы также и для резонаторов лазеров высокой мощности, вывод из которых осуществляется за счет дифракции на апертуре выходного зеркала [25].

В случае когда расстояния между зеркалами много больше их размеров, расстояние  $R$  можно записать приближенно в виде

$$R \cong d + \frac{1}{2}(g_1/d)(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(g_2/d)(x_2^2 + y_2^2) - (1/d)(x_1x_2 + y_1y_2), \quad (7.14.2)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — параметры резонатора.

Функции aberrаций  $W_1$  и  $W_2$  определяются тем, насколько сильно отклоняются зеркала от идеальной формы. Например, если зеркало слегка отклонено (см. разд. 7.11.2) на углы  $\delta\phi_x$  и  $\delta\phi_y$ , то мы имеем  $W = x\delta\phi_x + y\delta\phi_y$ . Окна Брюстера являются еще одним источником aberrаций (астигматизм и кома). Источником aberrаций является и сама активная среда, например нагрев стержней в АИГ:  $\text{Nd}^{3+}$ -лазере вызывает *линзовый эффект*. В газовых проточных лазерах основными факторами, искажающими поле в резонаторе, являются ударные волны и турбулентность. В этом случае их влияние может быть учтено некоторыми дополнительными функциями aberrаций.

Перейдем теперь к обсуждению граничных условий интегрального уравнения (7.14.1). Если  $u$  — компонента магнитного поля, совпадающая по направлению с касательной к поверхности зеркал с коэффициентами отражения соответственно  $r_1$  и  $r_2$ , то граничные условия запишутся следующим образом:

$$u_2^{(-)} = r_2 u_2^{(+)}, \quad u_1^{(+)} = r_1 u_1^{(-)}. \quad (7.14.3)$$

Заменяя в уравнении (7.14.1)  $u_2^{(-)}$  на  $u_2^{(+)}$  и  $u_1^{(+)}$  на  $u_1^{(-)}$  и используя выражение (7.14.2), получим систему интегральных уравнений Фредгольма [26]

$$\gamma_2 u_1^{(-)} = \iint_{M_2} u_2^{(+)} K_{12} \frac{(1 + \cos \theta_2)}{2} dS_2, \quad (7.14.4a)$$

$$\gamma_1 u_2^{(+)} = \iint_{M_1} u_1^{(-)} K_{21} \frac{(1 + \cos \theta_1)}{2} dS_1, \quad (7.14.4b)$$

где

$$r_1 \gamma_1 = r_2 \gamma_2 = \exp(ikd),$$

$$K_{12}(x_1, y_1, x_2, y_2) = K(x_1, x_2)K(y_1, y_2) \exp[ik(W_2 - W_1)], \quad (7.14.5)$$

$$K(u, v) = \left(\frac{i}{\lambda d}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{ik}{2d}(g_1 u^2 + g_2 v^2 - 2uv)\right].$$

Уравнения (7.14.4) были впервые выведены в 1960 г. Фоксом и Ли [27] для плоскопараллельного и конфокального резонаторов, а затем были обобщены на резонаторы со сферическими зеркалами.

Если размеры зеркал малы по сравнению с расстоянием между ними  $d$ , то отклонением хода лучей от прямого пути можно пренебречь и считать, что  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$ . В этом случае, заменяя  $u_2^{(+)}$  в уравнении (7.14.4а) левой частью уравнения (7.14.4б), получаем

$$\gamma_1 \gamma_2 u_1^{(-)}(\mathbf{t}_1) = \iint_{M_1} Q_1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}'_1) u_1^{(-)}(\mathbf{t}'_1) dS_1; \quad (7.14.6)$$

здесь  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$  — поперечные векторы ( $\mathbf{t} = \hat{x}x + \hat{y}y$ ), а

$$Q_1(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}'_1) = \iint_{M_2} K_{12}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) K_{12}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}'_1) dS_2, \quad (7.14.7)$$

Аналогичные выражения можно записать и для  $u_2^{(-)}$ . В заключение заметим, что уравнения Фокса — Ли (7.14.4) эквивалентны двум интегральным уравнениям Фредгольма, имеющим одно и то же собственное значение  $\gamma_1 \gamma_2$ . Из этого следует, что в уравнениях (7.14.4) сохраняется постоянным только произведение  $\gamma_1 \gamma_2$ , в то время как сами величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  изменяются.

### 7.14.1. Потери за полный проход

Выбрав частоту, вблизи которой будет проводиться поиск резонансных мод, мы можем вычислить точные значения соответствующих волновых чисел из собственных значений уравнения (7.14.6) при последующей подстановке их в уравнение (7.14.5а). Прделав эту процедуру, получим

$$k_{lmn} = k'_{lmn} + ik''_{lmn} = -i/(2d) \ln(\gamma_{1lmn} \gamma_{2lmn} r_1 r_2); \quad (7.14.8)$$

здесь индексы  $l$ ,  $m$  и  $n$  относятся к соответствующей моде. Вещественная часть  $k'_{lmn} = 2\pi\nu_{lmn}/c$  волнового числа  $k_{lmn}$  определяет резонансную частоту  $\nu_{lmn}$ , а мнимая часть  $k''_{lmn}$  ( $> 0$ ) определяет коэффициент усиления ( $\text{см}^{-1}$ ), необходимый для возникновения генерации в резонаторе. Вследствие малости параметра  $k'' d$  мы можем записать с хорошей точностью следующее выражение для *потерь за полный проход*  $\alpha_{lm}$  [см. выражение (7.11.6)]:

$$\alpha_{lm} = 2k''_{lm} d \cong 1 - |\gamma_{1lm} \gamma_{2lm} r_1 r_2| \cong (1 - |\gamma_{1lm} \gamma_{2lm}|) + (1 - |r_1 r_2|) \equiv \alpha_{lm}^{(d)} + \alpha_{lm}^{(r)}, \quad (7.14.9)$$

(здесь продольный индекс  $n$  опущен, поскольку величина  $k''_{lmn}$  практически от него не зависит). В выражении (7.14.9) потери  $\alpha_{lm}$  зависят как



от геометрических параметров резонатора ( $\alpha^{(d)}$ ), так и от коэффициентов отражений зеркал ( $\alpha^{(r)}$ ), причем общая величина этих потерь получается сложением двух этих факторов.

### 7.14.2. Фазовый сдвиг

Чтобы разобраться, каким образом  $\nu_{lmn}$  [ср. с выражением (7.11.5)] зависит от геометрических параметров резонатора, воспользуемся аналогией с прямоугольным резонатором, описываемым формулой (7.1.8). При этом резонансный волновой вектор  $k'_{lmn}$  при  $n \rightarrow \infty$  запишется в виде

$$k'_{lmn} = (\pi/d)n + \beta_{lm}/d, \quad (7.14.10)$$

где  $\beta_{lm}$  — фазовый сдвиг данной моды относительно идеальной плоской волны, имеющей ту же частоту. Определенная таким образом величина  $\beta_{lm}$  является мерой отклонения лучевых траекторий от оптической оси. Используя выражения (7.14.8) и (7.14.10), можно сразу показать, что  $2\beta_{lm}$  есть не что иное, как фаза величины  $\gamma_{1m}\gamma_{2m}r_1r_2$ , принимающая значение в интервале  $(-\pi, +\pi)$ . В соответствии с этим удобно ввести комплексную величину  $p_{lm}$ , определяемую следующим образом:

$$\gamma_{1m}\gamma_{2m} \equiv \exp(-4\pi i p_{lm}) \cong \exp(-2i\beta_{lm} - \alpha_{lm}). \quad (7.14.11)$$

До сих пор считалось само по себе разумным существование уравнения (7.14.4) собственных функций. Доказать, что такие функции действительно существуют, — непростая задача. Действительно, поскольку ядро  $K_{12}$  интегрального уравнения не является эрмитовым, мы не можем использовать результаты хорошо развитой теории эрмитовых операторов. Эта проблема явилась своеобразным вызовом изобретательности математиков, которым в конце концов удалось доказать существование собственных значений уравнения (7.14.4) [28].

### 7.14.3 Симметричные резонаторы

Ситуация значительно упрощается в случае, когда резонатор обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной оптической оси. В этом случае моды можно разделить на две группы в соответствии с тем, что либо  $u_1^{(-)} = u_2^{(+)}$  ( $\sigma = 1$ ), либо  $u_1^{(-)} = -u_2^{(+)}$  ( $\sigma = -1$ ). Следовательно, мы имеем

$$\gamma u = \iint_M u K_{12} dS; \quad (7.14.12)$$

здесь  $\gamma = (-1)^\sigma \gamma_1$  и  $u = u_2^{(-)} = (-1)^\sigma u_1^{(+)}$ , а  $K_{12}$  — симметричное неэрмитово ядро. Таким образом, если два решения  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  этого урав-

нения имеют различные собственные значения  $\gamma_\alpha$  и  $\gamma_\beta$ , то они взаимно ортогональны. Условие взаимной ортогональности запишется при этом в виде [ср. с аналогичными условиями (7.10.2) для мод резонатора  $\Phi_{lmn}$ ]

$$\iint_M u_\alpha u_\beta dS = 0, \quad (7.14.13)$$

Это выражение отличается от условия для эрмитового ядра только тем, что не содержит комплексного сопряжения одной из собственных функций. Поэтому, если моды  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  комплексные, с точки зрения вычисления интенсивности они не будут ортогональными, т. е. интенсивность, связанную с суммой  $u_\alpha + u_\beta$ , уже нельзя представить в виде суммы отдельных вкладов  $u_\alpha$  и  $u_\beta$ .

#### 7.14.4. Соотношения подобия

Прежде чем завершить данный раздел, воспользуемся уравнениями (7.14.4) и выведем некоторые полезные соотношения подобия для резонаторов с различными линейными размерами, но с зеркалами одинаковой формы (т. е. либо круглой, либо прямоугольной). Из уравнений (7.14.4) следует, что два резонатора с тремя одинаковыми параметрами [29]  $N$ ,  $G_1$  и  $G_2$ , причем

$$N = a_1 a_2 / (\lambda d), \quad G_1 = g_1 a_1 / a_2, \quad G_2 = g_2 a_2 / a_1, \quad (7.14.14)$$

(здесь  $a_1$  и  $a_2$  — типичные размеры зеркал 1 и 2), имеют одни и те же собственные значения  $\gamma_i$  и соответственно одни и те же дифракционные потери и фазовые сдвиги. Независимо от размеров резонаторов распределение интенсивности в модах у них также будет одинаковым. В частности, для симметричных резонаторов ( $a_1 = a_2$ ) параметр  $N$  совпадает с числом Френеля. Поэтому если параметры  $g$  и числа Френеля для таких резонаторов одинаковы, то одинаковыми у них будут как потери, так и фазовые сдвиги.

## 7.15. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МОДОВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

### 7.15.1. Метод Фокса — Ли

Фокс и Ли впервые решили интегральное уравнение (7.14.12) [27, 29], используя метод итераций [30]. В своих расчетах они выбирали произвольное начальное распределение поля в волне, падающей на зеркало (скажем, на зеркало 1), и затем, подставляя это распределение в интеграл (7.14.12) при  $\gamma = 1$ , получали распределение поля, распространя-

ющегося в прямом и обратном направлениях в резонаторе. При этом они нашли, что моды начального распределения, за исключением основной моды, имели сильное затухание. Процесс итерации заканчивался, когда форма распределения поля не менялась от прохода к проходу и амплитуда поля при этом экспоненциально уменьшалась. Стационарное распределение интенсивности поля (если отбросить фактор экспоненциального затухания) рассматривалось как нормальная мода

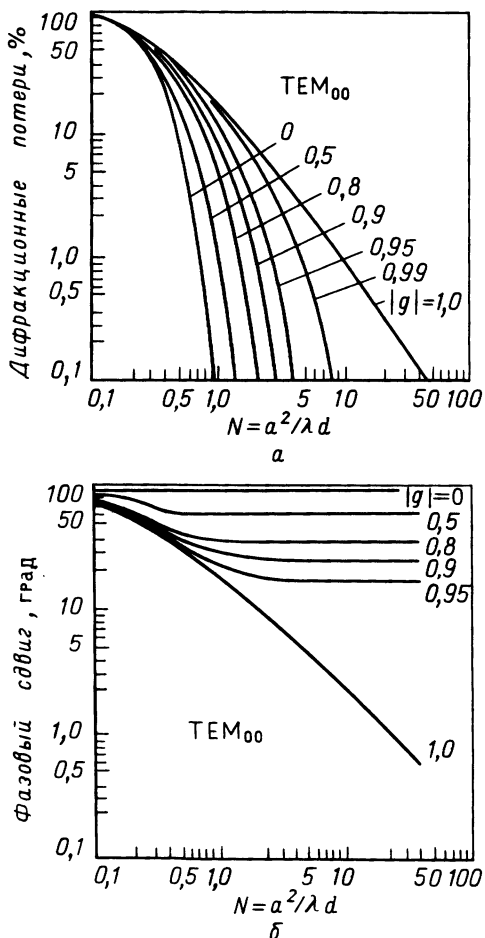


Рис. 7.32. Дифракционные потери  $\alpha$  (а) и фазовый сдвиг  $\beta$  (б) за один проход для основной моды симметричного резонатора с круглыми зеркалами радиусом  $Q$  в зависимости от числа Френеля при различных значениях параметра  $g$ . Следует заметить, что для  $TEM_{00}$ -моды величины  $\alpha$  и  $\beta$  для  $g$  те же, что и для  $-g$ . (Из работы Ли [31]. © 1965 AT and T Bell Laboratories.)

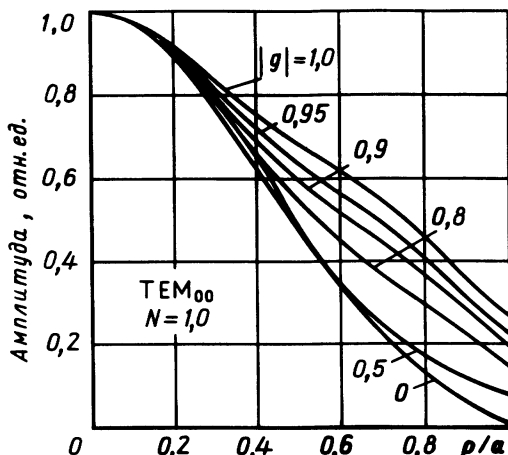


Рис. 7.33. Относительные распределения поля в основной  $TEM_{00}$ -мод симметричного резонатора с круглыми зеркалами радиусом  $Q$  и с числом Френеля  $N = a^2/(\lambda d) = 1$ .

резонатора. Таким образом, если стационарное распределение устанавливается на  $i$ -й итерации

$$u^{(i+1)} = \iint_M u^{(i)} K_{12} dS. \quad (7.15.1)$$

(коэффициент  $\gamma$  намеренно опущен), то

$$u^{(i+1)}(x, y)/u^{(i)}(x, y) = \text{const} = \gamma. \quad (7.15.2)$$

Итерационный метод был успешно применен Ли [31] в 1965 г. для исследования неконфокальных симметричных резонаторов с круглыми зеркалами. Результаты этих вычислений, представленные на рис. 7.32 и 7.33, позволяют определить потери за проход, фазовый сдвиг и распределение поля в  $TEM_{00}$ -мод симметричных резонаторов с различными значениями параметров  $g$  и чисел Френеля. Заметим, что горизонтальные участки кривых фазового сдвига соответствуют значениям  $\beta_{pl} = (2p + l + 1)\arccos g$ , что согласуется с формулой (7.11.56).

Чекачи и др. [32] разработали иной подход, суть которого состоит в вычислении интеграла посредством гауссовых квадратур и преобразовании интегрального уравнения к матричному.

### 7.15.2. Алгоритм быстрого фурье-преобразования

Для вычисления интегралов Фокс и Ли использовали сетку из  $N_p$  значений амплитуды поля  $u$ . Для вычисления дифракционных интегралов в одномерном случае наименьшее число точек  $N_p$  ограничено условием

$N_p > 4N$ , где  $N$  — число Френеля. Чтобы вычислить двумерные интегралы, мы должны иметь  $N_p \geq 16N^2$  точек. Следовательно, при больших  $N$  число точек  $N_p$  будет столь велико, что потребуется ЭВМ с большим объемом памяти, а время расчета резко возрастет. Другое значительное препятствие использования уравнения (7.14.12) состоит в том, что в случае  $N \gg 1$  при численных расчетах необходимо будет запоминать  $N_p^2$  значений ядра  $K_{12}$ , где  $N_p$  — число разбиений на зеркалах  $M_1$  и  $M_2$ . Эти трудности можно обойти, если переписать (7.14.12) в виде интеграла свертки [33]:

$$\gamma v(t_1) = \iint_{-\infty}^{+\infty} P(t_2)H(t_1 - t_2)f(t_2)v(t_2) dS_2, \quad (7.15.3)$$

где  $P(t_2)$  — функция зрачка зеркала,  $v = uf^{1/2}$  и

$$f(t) = \exp(-ikt^2/R), \quad H(t) = [i/(\lambda d)]^{1/2} \exp[-ikt^2/(2d)]; \quad (7.15.4)$$

здесь  $R$  — радиус кривизны зеркал.

Для решения уравнения (7.15.3) требуются два массива размерами  $N_p$  соответственно для функций  $H$  и  $f$ . Главным достоинством этого уравнения является то, что его правая часть представляет собой свертку, которую можно очень быстро вычислить с помощью алгоритмов быстрого фурье-преобразования (БПФ). Таким образом, мы можем записать

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} P(t_2)H(t_2 - t_1)f(t_2)v(t_2) dS_2 = F^{-1}\{F\{H\} \cdot F\{Pfv\}\}. \quad (7.15.5)$$

Несмотря на то что в данном случае приходится делать три фурье-преобразования, увеличение объема вычислений компенсируется быстротой алгоритма БПФ. Для симметричных резонаторов с круглыми зеркалами вышеприведенные интегралы сводятся к одномерным, если использовать ядро, содержащее функции Бесселя  $J_l$  [ср. с уравнением (7.17.4)]. В этом случае можно обратиться к специальному алгоритму, разработанному Сигмэнном [34] с целью расчета преобразований Ханкеля.

### 7.15.3. Вычисление мод высокого порядка

При расчете низших симметричных и асимметричных мод особенно удобно применять метод итерации. Если же необходимо вычислить моды более высоких порядков, то приходится начинать с тех распределений поля, которые исключают появление мод с потерями меньшими, чем в искомым модах. Этот метод требует выполнения значи-

тельного объема работы, который можно существенно сократить, если обратиться к *методу разложения ядра в ряд*, предложенному Штрейфером [35], а также Бергштейном и Маромом [36]. Он состоит в разложении ядра и мод в ряд по ортогональным функциям таким образом, чтобы преобразовать интегральное уравнение в бесконечную систему линейных уравнений, собственные значения которых дадут фазовые сдвиги и потери в резонаторе. В частности, для достижения более высокой эффективности расчетов основных мод в неустойчивых резонаторах Сигмэн и Миллер [37] предложили *метод Прони*.

## 7.16. УСТОЙЧИВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

В настоящем разделе ограничимся подробным рассмотрением симметричных резонаторов, содержащих прямоугольные зеркала или диафрагмы. Поиск мод в этом случае значительно упростится, если поле представить в виде произведения двух независимых функций:

$$u(x, y) = f_x(x)f_y(y). \quad (7.16.1)$$

Используя свойство ядра  $K_{12}$  факторизоваться в произведение двух функций  $K$  и пренебрегая абберациями, систему уравнений (7.14.4) можно привести к следующему однородному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным непрерывным ядром:

$$\gamma f(v) = \int_{-a}^a f(u)K(u, v) du, \quad (7.16.2)$$

где  $f$  означает либо  $f_x$ , либо  $f_y$ , а  $2a$  представляет собой ширину зеркала. Это уравнение определяет моды резонатора с зеркалами в виде бесконечно протяженных полос (т. е. вытянутых на бесконечность в одном из поперечных направлений).

Введем теперь [2] новые переменные  $\xi$  и  $\tau$ , определяемые выражениями

$$\xi = \arccos g, \quad \tau = 2u/w = (2k \sin \xi/d)^{1/2}u, \quad (7.16.3)$$

где  $w$  — размер пятна гауссова пучка на зеркалах. Тогда уравнение (7.16.2) запишется в виде

$$\gamma f(\tau) = \int_{-\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} G(\tau, \tau', \xi) f(\tau') d\tau' \quad (7.16.4)$$

где  $\bar{\tau} = 2(N_a/N_w)^{1/2} = 2a/w$  [причем  $N_a = a^2/\lambda d$  — число Френеля резонатора и  $N_w = w^2/\lambda d = 1/(\pi \sin \xi)$  — число Френеля для пятна  $w$  гауссовой моды на зеркале], а

$$G(\tau, \tau', \xi) = \frac{e^{+i\pi/4}}{(4\pi \sin \xi)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{i}{4} \left( \frac{\tau^2 + \tau'^2}{\operatorname{tg} \xi} - \frac{2\tau\tau'}{\sin \xi} \right) \right], \quad (7.16.5)$$

### 7.16.1. Конфокальный резонатор

Уравнение (7.16.4) в общем случае можно решать численными методами, хотя нередко можно получить и аналитические решения. Примером последнего случая является конфокальный резонатор ( $g=0 \rightarrow \xi = \pi/2$ ), для которого уравнение (7.16.4) принимает вид

$$\gamma f(t) = N_a^{1/2} e^{+in/4} \int_{-1}^1 e^{+ict'} f(t') dt', \quad (7.16.6)$$

где  $t = \tau/\bar{\tau}$  и  $c = 2\pi N_a$ . Собственные функции этого уравнения, как было первоначально показано Ландау, Слепяном и Поллаком [38, 39], а также Бойдом и Гордоном [40], могут быть выражены через угловые и радиальные функции вытянутого сфероида соответственно  $S_{0n}(c, t)$  и  $R_{0n}(c, t)$ . Они являются решениями дифференциального уравнения

$$(1 - t^2)d^2f/dt^2 - 2t df/dt + (\chi - c^2t^2)f = 0, \quad (7.16.7)$$

которое имеет непрерывные решения в интервале  $t \in [-1, 1]$  лишь при определенных вещественных положительных значениях параметра  $\chi$  таких, что  $0 < \chi_0(c) < \chi_1(c) < \dots < \chi_n(c)$ . Каждому собственному значению  $\chi_n(c)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) при  $t=0$  соответствует только одно ограниченное решение  $S_{0n}(c, t)$ , такое, что  $S_{0n}(c, 0) = P_n(0)$ , где  $P_n(t)$  — полином Лежандра степени  $n$ . Функции  $S_{0n}(c, t)$ , называемые *угловыми функциями вытянутого сфероида*, на отрезке  $[-1, 1]$  образуют полный набор ортогональных вещественных функций, непрерывных по  $c$  при  $c \geq 0$ . Функции  $S_{0n}(c, t)$  на отрезке  $[-1, 1]$  имеют точно  $n$  нулей и при  $c \rightarrow \infty$  сходятся равномерно к  $P_n(t)$ , причем четность функции  $S_{0n}(c, t)$  совпадает с четностью  $n$ . Собственные значения  $\chi_n(c)$  являются непрерывными функциями параметра  $c$ , и  $\chi_n(0) = n(n+1)$ .

Можно показать, что собственные значения  $\gamma_n$  уравнения (7.16.6), соответствующие собственным функциям  $S_{0n}(c, t)$ , даются выражением

$$\gamma_n = 2N_a^{1/2} R_{0n}^{(1)}(2\pi N_a, 1) \exp[i(\pi/2)(n+1/2)], \quad (7.16.8)$$

где  $R_{0n}^{(1)}$  — так называемые *радиальные функции вытянутого сфероида*, которые отличаются от  $S_{0n}$  лишь вещественным множителем  $K_n(c)$ , причем

$$R_{0n}^{(1)}(c, t) = K_n(c) S_{0n}(c, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \cos[ct - \pi(n+1)/2]/ct. \quad (7.16.9)$$

В соответствии с выражением (7.16.8) в конфокальном резонаторе с зеркалами в виде двух бесконечных полос фазовый сдвиг  $\beta_n$  [см. соотношение (7.14.10)] кратен  $\pi/2$ , так что в том же резонаторе с прямоугольными зеркалами фазовый сдвиг  $\beta_{lm}$  будет кратен  $\pi/2$ . Заметим, что данное утверждение справедливо для любых резонаторов с *конечным размером зеркал*. Свойство фазы изменяться только на це-

лое число  $\pi/2$  позволяет использовать данные резонаторы в качестве интерферометров, поскольку их резонансные частоты не зависят ни от числа Френеля, ни от порядка возбуждаемой моды. Этот факт легко объясняется в рамках приближения геометрической оптики: независимо от угла падения путь произвольного луча при полном проходе резонатора равен  $2d$ . Таким образом, если конфокальный резонатор используется в качестве интерферометра, то положение резонансных частот такого интерферометра не зависит от направления распространения луча, на что впервые указал Конн (см. разд. 7.21.4).

### 7.16.2. Теория Вайнштейна для концентрических и плоскопараллельных резонаторов

Особый интерес представляют плоскопараллельные ( $g=1$ ) и концентрические ( $g=-1$ ) резонаторы. В этих случаях  $\xi=0$  или  $\pi$  и ядро уравнения (7.16.5) оказывается сингулярным. Подстановкой  $t=\tau/(2\sin\xi)^{1/2}=x(k/d)^{1/2}$  уравнение (7.16.4), как нетрудно показать, принимает вид

$$\gamma f(t) = \frac{\exp(+i\pi/4)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\bar{t}}^{\bar{t}} \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t')^2\right] f(t') dt', \quad (7.16.10)$$

где  $\bar{t} = (2\pi N_a)^{1/2} = (ka^2/d)^{1/2}$ .

Вайнштейн [2] предложил изящный метод решения интегрального уравнения (7.16.10). В этом методе используются собственные функции резонатора с бесконечно большими размерами зеркал. Здесь резонатор можно рассматривать как волновод высотой  $d$ , простирающийся от  $t=-\infty$  до  $t=+\infty$ . Аналогично, резонатор с конечными размерами зеркал можно рассматривать как волновод ограниченных размеров, в котором моды распространяются к открытым концам, где они затем частично отражаются обратно за счет дифракции на краях. Таким образом, собственные функции резонатора при выбранных значениях  $\bar{t}$  могут быть выражены комбинацией мод бесконечно длинного волновода, претерпевающих дифракцию на открытых концах.

Если  $f$  представляет собой компоненту  $H_x$  магнитного поля  $H$  на зеркалах резонатора, то поле  $u_{qe}=H_y$  внутри волновода для  $q$ -й моды записывается в виде

$$u_{qe}(x, z) \propto \cos(q\pi z/d) \exp[i\epsilon s_q x(k/d)^{1/2}], \quad (7.16.11)$$

где  $\epsilon = \pm 1$ ,  $z=0$ ,  $d$  — координаты стенок и

$$s_q = (k^2 - q^2\pi^2/d^2)^{1/2}(d/k)^{1/2}. \quad (7.16.12)$$

Волновая функция  $u_{qe}$  представляет собой суперпозицию плоских волн, падающих под некоторым углом к стенкам резонатора



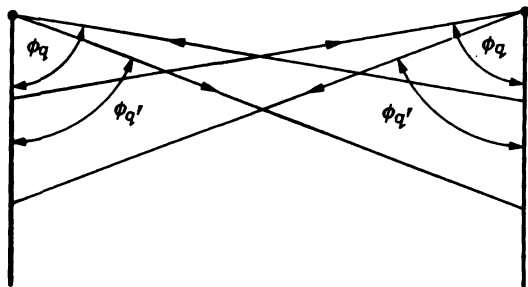


Рис. 7.34. Углы падения ( $\phi_q$ ) и дифракции ( $\phi_{q'}$ ) при преобразовании  $q$ -й моды, бегущей вверх, в  $q'$ -ю моду, бегущую вниз, за счет дифракции на краях волновода.

7.34), определяемых выражением

$$\phi_q = \pi/2 - \arctg [s_q/(kd)^{1/2}]. \quad (7.16.13)$$

Ограничимся рассмотрением случая сильного отражения мод от краев резонатора. Согласно теории дифракции на полуплоскости, развитой в гл. 6, поле, дифрагированное в направлении, противоположном направлению падающего пучка, оказывается значительным, когда угол падения  $\phi_q$  близок к  $\pi/2$ . Следовательно, мы можем ограничиться изучением тех мод, для которых  $s_q \ll (kd)^{1/2}$ . Кроме того, если  $k$  можно записать в виде  $k = \pi(n - 2p)/d$ , причем  $-1/2 < p < 1/2$ , и положить  $q = n - 2j$ , где  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то, используя приближенное выражение  $k \approx q\pi/d$  и заменяя  $q$  на  $j$ , имеем

$$s_j \cong [4\pi(j - p)]^{1/2}. \quad (7.16.14)$$

Следует добавить, что мы рассматривали лишь те моды, индекс  $q$  которых отличается от  $n$  на четное число. Это допущение обусловлено тем фактом, что при отражении на открытых концах волновода моды с четными  $q$  не взаимодействуют с модами, имеющими нечетные  $q$ . Это можно доказать, учитывая то, что на зеркалах поля четных и нечетных мод направлены в противоположные стороны. Кроме того, следует заметить, что в зависимости от знака разности  $j - p$  величина  $s_j$  будет либо вещественной (при  $j - p > 0$ ), либо мнимой (при  $j - p < 0$ ). В первом случае мода распространяется вдоль оси  $x$ , в то время как во втором она затухает.

Для зеркал конечных размеров, следуя Вайнштейну [2], разложим  $f(t)$  в ряд:

$$f(t) = \sum_{j\epsilon} F_{j\epsilon} \exp(is_j\epsilon t). \quad (7.16.15)$$

Подстановка этого ряда в уравнение (7.16.10) дает следующее уравнение:

$$\sum_{j\epsilon} F_{j\epsilon} \exp(is_j\epsilon t) \left\{ \gamma + e^{is_j^2/2} \left[ F\left(\frac{\bar{t} - t - s_j\epsilon}{2^{1/2}}\right) - F\left(-\frac{\bar{t} + t + s_j\epsilon}{2^{1/2}}\right) \right] \right\} = 0, \quad (7.16.16)$$

где  $F$  — комплексный интеграл Френеля, определенный в гл. 5 выражением (5.3.5). В случае когда мы рассматриваем поле на некотором расстоянии от концов волновода и  $t \gg 1$ , уравнение (7.16.16), если положить  $\gamma = \exp(is_j^2/2) = \exp(-2\pi ip)$ , сводится к тождеству. Это в свою очередь означает, что моды, распространяющиеся в области, достаточно удаленной от концов волновода, как и следовало ожидать, не взаимодействуют между собой. Напротив, вблизи концов волновода, т. е. при  $t = \bar{t}$ , уравнение (7.16.16) принимает вид

$$\sum_{j\epsilon} F_{j\epsilon} \exp(is_j \epsilon \bar{t}) F\left(-\frac{s_j \epsilon}{2^{1/2}}\right) = 0, \quad (7.16.17)$$

поскольку  $F(-2^{1/2} \bar{t}) \rightarrow 1$  при  $\bar{t} \rightarrow \infty$ .

Забудем на время, что мы исследуем резонатор, и представим себе, что мода  $j'$  движется к концу  $t = \bar{t}$  волновода из  $t = -\infty$  в точку  $\bar{t}$ , где вследствие дифракции распадается на ряд отраженных мод. Очевидно, что при этом интегральное уравнение (7.16.10) остается справедливым, поскольку замена координаты  $-t$  на  $-\infty$  обоснована тем, что поля в соответствующих сечениях совпадают.

Обозначим через  $r_{jj'}$  амплитуду отраженной  $j$ -й моды ( $\epsilon = 1$ ), которая является результатом дифракции падающей моды с индексом  $j'$  ( $\epsilon = -1$ ), и положим  $F_{j,-1} = 0$  при  $j \neq j'$ ,  $F_{j',-1} \exp(-is_{j'}/\bar{t}) = 1$  и  $F_{j,1} \exp(is_j \bar{t}) = r_{jj'}$ . Тогда уравнение (7.16.17) преобразуется к виду

$$\sum_j r_{jj'} F\left(-\frac{s_j}{2^{1/2}}\right) = -F\left(\frac{s_{j'}}{2^{1/2}}\right). \quad (7.16.18)$$

Коэффициенты  $r_{jj'}$  можно получить, решив данную систему уравнений для всех значений  $j'$  и в силу теоремы взаимности положив  $r_{jj'} = r_{j'j}$ . В первом приближении мы имеем

$$r_{00} \cong -F(s_0/2^{1/2})/F(-s_0/2^{1/2}) = -\exp[i\delta(1+i)s_0], \quad (7.16.19)$$

здесь  $\delta = 0,824$ , в то время как другие коэффициенты равны нулю. Последняя формула для  $r_{00}$  была выведена Вайнштейном (см. книгу Вайнштейна [5], указанную в литературе к гл. 4 нашей книги) для предельного случая малых  $p$  из точного выражения, полученного методом факторизации Винера — Хопфа — Фока. Более точный расчет этих коэффициентов, выполненный Вайнштейном, дает (рис. 7.35)

$$r_{jj} \cong -\exp[i\delta(1+i)s_j], \quad r_{jj'} \cong -\frac{2s_j}{s_j + s_{j'}} \exp\left[\frac{1}{2}i\delta(1+i)(s_j + s_{j'})\right]. \quad (7.16.20)$$

(О другом методе приближенного расчета коэффициентов отражения  $r_{jj}$  и  $r_{jj'}$  см. в работе Лючини и Солимено [41].)

Представим теперь резонатор в виде последовательности открытых передающих линий длиной  $2\bar{t}$ , имеющих постоянные распростра-

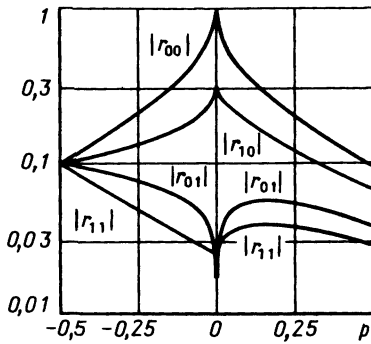


Рис. 7.35. Коэффициенты отражения  $|r_{jj}|$  и коэффициенты преобразования  $|r_{jj}'|$  мод вблизи порога в зависимости от параметра  $p = -s_j^2/(4\pi) + j$ , где величина  $s_j$  связана с углом  $\phi_j \cong \pi/2 - [4\pi(j-p)/(kd)]^{1/2}$ . (Из книги Вайнштейна [2].)

нения  $s_j$  и характеризующихся матрицей рассеяния на концах  $[r_{jj}']$ . С хорошим приближением все коэффициенты  $r_{jj}'$  можно приравнять к нулю, за исключением коэффициента  $r_{00}$ , что позволяет записать  $f$  в виде

$$f(t) = \exp(is_0 t) \pm \exp(-is_0 t). \quad (7.16.21)$$

Поскольку при  $t = \pm t$  мы имеем  $\pm \exp(-is_0 t) = r_{00} \exp(is_0 t)$ , подстановка сюда вместо  $r_{00}$  выражения (7.16.19) дает

$$(2\bar{t} + \delta + i\delta)(4\pi p_m)^{1/2} = \pi(m+1), \quad m = 0, 1, \dots \quad (7.16.22)$$

Здесь индекс  $m$  относится к различным значениям  $p_m$ , а каждому  $p_m$  соответствует своя поперечная мода. Решив уравнение (7.16.22) относительно вещественной и мнимой частей комплексного параметра  $p$ , получим следующие выражения для фазового сдвига  $\beta_m$  и потерь за один проход  $\alpha_m$   $m$ -й моды резонатора:

$$\beta_m = 2\pi p'_m = \frac{2\pi^2(m+1)^2 \bar{t}(\bar{t} + \delta)}{[(2\bar{t} + \delta)^2 + \delta^2]^2}, \quad \alpha_m = \pi p''_m = \frac{\pi^2(m+1)^2 \delta(2\bar{t} + \delta)}{2[(2\bar{t} + \delta)^2 + \delta^2]^2}. \quad (7.16.23)$$

Объединив моды двух резонаторов в виде бесконечных полос, получим распределение поля в резонаторе с прямоугольными зеркалами. При  $\bar{t} \gg 1$  в хорошем приближении можно записать следующее выражение:

$$f_m(x, y) \propto \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (k_x x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (k_y y), \quad (7.16.24)$$

где  $\cos$  или  $\sin$  выбираются в зависимости от того, четным или нечетным является  $l(m)$ , а

$$k_x = (l+1)(\pi/2a)[1 + \delta(1+i)/(8\pi N_a)^{1/2}]^{-1}; \quad (7.16.25)$$

выражение для  $k_y$  записывается аналогично, необходимо лишь заменить  $l$  на  $m$ , а  $N_a$  на  $N_b$ .

Вайнштейн применил также этот метод к случаю резонатора с круглыми зеркалами и показал, что в этом случае собственные функ-

ции записываются в виде

$$f_{im}(\rho, \phi) \propto J_i \left[ \frac{k_{im}\rho/a}{1 + \delta(1+i)/(8\pi N)^{1/2}} \right] \cos l\phi, \quad (7.16.26)$$

где  $k_{im}$  —  $m$ -й нуль функции Бесселя  $J_l(x)$  и  $N = a^2/\lambda d$  ( $a$  — радиус зеркала). В этом случае потери определяются формулой (7.11.8).

## 7.17. РЕЗОНАТОРЫ С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Если резонатор обладает аксиальной симметрией, то выражение для поля внутри резонатора удобно искать в виде

$$u(\rho, \phi) = \sum_{l,p} (S_{lp} \sin l\phi + C_{lp} \cos l\phi) R_p^l(\rho), \quad (7.17.1)$$

где  $S_{lp}$  и  $C_{lp}$  — соответствующие коэффициенты, а  $R_p^l(\rho)$  — функция, которую можно определить, решив интегральное уравнение Фокса — Ли. Ядро этого интегрального уравнения нетрудно вычислить, усредняя интегральное уравнение (7.15.1) по  $\cos l\phi$  (или  $\sin l\phi$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_{lp} \int_0^{2\pi} u(\rho, \phi) \begin{cases} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{cases} d\phi = \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} u(\rho', \phi') d\phi' \times \\ \times \int_0^{2\pi} K_{12}(\rho, \rho', \phi, \phi') \begin{cases} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{cases} d\phi. \end{aligned} \quad (7.17.2)$$

Ядро  $K_{12}$  этого уравнения совпадает с ядром уравнения (7.14.56), если положить  $W_1 = W_2 = 0$ . Таким образом, мы имеем

$$K_{12}(\rho, \rho', \phi, \phi') = [-i/(\lambda d)] \exp\{-ik/(2d)[g\rho^2 + g\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')]\}. \quad (7.17.3)$$

Наконец, подставляя правые части выражений (7.17.1) и (7.17.3) в уравнение (7.17.2), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{lp} R_p^l(\rho) &= 2\pi \frac{i^{l+1}}{\lambda d} \int_0^a J_l\left(\frac{k\rho\rho'}{d}\right) \exp\left[-\frac{ikg}{2d}(\rho^2 + \rho'^2)\right] R_p^l(\rho') \rho' d\rho' = \\ &= i^{l+1} 2\pi N \int_0^1 J_l\left(2\pi N \frac{\rho}{a} \eta\right) \exp\left[-i\pi N g \left(\frac{\rho^2}{a^2} + \eta^2\right)\right] R_p^l(\eta) d\eta; \end{aligned} \quad (7.17.4)$$

здесь  $N = a^2/\lambda d$  и  $\eta = \rho'/a$ . Заметим, что если  $g$  заменить на  $-g$ , то собственные значения  $\gamma_{lp}$  заменятся на  $(-1)^{l+1} \gamma_{lp}^*$ . Отсюда следует, что два резонатора с одинаковыми числами Френеля  $N$  и противоположными по знаку значениями параметров  $g$  имеют одни и те же потери.

## 7.18. ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В телескопических резонаторах с зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  излучение обычно выводится с зеркала  $M_1$  (рис. 7.17); поэтому для простоты можно предположить, что зеркало  $M_2$  имеет бесконечный диаметр. В этом случае уравнение Фокса — Ли принимает вид

$$\gamma R^l(\xi) = i^{l+1} \frac{2\pi N_1}{g_2} \int_0^1 J_l \left( \frac{\pi N_1 \xi \eta}{g_2} \right) \times \\ \times \exp \left[ -i \frac{\pi N_1}{2g_2} (2g_2 g_1 - 1)(\xi^2 + \eta^2) \right] R^l(\eta) \eta d\eta, \quad (7.18.1)$$

где  $e^{\pm i l \phi} R^l(\rho/a)$  — распределение поля на зеркале  $M_1$ ,  $N_1 = a^2/\lambda d$  — число Френеля на зеркале  $M_1$ , а  $\xi$  и  $\eta$  — радиальные координаты, нормированные на величину  $a_1$ .

Легко показать, что выражение (7.18.1) описывает также и симметричный резонатор (рис. 7.36) с числом Френеля  $N_{\text{сим}} = N_1/(2g_2)$  и параметром  $g_{\text{сим}} = (g_1 g_2)^{1/2}$ . Определим эквивалентное число Френеля  $N_{\text{эkv}}$ , которое равно расстоянию от поверхности волнового фронта (проходящего через центр зеркала) до края зеркала, деленному на  $\lambda/2$  (рис. 7.37). Таким образом, мы можем написать

$$N_{\text{эkv}} = N_1 [(g_1/g_2)(g_1 g_2 - 1)]^{1/2} (N_0/2) = (M - 1/M); \quad (7.18.2)$$

здесь  $M$  — увеличение резонатора, а  $N = N_1/(2g_2)$ . При этом выражение (7.18.1) принимает вид

$$M \gamma f(M\xi) = i^{l+1} 2t \int_0^1 J_l(t\xi\eta) \exp \left[ -i \frac{t}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right] f(\eta) \eta d\eta, \quad (7.18.3)$$

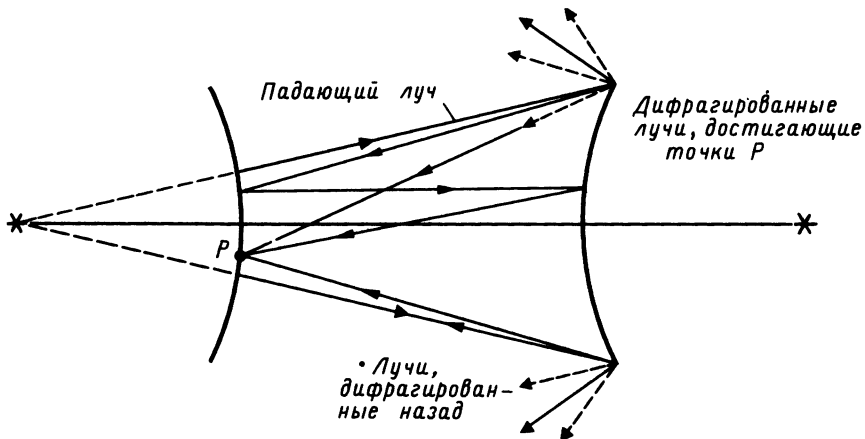


Рис. 7.36. Формирование лучей, дифрагированных на краях в неустойчивом резонаторе.

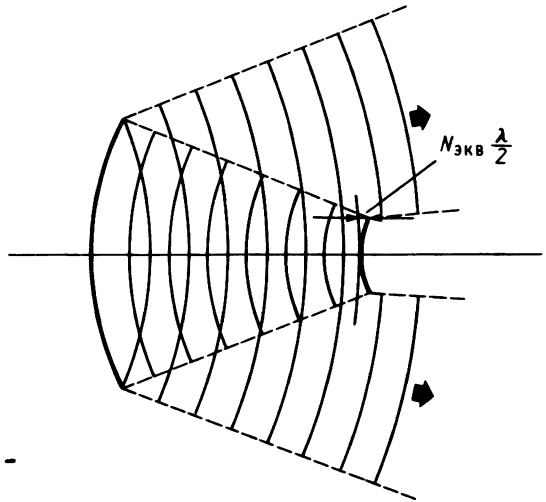


Рис. 7.37. К определению эквивалентного числа Френеля в неустойчивом резонаторе.

где  $t = 2\pi MN = 4\pi N_{\text{экр}} M^2 / (M^2 - 1)$  и  $f(\xi) = R^l(\xi) \exp(i\pi N_{\text{экр}} \xi^2)$ . При достаточно больших числах Френеля интеграл в (17.8.3) можно вычислить асимптотически, используя выражения (5.8.1) и (5.8.5). Таким образом, для аксиально-симметричных мод ( $l=0$ ) получаем

$$M\gamma f(M\xi) = f(\xi) - \frac{e^{-i\pi/4}}{(2t)^{1/2}} f(1) \left[ \frac{e^{-i(t/2)(1-\xi)^2}}{\sqrt{1-\xi}} + \frac{e^{-i(t/2)(1+\xi)^2}}{\sqrt{1+\xi}} \right] \equiv$$

$$\equiv f(\xi) + f(1)F_1(\xi, t) \quad (7.18.4)$$

здесь  $F_1(\xi, t)$  представляет собой волну, возникающую за счет краевой дифракции. Следуя процедуре, предложенной Хорвицем [42] для прямоугольных зеркал, определим последовательность волн  $F_n$  краевой дифракции, получаемых подстановкой волны  $F_{n-1}$  в правую часть уравнения (7.18.3) с последующим вычитанием вклада волны  $F_{n-1}$  в краевую дифракцию. Таким образом, мы имеем

$$F_n(M\xi, t) = i2t \int_0^1 J_0(t\xi\eta) \exp\left[-i\frac{t}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right] F_{n-1}(\eta, t) \eta d\eta -$$

$$- F_{n-1}(1, t)F_1(M\xi, t). \quad (7.18.5)$$

Разлагая  $f(\xi)$  в ряд по  $F_n$  получаем

$$f(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^m a_n F_n(\xi, t), \quad (7.18.6)$$

где  $m$  выбирается достаточно большим, чтобы на отрезке  $0 \leq \xi \leq 1$  функция  $F_{m+1}(\xi, t)$  была почти постоянной. Подставляя выражение (7.18.6) в (7.18.3) и используя затем уравнение (7.18.5), мы окончательно-

но имеем

$$M\gamma \left[ 1 + \sum_{n=1}^m a_n F_n(\xi, t) \right] = 1 + \sum_{n=1}^m a_n F_{n+1}(\xi, t) + \left[ 1 + \sum_{n=1}^m a_n F_n(1, t) \right] F_1(\xi, t). \quad (7.18.7)$$

Учитывая то, что функция  $F_{m+1}(\xi, t)$  на отрезке  $0 < \xi < 1$  почти постоянна, и приравнивая коэффициенты при  $F_n(\xi, t)$  в правой и левой частях данного уравнения, находим  $a_m = (\tilde{\gamma} - 1)/F_{m+1}(1, t)$  и  $a_n/a_{n-1} = \tilde{\gamma}^{-1}$ . Таким образом,

$$a_n = [(\tilde{\gamma} - 1)/F_{m+1}(1, t)] \tilde{\gamma}^{m-n}; \quad (7.18.8)$$

здесь  $\tilde{\gamma} \equiv M\gamma$ . Окончательно, приравнивая в уравнении (7.18.7) коэффициенты при  $F_1(\xi, t)$  друг другу и используя выражение (7.18.8) для  $\gamma$ , получаем следующее уравнение относительно  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma}^m(\tilde{\gamma} - 1) = F_{m+1}(1, t) + (\tilde{\gamma} - 1) \sum_{n=1}^m \tilde{\gamma}^{m-n} F_n(1, t). \quad (7.18.9)$$

Решив это уравнение, можно вычислить коэффициенты  $a_n$  с помощью выражения (7.18.8).

При  $t \rightarrow \infty$  (см. работу Батса и Авизониса [42а]) функцию  $F_n(\xi, t)$  можно записать как функцию

$$F(\xi, t) = [-e^{-it(1+\xi^2)/(1-\xi^2)}][J_0(2t\xi) + i\xi J_1(2t\xi)], \quad (7.18.10)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  — функции Бесселя. При получении выражения (7.18.10) мы положили

$$F_n(\xi, t) = F(\xi/M^n, t/M_{n-1}); \quad (7.18.11)$$

здесь  $M^n$  — увеличение  $M$  в  $n$ -й степени, а

$$M_m = \sum_{k=0}^m M^{-2k}. \quad (7.18.12)$$

В частности, можно показать, что

$$F_m(0, t) \cong -\exp(-i4\pi N_{\text{эKB}}),$$

$$F_m(1, t) = -\exp[-i4\pi N_{\text{эKB}}(1 + M^{-2m})] J_0[8\pi N_{\text{эKB}}/(M^m)], \quad (7.18.13)$$

где параметр  $M_m$  заменен приближенным значением  $M_\infty = M^2/(M^2 - 1)$ , а  $t/M_\infty$  заменено на  $4\pi N_{\text{эKB}}$ . Поскольку  $F_m$  почти постоянна на интервале  $(0, 1)$ , из выражения (7.18.13) следует, что значение  $M^m$  должно быть больше, чем  $8\pi N_{\text{эKB}}$ . Проверка, выполненная с помощью серии численных расчетов, показала, что параметр  $m$  должен быть установлен в соответствии с критерием Хорвица

$$M^m = 250N_{\text{эKB}}, \quad (7.18.14)$$

Кроме того, решая уравнение (7.18.9), можно определить потери  $\alpha$  для соответствующих мод, используя стандартное выражение

$$\alpha = 1 - |\tilde{\gamma}/M|^2. \quad (7.18.15)$$

При этом для данных  $M$  и  $N_{\text{эKB}}$  естественно расположить собственные значения  $\tilde{\gamma}$  в порядке уменьшения их абсолютного значения. В частности, главным будет собственное значение, соответствующее ос-

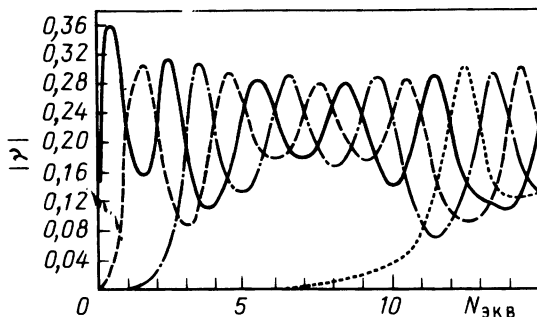


Рис. 7.38. Собственные значения  $\gamma$  для аксиально-симметричных мод с индексами 1, 2, 3 и 4 в симметричном неустойчивом резонаторе с  $M = 5$  и  $g = 2,6$ . Следует заметить, что значения  $|\gamma|$  осциллируют около значений, полученных в приближении геометрической оптики. (Из работы Сигмэна и Миллера [37].)

новной моде. При  $N_{\text{экв}} \rightarrow \infty$  главное собственное значение стремится к единице. Действительно, сферическая волна  $f(\xi)$ , будучи основной модой резонатора с зеркалами бесконечных размеров (см. разд. 7.12), должна сохраняться неизменной и коэффициенты  $a_n$  должны быть равны нулю. Для зеркал с конечными размерами величина  $\tilde{\gamma}$  уже не равна единице, и если для нескольких мод построить график функции  $\alpha = \alpha(N_{\text{экв}})$ , то мы получим зависимость, характеризуемую некоторой периодичностью (рис. 7.38). Заметим, что  $|\tilde{\gamma}|$  достигает максимального значения при полужелых значениях  $N_{\text{экв}}$ . Отсюда следует, что потери основной моды минимальны при полужелых значениях  $N_{\text{экв}}$  и максимальны при целых<sup>1)</sup>. Такое поведение основной моды обусловлено сложным интерференционным взаимодействием между невозмущенной сферической волной и волнами, дифрагированными на краях зеркал [43].

## 7.19. РЕЗОНАТОРЫ С АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

До сих пор мы рассматривали лишь незаполненные активной средой резонаторы. Поэтому, исходя из представленной выше теории, мы не можем сделать заключения об амплитуде и частоте генерации в лазерах. Для того чтобы получить информацию об этих параметрах, мы должны решить уравнения (7.1.13), а для этого нам необходимо

<sup>1)</sup> Как показали Ананьев и Шерстобитов (см. сб. Квантовая электроника /Под ред. Н.Г. Басова, 1971, № 3, с. 82) рассмотренный случай резонатора с зеркалами с острым краем является гипотетическим. На практике зеркало имеет сглаженный край и периодическая зависимость дифракционных потерь от  $N_{\text{экв}}$  исчезает. Поэтому требование Сигмэна  $N_{\text{экв}} = m/2$  является неверным. — Прим. перев.



иметь аналитическую зависимость лазерного усиления  $A_L(I, \omega, \omega_L)$  и фазового множителя  $\beta_L(I, \omega, \omega_L)$  от частот  $\omega, \omega_L$  и интенсивности. Кроме того, необходимо учитывать и тот факт, что поле в окрестности оси резонатора неоднородно, поэтому каждому сечению резонатора придется приписывать свое значение интенсивности. Таким образом, введенный выше параметр  $I$  для определения  $A_L$  и  $\beta_L$  теперь можно использовать лишь для учета того, что обе эти величины зависят от общей интенсивности генерируемой моды.

Кроме того, при определении величин  $A_L$  и  $B_L$  мы будем предполагать, что лазер работает в *одномодовом режиме*, т. е. считать, что поле в резонаторе генерируется на одной частоте, совпадающей с частотой данной продольной моды. Это предположение более или менее верно для некоторых типов лазеров, имеющих *однородную ширину линии усиления*. Однако газовые лазеры, линии которых являются неоднородно уширенными за счет эффекта Доплера, трудно заставить работать в одномодовом режиме, и для этого, как правило, требуется принимать дополнительные меры.

Анализ многомодового режима генерации чрезвычайно сложен, поскольку он должен учитывать нелинейный характер взаимодействия между различными модами, которое может привести к возникновению нежелательных эффектов, таких, как генерация периодических последовательностей или пакетов коротких импульсов вследствие фазовой когерентности между различными генерируемыми модами (см. книгу Ярива [8], указанную в литературе к гл. 1 нашей книги). В случае когда *фазовая синхронизация* обуславливается нелинейным поведением активной среды, принято говорить о *самосинхронизации*, чтобы отличить это от случая, в котором синхронизация возникает за счет включения в оптический резонатор пассивной среды, коэффициент пропускания которой увеличивается с интенсивностью излучения (*пассивная синхронизация мод*). Примерами таких сред, называемых *насыщаемыми поглотителями*, являются газы (например,  $SF_6$ ), жидкости (например, красители), а также твердые тела, линия поглощения которых совпадает с рабочей частотой лазера. Принцип действия насыщаемых поглотителей нетрудно понять, если заметить, что поглощательная способность среды понижается, когда населенности верхнего и нижнего уровней поглотителя выравниваются. (Следовательно, хороший насыщаемый поглотитель должен насыщаться при умеренных значениях интенсивности света). Более надежным способом синхронизации мод является введение в резонатор нелинейной среды, потери в которой могут быть промодулированы переменным электрическим полем с частотой модуляции, совпадающей с межмодовым ча-

стотным интервалом. Этот метод, известный под названием *активной синхронизации мод*, в основном используется для генерации коротких импульсов в лазерах непрерывного действия.

В остальной части этого раздела рассмотрим процесс установления непрерывной генерации в одномодовых лазерах с однородно уширенной линией лазерного перехода. Хотя такая ситуация встречается редко, однако в этом случае рассмотрение оказывается не столь сложным, как при неоднородном уширении линий. Тем не менее к последнему случаю мы будем иногда обращаться [44].

### 7.19.1 Нелинейная диэлектрическая восприимчивость лазерной среды

В приближении изолированного резонансного уровня восприимчивость активной среды можно записать в простом виде [ср. с выражением (1.2.57)]:

$$\chi(\nu) = \chi_0 + i[f \Delta N / (1 + \mathcal{J})] \Gamma / [\Gamma + i(\nu - \nu_L)] = \chi' + i\chi'' \quad (7.19.1)$$

Здесь  $\Gamma$  — коэффициент затухания, имеющий размерность частоты (обычно измеряется в обратных сантиметрах) и соответствующий ширине линии кривой усиления  $\chi''(\nu)$  по полувысоте,  $f$  — сила осциллятора и  $\mathcal{J} = \langle E^2 \rangle / E_S^2$  — усредненный по времени квадрат напряженности электрического поля  $E$ , нормированный на квадрат напряженности поля насыщения  $E_S$ . В выражении (7.19.1) величина  $\chi_0$  учитывает нерезонансные вклады в восприимчивость, так что вблизи центральной частоты  $\nu_L$  лазерного перехода ее можно считать постоянной. Наконец,  $\Delta N = (e^2 \Delta N_0) / (2\epsilon_0 m \omega_L \Gamma)$  пропорционально плотности инверсии населенностей  $\Delta N_0$ .

Во многих случаях значение  $\chi$  несущественно отличается от  $\chi_0$ , так что вблизи линии лазерного перехода комплексный показатель преломления среды  $\tilde{n} = n + ik$  можно записать в виде

$$n + ik \cong \chi_0^{1/2} + [i/(2\chi_0^{1/2})][f \Delta N / (1 + \mathcal{J})] \Gamma / [\Gamma + i(\nu - \nu_L)] = n_0 + \Delta n + ik \quad (7.19.2)$$

Используя безразмерную лоренцеву функцию

$$\mathcal{L}(\nu - \nu_L) = \Gamma^2 / [\Gamma^2 + (\nu - \nu_L)^2] \equiv 1 / (1 + \zeta^2), \quad (7.19.3)$$

где  $\zeta = (\nu - \nu_L) / \Gamma$  — параметр расстройки, получаем

$$\Delta n = [1 / (2n_0)][f \Delta N / (1 + \mathcal{J})] \mathcal{L}\zeta, \quad (7.19.4)$$

$$\kappa = [1 / (2n_0)][f \Delta N / (1 + \mathcal{J})] \mathcal{L}.$$

Для пассивных сред мы имеем  $\kappa < 0$ , а для активных  $\kappa > 0$ .

В соответствии с выражением (7.19.4) постоянная распространения  $k = \beta + ig/2$  лазерной среды дается выражением

$$k = \beta + ig/2 = k_0 \left( n_0 + \frac{1}{2n_0} \frac{f \Delta N}{1 + \mathcal{J}} \mathcal{L}\zeta \right) + ik_0 \frac{1}{2n_0} \frac{f \Delta N \mathcal{L}}{1 + \mathcal{J}}, \quad (7.19.5)$$

где усиление  $g$  среды на частоте  $\nu_L$  было выбрано таким, чтобы интенсивность плоской волны, распространяющейся в среде, увеличивалась с расстоянием  $z$  как  $e^{gz}$ .

Для доплеровски уширенной линии записанное в (7.19.5) выражение для  $g$  должно быть заменено следующей формулой (вывод этой формулы выходит за рамки настоящей книги):

$$g(\nu) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda^2 \Delta N_0}{\Delta \nu_D \tau_{sp}} \exp \left\{ - \left[ \frac{2(\nu - \nu_L)}{\Delta \nu_D} (\ln 2)^{1/2} \right]^2 \right\}; \quad (7.19.6)$$

здесь  $\tau_{sp}$  — радиационное время жизни, а  $\Delta \nu_D$  — полная ширина линии по полувысоте, зависящая от атомной массы  $M$  следующим образом:

$$\Delta \nu_D = 2\nu_L [2KT/(Mc^2) \ln 2]^{1/2}; \quad (7.19.7)$$

здесь  $K$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — абсолютная температура.

Изменение  $\Delta n$  показателя преломления на частоте  $\nu$  вблизи  $\nu_L$  может быть вычислено из дисперсионного уравнения Крамерса — Кронига (см. задачу 9 в гл. 1 настоящей книги и книгу Беннета [18]):

$$\Delta n(\nu) = \frac{c}{\pi\omega} \int_0^\infty \frac{\nu' g(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \cong \frac{cg(\nu_L)}{\omega\pi^{1/2}} e^{-\zeta^2} \int_0^\zeta e^{x^2} dx = -\frac{cg(\nu_L)}{\omega\pi^{1/2}} Z(\zeta), \quad (7.19.8)$$

где  $\zeta = 2(\ln 2)^{1/2}(\nu - \nu_L)/\Delta \nu_D$  — расстройка для доплеровской линии, а  $Z(\zeta)$  — интеграл Доусона  $Z(\zeta) = e^{-\zeta^2} \int_0^\zeta e^{x^2} dx$  (см. справочник Абрамовица и Стегуна [4, с. 319], указанный в литературе к гл. 2 нашей книги). Интеграл  $Z(\zeta)$ , который напоминает функцию  $\zeta/(1+\zeta^2)$ , имеет максимум  $Z_{\max} = 0,54$  при  $\zeta = 0,924$  и точку перегиба при  $\zeta = 1,5$ . Таким образом, изменение  $\Delta n$  показателя преломления при  $\nu = \nu_L$  равно нулю, а при  $\zeta = \pm 0,924$  принимает соответственно максимальные положительные и отрицательные значения.

### 7.19.2. Одномодовый режим

Строгое рассмотрение одномодового режима работы лазеров читатель может найти у Сарджента и др. (см. ссылку [6, ch. 7] в литературе к гл. 1 нашей книги). Мы же ограничимся рассмотрением резонаторов, заполненных активной средой с однородно уширенной линией. Пусть активная среда характеризуется восприимчивостью  $\chi$ , определяемой выражением (7.19.1), а генерация происходит на одной частоте  $\nu$ . В этом случае соотношение (7.10.7) можно переписать в виде

$$P_n = \frac{if\varepsilon_0}{1 + i\zeta} \frac{\iiint_{\text{Резонатор}} [E \Delta N \Phi_n / (1 + \mathcal{J})] dV}{\iiint_{\text{Резонатор}} \Phi_n^2 dV}, \quad (7.19.9)$$

где индексы  $l$ ,  $m$  и  $n$  заменены одним индексом  $n$ . Предположим теперь, что величина  $\mathcal{J}$  столь мала, что коэффициент насыщения можно

взять равным единице. Тогда, используя выражения (7.10.5), (7.10.7) и (7.19.9), мы можем написать следующее уравнение:

$$(k_n^2 - k^2)E_n = [ifk_0^2 \langle \Delta N \rangle_n / (1 + i\zeta)] E_n, \quad (7.19.10)$$

где

$$\langle \Delta N \rangle_n = \frac{\iiint \Delta N \Phi_n^2 dV}{\iiint \Phi_n^2 dV}.$$

Уравнение (7.19.10) имеет решение либо  $E_n = 0$ , либо

$$k_n^2 - k^2 = ifk_0^2 \langle \Delta N \rangle_n / (f + i\zeta). \quad (7.19.11)$$

Это означает, что поле в резонаторе с точностью до некоторого неопределенного множителя  $A_n$  будет совпадать с модой  $\Phi_n$ , собственное значение  $k_n$  которой удовлетворяет уравнению (7.19.11). Если  $k_n$  разделить на вещественную  $k_n'$  и мнимую  $k_n''$  части, то последнее уравнение можно привести к виду

$$(2\pi/c)(\nu - \nu_n) = -[fk_0 \langle \Delta N \rangle_n / (2k)] \mathcal{L}\zeta, \quad (7.19.12a)$$

$$k_n'' = [fk_0 \langle \Delta N \rangle_n / (2k)] \mathcal{L}. \quad (7.19.12b)$$

Поскольку частота  $\nu_n$  фиксирована резонансными условиями (7.10.14б) и (7.10.14в), выражение (7.19.12a) определяет расстройку частоты генерации по отношению к частоте резонатора  $\nu_n$ . В частности, при  $\Delta N = 0$  частота генерации  $\nu$  совпадает с  $\nu_n$ . С увеличением инверсии населенностей  $\langle \Delta N \rangle_n$  частота  $\nu$  стремится уйти от резонансной частоты и принимает значения между  $\nu_n$  и  $\nu_L$ . Это явление известно как *затягивание частоты*. Выражение (7.19.12b) устанавливает соответствие между потерями в резонаторе, представляемыми величиной  $k''$ , и инверсией населенностей  $\langle \Delta N \rangle_n$ . Величина  $\Delta N_{th}$ , удовлетворяющая этому условию, называется *пороговой инверсией населенностей*. Если  $\langle \Delta N \rangle_n$  записать в виде  $\langle \Delta N \rangle_n = \mathcal{N}_n \Delta N_{th}$ , где  $\mathcal{N}_n$  — так называемый *параметр возбуждения*, а  $\Delta N_{th}$  отнести к случаю, когда  $\nu_L = \nu_n$ , то условия  $\mathcal{L}N < 1$  и  $\mathcal{L}N > 1$  относятся соответственно к предпороговому или надпороговому режимам генерации.

Если пренебречь дифракционными потерями, то  $k_n''$  с хорошей точностью можно записать в виде [см. выражение (7.10.14а)]  $k_n'' = (1 - |r_1 r_2|) / (2d)$ , так что пороговая инверсия населенностей с помощью соотношения (7.19.12б) запишется следующим образом:

$$\Delta N_{th} = [2k / (fk_0^2 \mathcal{L})] (1 - |r_1 r_2|) / (2d). \quad (7.19.13a)$$

Для газового лазера с доплеровски уширенной линией это выражение заменится следующим [18]:

$$\Delta N_{0,th} = [1 / (\pi \ln 2)^{1/2}] k^2 [(1 - |r_1 r_2|) / (2d)] \Delta \nu_D \tau_{sp} e^{\zeta^2}, \quad (7.19.13b)$$

а выражение (7.19.12a) для расстройки лазера принимает вид

$$\nu - \nu_n = -\frac{c}{2\pi} \frac{g(\nu_L)}{\pi^{1/2}} Z(\zeta), \quad (7.19.14)$$

где параметры  $Z$  и  $\zeta$  определяются выражением (7.19.8) [см. в книге Беннета [18] выражение (2.116)].

При  $\mathcal{L}\mathcal{N}_n > 1$  амплитуда поля становится столь большой, что уже нельзя пренебрегать эффектами насыщения. В этом случае, полагая, что в резонаторе поле  $E$  можно представить одной модой  $\Phi_n$  из выражения (7.19.9) получаем

$$P_n = i \frac{f\varepsilon_0}{1 + i\zeta} E_n \frac{\iiint \Delta N \Phi_n^2 (1 + |\Phi_n|^2 E_n^2 \mathcal{L} / \bar{E}_S^2)^{-1} dV}{\iiint \Phi_n^2 dV}; \quad (7.19.15)$$

здесь мы учли в явном виде зависимость параметра насыщения  $E_S^2 = \bar{E}_S^2 / \mathcal{L}$  от параметра расстройки  $\zeta$ . Поскольку поперечное распределение поля медленно меняется с  $z$ , а  $|\Phi_n^2|$  является быстроменяющейся функцией от  $z$ , то подынтегральные выражения в (7.19.9) и (7.19.15) можно заменить их значениями, усредненными на расстоянии в несколько длин волн по оси  $z$ . Таким образом, получим

$$P_n = i \frac{f\varepsilon_0}{1 + i\zeta} E_n \frac{\iiint \Delta N h(W) u_{im}^2 dV}{\iiint u_{im}^2 dV}, \quad (7.19.16)$$

причем

$$W = (E_n^2 / \bar{E}_S^2) \mathcal{L} |u_{im}^2|, \quad (7.19.17)$$

$$h(W) = 2 \left\langle \frac{\sin^2 kz}{1 + W \sin^2 kz} \right\rangle = 1 - \frac{3}{4} W + \dots \quad (7.19.18)$$

При достаточно малых  $W$  величину  $h(W)$  можно аппроксимировать выражением  $1 - (3/2)W$ , так что (7.19.16) можно записать в виде

$$P_n = i \frac{f\varepsilon_0 \langle \Delta N \rangle_n}{1 + i\zeta} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{E_n^2}{\bar{E}_S^2} \mathcal{L} \frac{\iiint \Delta N |u_{im}^2| u_{im}^2 dV}{\iiint \Delta N u_{im}^2 dV} \right) E_n. \quad (7.19.19)$$

Таким образом, выражения (7.19.12а) и (7.19.12б) можно переписать следующим образом:

$$(2\pi/c)(\nu - \nu_n) = - [f \langle \Delta N \rangle_n / (2k)] \mathcal{L} \zeta (1 - \frac{3}{2} E_n^2 \alpha_n \mathcal{L}), \quad (7.19.20a)$$

$$1 = \mathcal{L} \mathcal{N}_n (1 - \frac{3}{2} E_n^2 \alpha_n \mathcal{L}), \quad (7.19.20б)$$

причем  $\alpha_n$  здесь заменяет несколько коэффициентов при втором члене в скобках в выражении (7.19.19). Как правило, моды лазера аппроксимируют плоскими волнами, а инверсию населенностей  $\Delta N$  считают однородной по всему объему резонатора.

Из выражения (7.19.20б) следует, что квадрат амплитуды  $E_n$  определяется выражением

$$E_n^2 = [2 / (3\alpha_n)] (\mathcal{L} - 1 / \mathcal{N}_n) / \mathcal{L}^2. \quad (7.19.21)$$

Величину  $E_n^2$  можно определить с хорошей точностью, если положить  $\nu = \nu_n$

На рис. 7.39 показано изменение мощность генерации в зависимо-

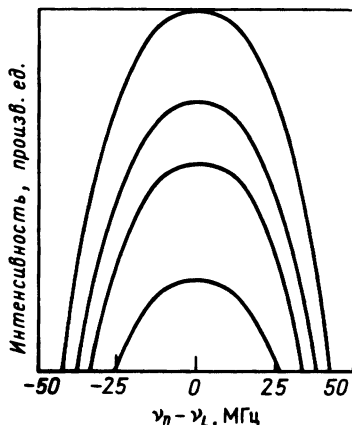


Рис. 7.39. Зависимость интенсивности излучения в случае одномодовой генерации от расстройки  $\nu_n - \nu_L$  частоты для лазерной среды с однородно уширенной линией генерации ( $\Gamma = 100$  МГц) при возрастании параметра возбуждения  $\mathcal{N} = 1,05; 1,10; 1,15; 1,2$ .

сти от расстройки  $\nu_n - \nu_L$  (например, при перемещении одного из зеркал резонатора). Как и ожидалось, мощность достигает максимума при  $\nu_n = \nu_L$  и убывает до нуля при  $\zeta^2 = \mathcal{N}_n - 1$ . Отсюда следует, что допустимая расстройка резонатора зависит от ширины лазерной линии  $\Gamma$  и от величины, на которую инверсия населенностей превышает пороговое значение  $\Delta N_{th}$ , которое в свою очередь определяется потерями в резонаторе. Можно расширить область допустимой расстройки частоты резонатора относительно центральной частоты лазерной линии, если уширить лазерную линию и сузить полосу резонатора; при этом, вообще говоря, необходимо увеличить и инверсию населенностей. В частности, когда интервал расстройки становится больше межмодового расстояния, интенсивность лазерного излучения практически не зависит от длины резонатора. Это достигается при выполнении условия  $\mathcal{N} > [c/(2d\Gamma) + 1]^2$ .

В одномодовом лазере с доплеровски уширенной линией (например, в He—Ne-лазере) выходная мощность по мере изменения длины резонатора (или, что эквивалентно, частоты) достигает своего максимума на частоте, соответствующей центру лазерной линии. Данное явление, предсказанное Лэмбом (см. книгу [6], указанную в литературе к гл. 1), впервые наблюдали Макфарлэйн и др. [45], а также Зоке и Джаван [46]. Это связано с тем, что каждая частица, движущаяся с тепловой скоростью, «видит» две бегущие волны, из которых составлена картина стоячих волн, соответствующая моде резонатора, причем частоты этих волн сдвинуты вверх или вниз относительно центральной частоты  $\nu_L$ . Ширина провала, образуемого на кривой усиления, определяется в данном случае уже не доплеровской, а естественной шириной линии. Аналогичный эффект наблюдается всякий раз, когда стоячая световая волна взаимодействует с поглощающей или

усиливающей газообразной средой. В настоящее время для определения естественной ширины доплеровски уширенных линий применяется спектроскопия насыщения поглощения (см., например, монографии Летохова и Чеботаева [47] и Корни [48]).

### 7.19.3. Одночастотная многомодовая генерация

Когда усиление за один проход превышает пороговую величину, насыщение среды может настолько сильно изменить распределение поля в резонаторе, что оно будет существенно отличаться от того, что мы имеем при генерации одной моды  $\Phi_n$ . К аналогичному эффекту может привести и значительное пространственное изменение инверсии населенностей в объеме моды. В этом случае для вычисления поля в резонаторе полезно применить приближение медленноменяющейся амплитуды, рассмотренное в разд. 7.10.1.

В частности, если предположить, что лазер генерирует на основной моде  $TEM_{00}$ , то из уравнения (7.10.17) имеем

$$E^{(\pm)}(k^2 - k_n^2) \mp 2ik_n dE^{(\pm)}/dz + \omega^2 \mu_0 P^{(\pm)} = 0, \quad (7.19.22)$$

откуда после простых преобразований получаем следующее соотношение:

$$d|E^{(\pm)}|^2/dz = \pm \alpha(z, E^{(+)}, E^{(-)})|E^{(\pm)}|^2, \quad (7.19.23)$$

где  $\alpha$  — коэффициент усиления интенсивности  $|E^{(\pm)}|^2$ , причем

$$\begin{aligned} \alpha(z, E^{(+)}, E^{(-)}) &= -\operatorname{Re}\{(i/k_n)[k^2 - k_n^2 + \omega^2 \mu_0 P^{(\pm)}/E^{(\pm)}]\} = \\ &= -\operatorname{Re}[i(k^2 - k_n^2)/k_n] + g(z, E^{(+)}, E^{(-)}). \end{aligned} \quad (7.19.24)$$

В этом выражении коэффициент усиления лазерной среды  $g$  записывается в виде

$$\begin{aligned} g(z, E^{(+)}, E^{(-)}) &= -\operatorname{Re}\left[\frac{i}{k_n} \omega^2 \mu_0 \frac{P^{(\pm)}}{E^{(\pm)}}\right] = \operatorname{Re}\left(\frac{k_0^2}{k_n} \frac{f}{1 + i\zeta}\right) \times \\ &\times \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \langle |u_{00}|^2 \Delta N / (1 + |E^{(+)} u_{00}^{(+)} + E^{(-)} u_{00}^{(-)}|^2 / E_S^2) \rangle dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |u_{00}|^2 dx dy}, \end{aligned} \quad (7.19.25)$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают среднее значение на интервале  $\Delta z > \lambda$ .

Аналогично можно показать, что фазы  $\phi^{(\pm)}$ , соответствующие амплитудам  $E^{(\pm)}$  ( $E^{(\pm)} = |E^{(\pm)}| e^{i\phi^{(\pm)}}$ ), удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{aligned} d\phi^{(\pm)}/dz &= \pm \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{(1/k_n)[k^2 - k_n^2 + \omega^2 \mu_0 P^{(\pm)}/E^{(\pm)}]\} = \\ &= \mp \beta[z, E^{(+)}, E^{(-)}]. \end{aligned} \quad (7.19.26)$$

Используя уравнение (7.10.11) и выражение (7.10.16), нетрудно показать, что обобщенные комплексные амплитуды  $E^{(\pm)}$  в осевых точках  $z_1$  и  $z_2$ , расположенных на зеркалах резонатора, удовлетворяют сле-

дующему условию:

$$[E^{(+)}(z_1)E^{(-)}(z_2)]/[E^{(+)}(z_2)E^{(-)}(z_1)] = 1. \quad (7.19.27)$$

Если амплитуда поля  $E^{(\pm)}$  в резонаторе много меньше амплитуды поля насыщения  $E_S$ , то  $g$  и  $\beta$  не зависят от  $E^{(\pm)}$  и системы уравнений (7.19.23) и (7.19.26) нетрудно проинтегрировать в квадратурах. Кроме того, граничные условия (7.19.27) дают

$$\int_{z_1}^{z_2} \alpha(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} \beta(z) dz = 0. \quad (7.19.28)$$

Отсюда можно вывести следующее соотношение для резонансного значения  $k_{\vec{n}}$

$$(k^2 - k_n^2)d = -k_0^2 \frac{if}{1 + i\zeta} \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta N |u_{00}|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |u_{00}|^2 dx dy} \right) dz, \quad (7.19.29)$$

которое заменяет аналогичное соотношение (7.19.11). Если в выражении (7.19.29) интеграл в числителе слабо зависит от  $z$ , то как  $\alpha(z)$ , так и  $\beta(z)$  стремятся к нулю и поля  $E^{(\pm)}$  вдоль оси  $z$  остаются постоянными. В физическом смысле это означает, что возбуждается только одна мода  $\Phi_{\vec{n}}$ .

#### 7.19.4. Уравнения Ригрода

Учет эффектов насыщения затрудняет решение представленных выше уравнений. Поэтому для получения хотя бы качественных представлений о влиянии этих эффектов будем считать, что мода  $u_{00}$  является плоской волной, а величина  $\Delta N = \text{const}$  во всем объеме резонатора. Затем в коэффициенте насыщения, стоящем под интегралом в числителе выражения (7.19.25), заменим  $|E^{(+)}u_{00} + E^{(-)}u_{00}|^2$  на  $|E^{(+)}|^2 + |E^{(-)}|^2$ . Используя эти допущения, Ригрод [49] проанализировал решения уравнения (7.19.23), представив при этом коэффициент усиления в виде

$$g = g_0/[1 + \mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}], \quad (7.19.30)$$

где  $\mathcal{J}^{(\pm)} = |E^{(\pm)}u_{00}|^2/E_S^2$ , а  $g_0$  — коэффициент усиления слабого сигнала лазерной среды. Поскольку  $|u_{00}| \propto \exp(-k''z)$ , уравнение (7.19.23) можно переписать в виде

$$d\mathcal{J}^{(\pm)}/dz = \pm \{g_0/[1 + \mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}]\} \mathcal{J}^{(\pm)}, \quad (7.19.31)$$

причем граничные условия для этого уравнения запишутся следующим образом:

$$\mathcal{J}^{(+)}(z_1) = |r_1|^2 \mathcal{J}^{(-)}(z_1), \quad \mathcal{J}^{(-)}(z_2) = |r_2|^2 \mathcal{J}^{(+)}(z_2). \quad (7.19.32)$$

Из граничных условий (7.19.32) следует, что  $\mathcal{J}^{(+)}(z)\mathcal{J}^{(-)}(z) = \text{const}$ . Следовательно, мы имеем [ср. с выражением (7.1.9)]

$$\{[\mathcal{J}^{(+)}(z_2)]/[\mathcal{J}^{(+)}(z_1)]\}^2 = \{[\mathcal{J}^{(-)}(z_1)]/[\mathcal{J}^{(-)}(z_2)]\}^2 = 1/|r_1 r_2|^2 = e^{2G}, \quad (7.19.33)$$



здесь функция  $G = \ln | \mathcal{J}^{(+)}(z_2) / \mathcal{J}^{(+)}(z_1) |$  представляет собой *допустимые потери за один проход*. Для возникновения генерации необходимо, чтобы коэффициент усиления слабого сигнала  $g_0$  превышал величину  $G/d$ .

Чтобы найти  $\mathcal{J}^{(+)}(z_1)$ , необходимо проинтегрировать уравнение (7.19.31). После соответствующих вычислений имеем

$$\mathcal{J}^{(+)}(z_1) = \frac{g_0 d + \ln |r_1 r_2|}{|r_1 r_2|^{-1} + |r_1|^{-2} - |r_2/r_1| - 1} \cong \frac{g_0 d - \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + T_1)}{A_1 + A_2 + T_1}, \quad (7.19.34)$$

здесь  $A$  и  $T$  — соответственно коэффициенты поглощения и пропускания зеркал ( $T_2 = 0$ ). Последнее приближенное выражение подтверждается тем, что при  $|r| \sim 1$  мы получаем  $1/|r| \sim 1 + (1/2)A + (1/2)T$ .

### 7.19.5. Выходная мощность

В резонаторах, в которых для вывода излучения используется полупрозрачное зеркало  $M_1$  с коэффициентом пропускания  $T_1$ , интенсивность выходного излучения  $\mathcal{J}_{\text{вых}}$ , нормированная на интенсивность насыщения, может быть получена с помощью выражения (7.19.34). Таким образом, мы имеем

$$\mathcal{J}_{\text{вых}} = (T_1/|r_1|^2) \mathcal{J}^{(+)}(z_1) \cong g_0 d [T_1/(A_1 + A_2 + T_1)] [1 - (A_1 + A_2 + T_1)/(2g_0 d)]. \quad (7.19.35)$$

Следовательно,  $\mathcal{J}_{\text{вых}}$  максимальна, когда пропускание выходного зеркала равно величине  $T_{\text{опт}}$ , определяемой выражением

$$T_{\text{опт}} = (A_1 + A_2) \{ [2g_0 d / (A_1 + A_2)]^{1/2} - 1 \}. \quad (7.19.36)$$

Таким образом, максимальная мощность, которую можно выделить из плоского резонатора при условии, что  $2g_0 d \gg A_1 + A_2$ , дается выражением

$$P_{\text{вых}} \cong V_{\text{мода}} I_S g_0 \{ 1 - [(A_1 + A_2)/(2g_0 d)]^{1/2} \}, \quad (7.19.37)$$

где  $V_{\text{мода}} = d\omega^2$  — объем генерируемой моды, а  $I_S$  — интенсивность насыщения (в ваттах на квадратный сантиметр) активной среды.

До сих пор мы не учитывали ни дифракционные, ни внутренние потери, присущие лазерной среде, ни потери на отражение. Эти потери можно учесть, включив их в коэффициент  $A_1 + A_2$ , который мы теперь будем рассматривать как меру всех внутренних потерь резонатора. Кроме того, можно предположить, что выражение (7.19.37), полученное для резонатора с плоскими зеркалами, справедливо и для более общего случая устойчивых резонаторов, если только расходимость генерируемой моды не становится слишком большой.

Выражение (7.19.35) можно также использовать и для неустойчивых резонаторов с умеренным значением увеличения ( $M \sim 1$ ). При

этом для телескопического резонатора можно получить следующее выражение:

$$P_{\text{вых}} \cong V_{\text{мода}} I_s g_0 (M - 1) \frac{1 - (1/2g_0 d) \ln(M/|R_1 R_2|)}{(M/R_1 R_2)^{1/2} - (R_1 R_2/M)^{1/2}}. \quad (7.19.38)$$

В выражении (7.19.38) множитель  $M - 1$  учитывает тот факт, что выходная мощность снимается с площади, которая в  $M - 1$  раз больше площади вогнутой поверхности зеркала. Коэффициент отражения  $R = 1 - A - A_d$  выбирается с учетом дифракционных потерь  $A_d$ , величина которых в данном случае весьма существенна. Поскольку эти потери, а следовательно, и произведение  $A_1 A_2$  в значительной мере зависят от эквивалентного числа Френеля  $N_{\text{экр}}$ , мощность  $P_{\text{вых}}$  для данного значения оптимизируется соответствующим выбором величины  $M$ .

## 7.20. ПЕРЕСТРОЙКА ЧАСТОТЫ

Поведение резонатора, заполненного активной средой, существенным образом определяется механизмами, ответственными за уширение линии усиления [50]. Если линия усиления является однородно уширенной, то генерация на данной частоте препятствует возникновению генерации на других частотах. Наоборот, если линия усиления имеет неоднородное уширение, то резонансное поле уже не будет взаимодействовать со всеми молекулами активной среды сразу и может возникнуть генерация на других частотах. Этот механизм ответствен за многомодовую генерацию во многих лазерах, особенно в тех, которые характеризуются высоким усилением. Такой режим используется в некоторых случаях для получения генерации излучения с достаточно широкой полосой с целью модуляции излучения на высокой частоте.

### 7.20.1. Изменение длины резонатора

В разд. 7.19 мы показали, что в случае когда ширина полосы излучения лазера сравнима с межмодовым расстоянием  $\nu_0$  и величина  $\mathcal{N}$  равна приблизительно единице, выходная мощность  $P_{\text{вых}}$  зависит в основном от расстройки  $\nu_{\text{лмн}} - \nu_L$ . При этом оптимизация выходной мощности лазера требует соответствующей юстировки длины резонатора  $d$ , чтобы выполнялось условие  $\nu_{\text{лмн}} = \nu_L$ . Нетрудно показать, что изменение  $d$  на  $\lambda/2$  означает изменение частоты на  $\nu_0$ ; следовательно, длина резонатора должна контролироваться с точностью, лучшей чем  $\lambda$ . В некоторых случаях этого можно достичь, располагая выходные зеркала на двух пластинах, скрепленных друг с другом инваровым стержнем, или закрепляя их на оптической скамье из гранита, что осуществить значительно проще. Кроме того, между зеркалом и поддер-

живающей пластиной вводят пьезоэлектрический преобразователь, толщину которого в диапазоне нескольких микрометров можно регулировать подачей соответствующего напряжения.

### 7.20.2. Перестройка частоты с помощью призм, решеток, эталонов и резонансных отражателей

Другим способом управления частотой является введение внутрь резонатора диспергирующего элемента [50] в виде сочетания призмы и эталона (рис. 7.40) или замена одного из зеркал резонатора дифракционной решеткой или стопой эталонов высокой резкости, образующей так называемый *резонансный отражатель*. Широко используется также метод ввода в резонатор эталона Фабри — Перо (см. следующий раздел), развернутого на небольшой угол. Отражательная способность составного зеркала из наклонного эталона и примыкающего к нему глухого зеркала соответствует кривой пропускания простого резонатора Фабри — Перо с большой областью дисперсии. Максимум отражения составного зеркала достигается изменением угла наклона эталона. Генерация в резонаторе будет происходить на частоте, соответствующей минимуму пропускания эталона.

В молекулярных лазерах спектральные линии, на которых происходит усиление, отстоят друг от друга на расстоянии, равном несколь-

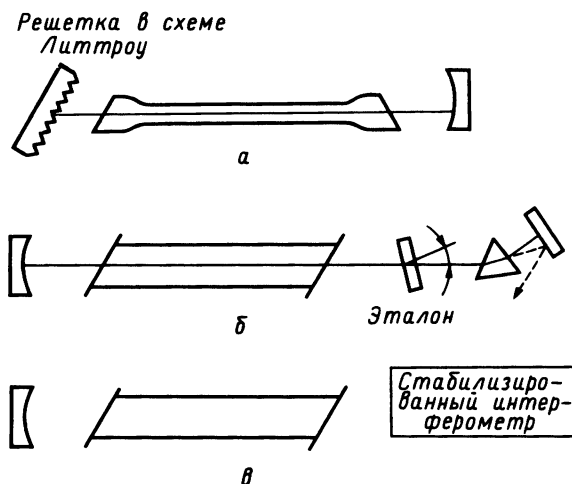


Рис. 7.40. Различные способы селекции линий излучения с помощью дисперсионных элементов, вводимых внутрь резонатора  $\text{CO}_2$ -лазера (а) или аргонового лазера (б) с помощью решетки или сочетания призмы и эталона. На рис. в резонатор He—Ne-лазера, снабженный интерферометром с целью уменьшения ширины линии лазерного излучения.

ким обратным сантиметрам. Передача энергии в молекулярных столкновениях приводит к тому, что система начинает генерировать преимущественно на линиях с небольшим усилением (*эффект конкуренции линий*). Иными словами, набор лазерных линий ведет себя как одна однородно уширенная линия усиления. Если в резонатор ввести избирательные потери на всех линиях, кроме какой-либо выбранной, то систему можно заставить генерировать на другой линии, не обязательно совпадающей с наиболее эффективной. Поскольку расстояние между спектральными линиями имеет величину порядка нескольких обратных сантиметров, приходится отказываться от использования эталона, так как его область свободной дисперсии по порядку величины совпадает с расстоянием между линиями. В этом случае более предпочтительно применять решетку Литтроу (рис. 7.40, а и 7.41). Если мы имеем дело с некогерентным пучком, то внутри полости резонатора отражается лишь часть спектра, длина волны которой удовлетворяет соотношению (6.10.2) при  $\alpha = 0$ . Остальные компоненты спектра распространяются вне направления оптической оси и поэтому теряются. Вращением решетки можно изменять длину волны излучения, отраженного в резонатор. Ширина полосы генерации твердотельных лазеров [51] может быть сужена, если одно из зеркал заме-

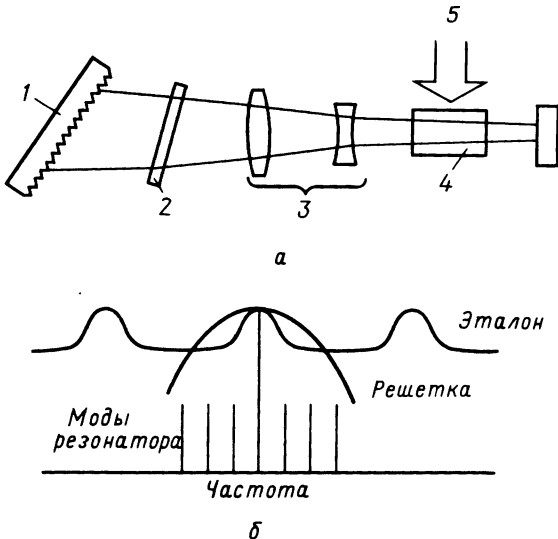


Рис. 7.41. Селекция мод в лазере на красителе. а — схематическое представление резонатора с решеткой и эталоном; 1 — решетка в схеме Литтроу; 2 — эталон; 3 — телескоп (расширитель пучка); 4 — ячейка с красителем; 5 — пучок от эксимерного или  $N_2$ -лазера. б — кривые, иллюстрирующие преселекцию мод решеткой и их селекцию с помощью эталона.

нить специально сконструированным резонансным отражателем с узкой (скажем,  $1 \text{ \AA}$ ) полосой отражения.

### 7.20.3. Одночастотная генерация с помощью интерферометра Фокса — Смита

Существует несколько интерферометрических методов селекции мод. Все они основаны на принципе замены одного из зеркал дополнительным вторичным резонатором, область свободной дисперсии которого сравнима с шириной полосы генерации. Таким образом, такой дополнительный резонатор можно рассматривать как составное зеркало с переменной отражательной способностью.

В резонаторе, в котором селекция продольной моды осуществляется с помощью интерферометра Фокса — Смита [52], протяженный ла-

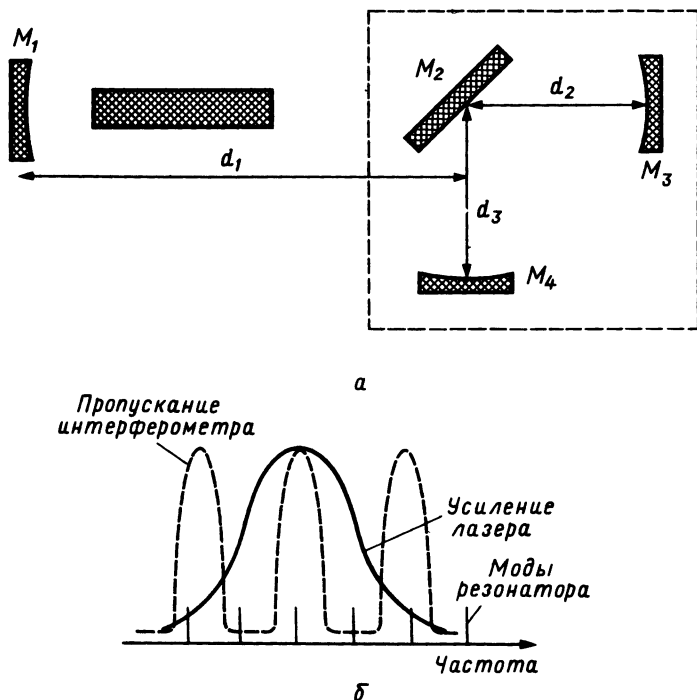


Рис. 7.42. Схематическое представление стабилизированного одномодового лазера с интерферометром Фокса — Смита. а — расположение зеркал; б — зависимости усиления лазера и пропускания интерферометра от частоты. При изменении расстояния  $d_3$  возникает максимум интенсивности выходного лазерного излучения, когда максимум пропускания интерферометра совпадает по частоте с модой резонатора. Зеркало  $M_2$  играет роль делителя пучка.

зерный резонатор длиной  $d_1 + d_2$  при помощи разделяющего зеркала  $M_2$  связан с относительно коротким вторичным резонатором длиной  $d_2 + d_3$  (рис. 7.42). В этом устройстве коэффициент отражения лазерного излучения резонатором достаточно высок для того, чтобы осуществить генерацию в небольшом интервале области свободной дисперсии резонатора

$$c/2(d_2 + d_3), \quad (7.20.1)$$

которая превышает ширину полосы генерации лазера.

Потери при полном проходе резонатора даются выражением

$$\alpha = 1 - \frac{R_1 T_2^2 R_3}{[1 - (R_3 R_4)^{1/2} R_2]^2 + 4(R_3 R_4)^{1/2} R_2 \sin^2[(2\pi/\lambda)(d_2 + d_3)]}, \quad (7.20.2)$$

где  $R_i$  — коэффициенты отражения зеркал, а  $T_2$  — коэффициент пропускания делительного зеркала  $M_2$ .

В случае когда  $R_i = 1$ ,  $T_2 = 0,5$ ,  $d_2 + d_3 = \lambda m/2$  и  $d_1 + d_2 = \lambda n/2$  (где  $m$  и  $n$  — целые числа),  $\alpha$  стремится к нулю и интенсивность в моде не убывает. Это обусловлено тем, что в картине стоячих волн резонатора на разделительном зеркале имеется узел. Иными словами, регулируя длину плеч  $d_2$  и  $d_3$  соответствующим образом, можно добиться того, чтобы потери в резонаторе были равны нулю на данной длине волны. При переходе к следующему резонансу величина  $\alpha$  резко возрастает. Огибающая потерь для различных мод совпадает с кривой пропускания интерферометра, показанной на рис. 7.42, б.

#### 7.20.4. Стабилизация частоты с помощью инжекции внешнего сигнала

Важную роль играет метод стабилизации частоты лазера, который заключается во введении в резонатор внешнего сигнала от стабилизированного лазера низкой мощности, генерирующего излучение той же частоты. Этот метод, известный как *внешняя стабилизация частоты* [53, 54], использует нелинейную зависимость усиления от амплитуды усиливаемой волны. Он был впервые предложен в 1927 г. ван дер Полем в работах по синхронизации частоты генераторов на триодах (см. книгу Сарджента и др. [6, с. 52], указанную в литературе к гл. 1 нашей книги).

Влияние стабилизированного монохроматического сигнала  $e(t) = e \sin \omega_{\text{внеш}} t$  на амплитуду  $V(t)$  поля в лазерном генераторе можно изучить на примере цепи с обратной связью, представленной на рис. 7.6. Предположим, что коэффициент усиления  $A = A(V^2)$  подчиняется квадратичному закону  $A = A_0 - A_3 V^2$ , и пренебрежем зависимостью фазового сдвига  $\beta(I, \omega, \omega_L)$  от частоты  $\omega$  [вследствие узости спектрального диапазона  $V(t)$  с центром на частоте  $\omega_{\text{внеш}}$ ]. Величина

амплитуды  $V(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению ван дер Поля

$$d^2 V/dt^2 - (d/dt)(A_0 V - A_3 V^3) + \omega_{\text{рез}}^2 V = V_{\text{внеш}} \sin \omega_{\text{внеш}} t, \quad (7.20.3)$$

где  $V_{\text{внеш}}$  — величина, пропорциональная амплитуде внешнего сигнала. Если  $\omega_{\text{рез}} \sim \omega_{\text{внеш}}$ , то можно применить приближение медленноменяющейся амплитуды. Тогда решение уравнения (7.20.3) можно написать в виде

$$V(t) = \text{Re}\{E(t) \exp[i\omega_{\text{внеш}} t + i\Phi(t)]\}, \quad (7.20.4)$$

где  $E(t)$  и  $\Phi(t)$  — две медленноменяющиеся функции времени  $t$ , такие, что их вторыми производными по времени можно пренебречь. Учитывая это условие, подставим в уравнение (7.20.3) правую часть выражения (7.20.4), тогда

$$dE/dt = \frac{1}{2}(A_0 - A_3 E^2)E - \frac{1}{2}\omega_{\text{внеш}} V_{\text{внеш}} \cos \Phi, \quad (7.20.5a)$$

$$d\Phi/dt = \omega_{\text{рез}} - \omega_{\text{внеш}} + \frac{1}{2}\omega_{\text{внеш}} (V_{\text{внеш}}/E) \sin \Phi. \quad (7.20.5b)$$

Если амплитуда  $V_{\text{внеш}}$  достаточно мала, то в уравнении (7.20.5a) членом, пропорциональным  $V_{\text{внеш}}$ , можно пренебречь, положив при этом в уравнении (7.20.5b)  $E = (A_0/A_3)^{1/2}$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем [55]

$$\Phi(t) = 2 \arctg \{1/K - [(K^2 - 1)^{1/2}/K] \text{tg} [\frac{1}{2}L(t - t_0)(K^2 - 1)^{1/2}]\}; \quad (7.20.6)$$

здесь  $L = \omega_{\text{внеш}} V_{\text{внеш}} / (2E)$  — коэффициент синхронизации,  $K = (\omega_{\text{рез}} - \omega_{\text{внеш}}) / L$  — параметр расстройки, нормированный на  $L$ , а  $t_0$  — постоянная интегрирования. Сразу заметим, что при  $|K| > 1$  производная  $d\Phi/dt$  никогда не становится равной нулю, поэтому генерация никогда не достигает стационарного режима. Мгновенная частота генерации  $\omega(t)$  является периодической функцией времени  $t$ , а именно

$$\omega(t) = \omega_{\text{внеш}} + d\Phi/dt = \omega_{\text{рез}} + L \sin \Phi(t). \quad (7.20.7)$$

Напротив, в случае  $|K| < 1$  функция  $\text{tg}(\ )$  в выражении (7.20.6) преобразуется в  $\text{th}(\ )$  и функция  $\Phi(t)$  асимптотически стремится к величине  $\Phi_{\infty}$ , связанной с  $K$  простым соотношением:

$$\Phi_{\infty} = \arcsin K. \quad (7.20.8)$$

Кроме того, мгновенная частота  $\omega(t)$  асимптотически стремится к частоте внешнего сигнала со скоростью, определяемой произведением  $L(1 - K^2)^{1/2}$ .

В заключение заметим, что частота лазера может быть синхронизована с частотой внешнего источника, только если коэффициент синхронизации  $L$  больше, чем расстройка  $|\omega_{\text{рез}} - \omega_{\text{внеш}}|$  между частотой  $\omega_{\text{внеш}}$  внешнего сигнала и частотой лазерной моды  $\omega_{\text{рез}}$ . Это условие дает нижний порог для минимальной мощности инжектируемого сигнала, когда еще можно наблюдать устойчивую синхронизацию частоты.

## 7.21. ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ ФАБРИ — ПЕРО

В 1897 г. С. Фабри и А. Перо [10] впервые использовали плоскопараллельный оптический резонатор в качестве интерферометра. С тех пор эти резонаторы интенсивно применяются для спектрального анализа сверхтонкой структуры и в точных метрологических измерениях [56, 57]. Изобретение лазера привело к бурному росту теоретических и экспериментальных работ по изучению свойств и применений резонаторов. Можно встретить резонаторы, имеющие зеркала с произвольными фокусными расстояниями и зазором между ними от нескольких миллиметров до нескольких метров. В многочисленных разделах данной главы мы представили результаты этих работ. Однако в этом разделе мы обсудим главные особенности плоскопараллельных резонаторов, поскольку они находят широкое применение именно как интерферометры.

Во многих случаях интерферометры Фабри — Перо имеют очень большие числа Френеля и дифракционными эффектами в них можно пренебречь. Поэтому, в принципе для их изучения хотя и следовало бы применить анализ мод, обычно предпочитают более простое рассмотрение. Кроме того, дифракционный анализ излучения, прошедшего через интерферометр, должен включать в себя решение неоднородных интегральных уравнений Фокса — Ли, в которые входит функция источника, создаваемая падающим пучком, так что задача оказывается очень сложной.

В простейшем виде интерферометр Фабри — Перо состоит из двух параллельных оптических поверхностей, между которыми возникает множество отражений. Интерферометры могут состоять из пары полупрозрачных зеркал, разнесенных на малое расстояние  $d$ , при этом зеркальные поверхности должны быть обращены друг к другу и быть параллельными с весьма хорошей точностью (рис. 7.43, *a*). Обратные поверхности зеркал обычно делаются наклонными (типичные значения угла наклона  $10$ — $30'$ ) по отношению к рабочим поверхностям. Это делается для того, чтобы избежать интерференции между лучами, отраженными от этих поверхностей, и теми, которые испытывают многократное отражение. Эти вторичные отражения не могут быть устранены простым нанесением просветляющего покрытия, поскольку даже лучшие просветляющие покрытия имеют отражательную способность  $0,1$ — $0,2\%$ .

Устройства с фиксированным расстоянием между зеркалами называются *эталоны*. В этих приборах можно регулировать пропускание, изменяя угол падения луча. Эталон можно также изготовить, напылив многослойные диэлектрические пленки, выполняющие роль



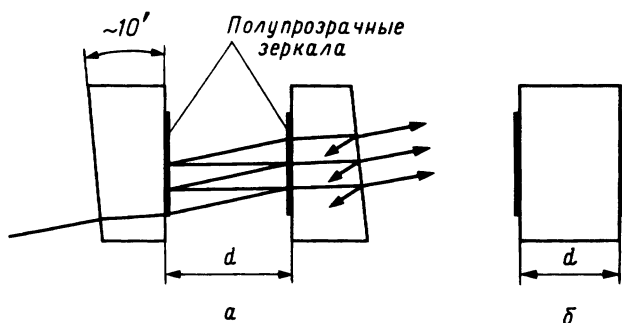


Рис. 7.43. Схематическое представление двух конструкций интерферометров Фабри—Перо. *а* — два полупрозрачных зеркала разнесены друг от друга на расстояние  $d$  и выставлены строго параллельно друг другу; *б* — твердотельный эталон.

зеркал, на противоположные грани пластинки из кварца или других каких-либо оптических материалов, прозрачных в рабочем диапазоне интерферометра (рис. 7.43, *б*). Качество таких *твердотельных эталонов* исключительно сильно зависит от степени параллельности противоположных граней (обычно требуется, чтобы она была лучше чем  $0,2'$ ), а также от того, насколько сильно показатель преломления  $n$  и толщина  $d$  зависят от температуры. Последние два параметра обычно стабилизируют, помещая интерферометр в термостат, в котором температура поддерживается с высокой степенью точности (обычно  $\pm 0,01$  °C).

#### 7.21.1. Коэффициент пропускания идеального интерферометра Фабри — Перо

Популярность интерферометра Фабри — Перо объясняется тем, что его пропускание  $T(\lambda_0, \theta)$  периодически изменяется с частотой и представляет собой серию пиков одинаковой амплитуды и очень малой ширины. В частности, для идеального бесконечно протяженного интерферометра Фабри — Перо, освещаемого плоской волной, пропускание  $T(\lambda_0, \theta)$  определяется функцией Эйри (см. разд. 3.12.1):

$$\begin{aligned}
 T(\lambda_0, \theta) &= \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + [4R/(1-R)^2 \sin^2(k_0 nd \cos \theta')] } \equiv \\
 &\equiv \frac{T^2}{(1-R)^2} A(F_R, k_0 nd \cos \theta'), \quad (7.21.1)
 \end{aligned}$$

где  $R = (R_1 R_2)^{1/2}$ ,  $T = (T_1 T_2)^{1/2}$  а  $A$  — функция пропускания Эйри (рис. 7.44), выраженная через резкость  $F_R$ , которая определяется выражением (7.21.6). Здесь  $T_{1,2}$  — коэффициенты пропускания, а

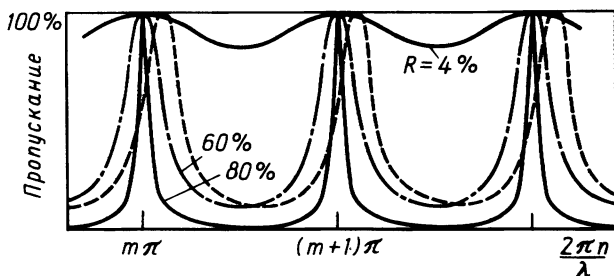


Рис. 7.44. Зависимость функции Эйри от величины  $2\pi/\lambda$  при различных коэффициентах отражения  $R$  интерферометра Фабри — Перо. С увеличением  $R$  (выраженного в процентах) максимумы пропускания сужаются. Штриховые кривые представляют пропускание наклонного эталона.

$R_{1,2}$  — коэффициенты отражения двух отражающих поверхностей, в то время как  $n$  и  $d$  — соответственно показатель преломления и толщина среды, заполняющей пространство между зеркалами. Угол падения  $\theta$  внешней плоской волны связан с углом падения двух плоских волн  $\theta'$  внутри резонатора законом Снеллиуса:  $\sin \theta = n \sin \theta'$ . Во многих случаях  $\theta$  и  $\theta'$  столь малы, что можно положить  $\theta' = \theta/n$ . Коэффициенты пропускания  $T_{1,2}$  и отражения связаны друг с другом соотношением

$$T_{1,2} + R_{1,2} + A_{1,2} = 1, \quad (7.21.2)$$

где  $A_{1,2}$  представляет суммарные потери, связанные с поглощением излучения в покрытии торцов интерферометра и рассеянием излучения на шероховатостях поверхности ( $A = A_{\text{погл}} + A_{\text{расс}}$ ). Потери, связанные с рассеянием, определяются приближенно выражением  $A_{\text{расс}} = 2(k_0 n \sigma_w)^2$ , где  $\sigma_w$  — стандартное отклонение отражающей поверхности от идеальной плоскости.

В соответствии с формулой Эйри кривая пропускания интерферометра Фабри — Перо состоит из серии эквидистантных по частоте (или волновому числу  $\lambda^{-1}$ ) пиков. При нормальном падении ( $\theta' = 0$ ) минимальному ослаблению подвергается излучение с длиной волны  $\lambda_m = 2nd/m$ , где  $m$  — целое число, называемое *порядком интерференции*. При наклонном падении длина волны, на которой имеет место максимальное пропускание, становится равной  $\lambda_m = 2nd \cos \theta' / m$ . При достаточно малых  $\theta'$  положение пика, соответствующего частоте  $\nu_m = c/\lambda_m$ , смещается относительно его положения при  $\nu_{m,0} = 0$  на величину  $\delta\nu_m$ , которая зависит от  $\theta'$  квадратичным образом:

$$\delta\nu_m = \nu_{m,0} \theta'^2 / 2. \quad (7.21.3)$$

Твердотельные эталоны нуждаются в тепловой стабильности, поскольку как показатель преломления  $n$ , так и расстояние  $d$  зависят от температуры. Действительно, при изменении температуры  $T$  на  $\delta T$

частота  $\nu_m$ , соответствующая максимуму пропускания эталона, сдвигается на

$$\delta\nu_m = -\nu_m[(1/n)(dn/dT) + (1/d)(d(d)/dT)] \delta T \equiv -\eta \delta T. \quad (7.21.4)$$

Температурный линейный коэффициент расширения  $\eta$  материала эталона составляет величину порядка  $(2 - 10) \cdot 10^{-6}$  [58]. Поэтому, чтобы гарантировать минимальный сдвиг частоты  $\delta\nu_m = \pm 20$  МГц для эталона, работающего на длине волны 500 нм, изменение его температуры не должно превышать  $\pm 0,01$  °С. Этого добиваются, помещая эталон в небольшую камеру с хорошо стабилизированной температурой.

Коэффициент пропускания эталона изменяется от  $T_{\text{макс}}$  до  $T_{\text{мин}}$ . Отношение  $C = T_{\text{макс}}/T_{\text{мин}}$ , называемое *контрастом* интерферометра, дается выражением

$$C = \left\{ \frac{[1 + (R_1 R_2)^{1/2}]}{[1 - (R_1 R_2)^{1/2}]} \right\}^2. \quad (7.21.5)$$

Интерферометры, используемые для спектроскопических исследований, характеризуются высокими значениями контраста  $C$ , в то время как эталоны, применяемые в лазерных резонаторах, обычно имеют умеренные значения  $C$ .

Если контраст достаточно высок, то эталон можно характеризовать резкостью  $F$ , которая определяется как отношение величины области свободной дисперсии эталона  $\nu_0 = c \cos \theta' / (2nd)$  к полной ширине пика пропускания по полувысоте. В случае когда пропускание эталона описывается функцией Эйри, резкость  $F$  определяется выражением

$$F_R = \pi(R_1 R_2)^{1/4} / [1 - (R_1 R_2)^{1/2}], \quad (7.21.6)$$

где нижний индекс  $R$  (при  $F$ ) служит напоминанием того, что  $F_R$  зависит от коэффициентов отражения зеркал.

Ниже мы представим более сложное выражение для  $F$ , в котором учитывается влияние ограниченности апертуры светового пучка и абберации зеркал. Поэтому через  $F_R$  мы будем обозначать величину резкости, зависящей только от коэффициента отражения зеркал, и называть ее *отражательной резкостью*.

Резкость интерферометра есть его способность разрешать близко расположенные линии в спектре падающей плоской волны. Величина резкости пропорциональна времени жизни фотона в интерферометре, поэтому ее можно определить как эффективное число пучков, с помощью которых создается интерференционная картина в интерферометре.

### 7.21.2. Применение интерферометра Фабри — Перо

Интерферометр Фабри — Перо обычно используют [59] в условиях, когда его входная грань освещается коллимированным пучком и ис-

следует прошедший луч в фокальной плоскости линзы, помещенной со стороны выхода.

Первоначально интерферометр Фабри — Перо использовался как спектрограф, в котором в фокальную плоскость выходной линзы помещали фотопластинку. Если источник монохроматического излучения имеет конечные размеры, то излучение, падающее на эталон, может быть представлено суперпозицией плоских волн с волновыми векторами, заполняющими некоторый телесный угол. Следовательно, через эталон проходят только те компоненты излучения, углы падения  $\theta_m$  которых принадлежат ряду дискретных значений, таких, что

$$k_0 n d \cos \theta_m = m\pi. \quad (7.21.7)$$

В случае когда на интерферометр нормально его поверхности падает плоская монохроматическая волна, картина поля за ним представляет собой совокупность концентрических узких колец, центр которых расположен на бесконечности. Угловые диаметры  $j$ -го и  $k$ -го колец связаны соотношением  $2(\cos \theta_j - \cos \theta_k) = (k - j)\lambda_0 / (dn) \cong \theta_k^2 - \theta_j^2$ . Угловую ширину кольца можно измерить по точкам, соответствующим половине максимальной интенсивности,  $\theta_{1/2} = \lambda_0 / (F2 nd \theta)$ . Таким образом, данное кольцо наблюдается под телесным углом

$$\Omega = 2\pi\theta_{1/2} = \pi\lambda_0 / (Fdn) = 2\pi/\mathcal{R}, \quad (7.21.8)$$

где  $\mathcal{R} = \lambda / \lambda_{1/2} = 2Fd / \lambda_0$  — теоретическое разрешение интерферометра. В соответствии с выражением для  $\mathcal{R}$  разрешение интерферометра Фабри — Перо можно варьировать в широких пределах, изменяя расстояние  $d$ , и в менее узких пределах, изменяя отражательную резкость.

Кольца, наблюдаемые в фокальной плоскости выходной линзы, представляют собой совокупность тонких круговых полос равного наклона и называются *кольцами Хайдингера* по имени австрийского физика Вильгельма Карла Хайдингера (1795 — 1871). Радиусы  $\rho_m$  этих колец даются выражением

$$\rho_m = f\theta_m = 2^{1/2}f[1 - m\lambda_0 / (2d)]^{1/2}, \quad (7.21.9)$$

где  $f$  — фокусное расстояние выходной линзы.

Если источник излучает в узком спектральном диапазоне, то каждая линия спектра определяет свою картину полос. Обработывая на микроденситометре фотографию полученной интерференционной картины, можно с соответствующим разрешением получить спектр источника. Этот метод широко применяется для изучения сверхтонкой структуры атомов, откуда в свою очередь можно получить информацию о структуре атомного ядра. Современные интерферометры Фабри — Перо используются при изучении комбинационного,

мандельштам-бриллюэновского и рэлеевского рассеяния в газах, жидкостях и твердых телах.

В 1948 г. Жакино и Дюфур предложили спектрометр Фабри — Перо, в котором фотопластинка была заменена фотоэлементом (который в настоящее время представлял бы собой ФЭУ или фотодиод), расположенным за системой точечных отверстий в плоскости, совмещенной с фокальной плоскостью выходной линзы. Этот метод называется *сканированием центрального пятна*. Изменяя линейно во времени давление газа внутри интерферометра или смещая зеркала, поддерживаемые пьезоэлектрическими прокладками, с фотодетектора мы получим сигнал, который будет пропорционален спектральной яркости источника излучения на той частоте, на которую в данный момент настроен интерферометр. Например, если интерферометр поместить в камеру высокого давления, содержащую газ  $SF_6$  (показатель преломления газообразного  $SF_6$  при нормальных условиях равен примерно 1,00078), то можно достичь [60] скорости сканирования  $3,9 \text{ \AA}/\text{атм}$ . Если при сканировании давлением область свободной дисперсии не зависит от расстояния  $d$ , то при механическом сканировании эта область увеличивается с уменьшением  $d$ . Чтобы просканировать всю область дисперсии, величину  $d$  необходимо изменить на  $\lambda/2$ .

Спектроскопические приборы характеризуются *пропусканием*  $U$  (см. разд. 2.15 и 4.15), определяемым как произведение площади  $S$  на телесный угол  $\Omega$  сбора излучения. Систематическое исследование пропускания различных приборов впервые выполнил Жакино [56]. Для интерферометра Фабри — Перо с учетом выражения (7.21.8) можно записать

$$U = S\Omega = \pi\lambda_0 S / (Fd) = 2\pi S / \mathcal{R}. \quad (7.21.10)$$

Пропускание  $U$ , которое также называется *светособирающей способностью* или *светосилой*, представляет собой способность интерферометра собирать максимум излучения от источника, разлагать его в спектр и затем детектировать.

Если через  $L$  (светимость) обозначить отношение спектральной плотности потока  $\Phi(k_0)$  (измеряется в эрг·см/с) излучения, попадающего на фотодетектор, к спектральной яркости  $B(k_0)$  (измеряется в эрг/см·ср·с) протяженного источника, то можно записать следующее выражение:

$$L = \Phi/B = \tau U = \tau 2\pi S / \mathcal{R}, \quad (7.21.11)$$

где  $\tau$  — максимальный коэффициент пропускания интерферометра.

Следует заметить, что для данного эталона произведение светимости на разрешающую силу является постоянным и определяется только площадью эталона  $S$  и коэффициентом пропускания  $\tau$ . Жакино показал, что у интерферометров Фабри — Перо произведение  $L\mathcal{R}$  в

70—350 раз превышает аналогичное произведение у спектрометров с дифракционными решетками. Это объясняется тем, что интерферометр Фабри — Перо собирает свет с гораздо большего телесного угла, чем спектрометр с дифракционной решеткой. Более полную информацию о методах записи и сканирования спектра читатель может найти в монографии Кука [59].

### 7.21.3 Составные интерферометры Фабри — Перо

В некоторых случаях необходимо иметь высокое разрешение в относительно широком спектральном диапазоне. В частности, при изучении сверхтонкой структуры расстояние между отдельными ее компонентами может во много раз превышать ширину отдельной компоненты. Поэтому, чтобы получить однозначную информацию о таком спектре, необходимо расширить область свободной дисперсии эталона. Этого обычно достигают, помещая последовательно [60] с основным эталоном дополнительный эталон, имеющий более короткую длину  $d'$ . В общем случае области низкого пропускания короткого эталона совпадают с максимумами пропускания длинного. Подбирая длину  $d'$ , пики короткого эталона можно совместить с любым  $q$ -м максимумом длинного. Таким образом у более длинного эталона все максимумы, за исключением  $q$ -го, подавляются, а разрешение остается прежним.

Этот принцип может быть распространен и на большее число соединенных последовательно интерферометров. Например, для спектроскопических исследований атмосферы планет, спектров межзвездного газа и Солнца применяется спектрометр PEPSIOS [61], который состоит из трех интерферометров и интерференционного фильтра.

### 7.21.4. Аппаратная функция интерферометра

В случае когда источники создают излучение в узком спектре с практически нулевой шириной, с помощью интерферометра мы наблюдаем спектральный профиль, который называется *аппаратной функцией*  $W(k_0)$ . Вид функции  $W$  зависит от характеристик спектрометра и входного светового пучка. В идеальном случае функция  $W$  совпадает с функцией Эйри. На практике из-за того, что нельзя достичь идеальной плоскостности, зеркала интерферометра будут иметь некоторые нерегулярности, которые вызовут уширение полос и уменьшение их максимумов. Дополнительное ограничение состоит в том, что падающее на приемную площадку фотодиода излучение составлено из тех плоских

волн, направления распространения которых лежат внутри телесного угла  $\Omega$  с углом полураствора  $\alpha = a/f$ , где  $a$  — радиус отверстия в фокальной плоскости выходной линзы с фокусным расстоянием  $f$ .

Отклонение функции  $W$  от функции Эйри вследствие указанных выше причин впервые исследовал Чейболл [62]. В частности, неплоскостность зеркал можно учесть, если рассматривать интерферометр в виде мозаики микроэталонов. Распределение длин  $d$  можно представить в виде функции распределения  $D(x - \bar{d}) = dS/dx$ , где  $dS$  — элемент площади, на котором толщина эталона имеет величину, лежащую в интервале от  $x$  до  $x + dx$ , и  $\bar{d}$  — средняя толщина эталона. Например, если зеркала обладают кривизной, близкой к сферической, то функция  $D(x - \bar{d})$  описывает прямоугольник. Если же зеркала имеют случайные дефекты, то функция распределения является гауссовой. Очевидно, что  $D$  представляет собой весовую функцию для толщин  $d$  в функции Эйри. Следовательно,  $W(k_0)$  можно записать в виде свертки, а именно:

$$W(k_0) = \tau \int_{x_{\text{мин}}}^{x_{\text{макс}}} D(x - \bar{d}) A(F, k_0 n x \cos \theta') dx = D * A. \quad (7.21.16)$$

Учитывая конечный угловой размер  $\alpha = a/f$  точечного отверстия, помещенного перед фотодетектором, выражение для  $W$  можно переписать в виде

$$W(k_0) = \tau \int_0^\alpha d(\theta^2) \int_{x_{\text{мин}}}^{x_{\text{макс}}} D(x - \bar{d}) A[F, k_0 n x \cos(\theta/n)] dx, \quad (7.21.17)$$

где мы положили  $\theta' = \theta/n$ . Последний интеграл можно найти либо численными методами, либо с помощью разложения функции  $A$  в ряды Фурье (см. задачу 25 и монографию Кука [59]). Наконец, мы должны учесть конечный диаметр пучка, падающего на интерферометр.

Простой способ учета всех перечисленных выше эффектов состоит в предположении о том, что функция  $W$  пропорциональна функции Эйри, соответствующей *аппаратной резкости*  $F_1$ , причем последняя определяется выражением

$$1/F_1^2 = 1/F_R^2 + 1/F_F^2 + 1/F_P^2 + 1/F_D^2, \quad (7.21.18)$$

где  $F_F = M/2$  — *резкость, определяемая точностью изготовления и юстировки*, ( $M$  — приведенная к длине волны величина отклонения поверхности зеркала от плоскости),  $F_P = \lambda_0 f^2 / (a^2 d)$  — *резкость, определяемая размером точечного отверстия*;  $F_D = 2D^2 / (\lambda_0 n d)$  — *дифракционная резкость* ( $D$  — диаметр апертуры интерферометра). Заметим, что  $F_F$  учитывает также непараллельность зеркал. Лучшие зеркала изготавливаются с неплоскостностью  $\lambda/200$  на длине волны 500 нм, поэтому их аппаратная резкость не может быть больше чем 100.

Как было показано выше, аппаратная функция интерферометра

Фабри — Перо зависит от нескольких факторов. Однако при любых обстоятельствах она является идеально симметричной в противоположность асимметричной форме аппаратной функции спектрометров с дифракционной решеткой. Благодаря этой симметричности интерферометры Фабри — Перо удобно использовать для проведения точных измерений асимметрии линий, излучаемых астрономическими объектами, откуда можно получить данные о гидродинамических условиях на поверхности этих объектов.

Размер поверхности интерферометра ограничивается площадью, на которой плоскость может быть выдержана с точностью до  $\lambda/200$  (типичные углы 2—3"). Однако апертурный угол  $\Omega$ , т. е. телесный угол собираемого излучения, обратно пропорционален разрешающей способности  $\mathcal{R}$ . Это означает, что светосила интерферометров уменьшается с ростом  $\mathcal{R}$ . Чтобы преодолеть эту трудность, Конн [63] в 1958 г. предложил интерферометр, состоящий из двух сферических зеркал, расстояние между которыми равно радиусу их кривизны. Этот интерферометр имеет такую же аппаратную функцию, область свободной дисперсии и разрешающую силу, как и плоский интерферометр с удвоенным расстоянием между зеркалами. Однако у интерферометра Конна имеется важное свойство, а именно то, что в нем телесный угол собираемого излучения пропорционален величине  $\mathcal{R}$ . Благодаря этому свойству светосила интерферометра Конна может намного превышать светосилу плоского интерферометра. Данное обстоятельство становится особенно существенным при зазоре между зеркалами интерферометра, большим чем 0,1 м.

## ЗАДАЧИ

### Раздел 7.4

1. Покажите, что в эллиптических координатах  $\mu$  и  $\nu$ , определяемых выражениями  $x = b \operatorname{ch} \mu \sin \nu$ ,  $z = b \operatorname{sh} \mu \cos \nu$ , уравнение эйконала записывается в виде

$$|\nabla S|^2 = \{1/[b^2(\cosh^2 \mu - \sin^2 \nu)]\}[(\partial S/\partial \mu)^2 + (\partial S/\partial \nu)^2].$$

### Раздел 7.9

2. Рассмотрите резонатор, заполненный линзоподобной средой с показателем преломления, который с расстоянием  $\rho$  от оси  $z$  изменяется как  $n(\rho) = n_0 - (1/2)n_2 \rho^2$  на длине от  $z=0$  до  $z=d$ . Ось резонатора совпадает с осью  $z$ . Найдите параметры основной гауссовой моды, полагая показатель преломления среды вне резонатора равным единице. *Подсказка.* Используйте метод матрицы  $ABCD$ . Чтобы вычислить матрицу резонатора, рассмотрите сначала тонкий слой между  $z$  и  $z+dz$ , когда матрица  $\mathbf{S}(z, z+dz)$  сводится к матрице тонкой линзы с фокусным расстоянием  $f = n_0/(n_2 dz)$ . Таким образом, можно записать следующее уравнение:

$$\mathbf{S}(z, z + dz) = \mathbf{1} - (n_2/n_0)\mathbf{A} dz,$$



причем

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Затем проинтегрируйте уравнение

$$\mathbf{S}(0, z + dz) - \mathbf{S}(0, z) = -(n_2/n_0)\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(0, z) dz.$$

С учетом  $A^2 = 0$  получаем

$$\mathbf{S}(0, z) = 1 - (n_2/n_0)z\mathbf{A}.$$

3. Рассмотрите лазер, генерирующий излучение в дальнем ИК-диапазоне, в котором активной средой является HCN-плазма, излучающая на длине волны 337 мкм. Предполагается, что профиль электронной плотности в положительной области столба описывается функцией  $J_0(2,4048\rho/a)$ , где  $a$  — радиус плазменной трубки и  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Из-за наличия электронного газа частотная зависимость показателя преломления описывается формулой  $(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ , где  $\omega_p = (e^2 n_e / m_e \epsilon_0)^{1/2} = 5,6 \cdot 10^{14} n_e^{1/2}$  рад/с — плазменная частота и  $n_e$  — число электронов в кубическом сантиметре. Вследствие изменения показателя преломления  $n$  с расстоянием от оси трубки плазменный столб представляет собой рассеивающую линзу, которая стремится расфокусировать излучение резонаторных мод. Полагая  $d = 3$  м, радиусы зеркал  $R = 10$  м и  $a = 5$  см, вычислите максимальную электронную плотность, при которой резонатор еще будет устойчивым. *Подсказка.* Используйте для линзообразной среды с параболическим профилем показателя преломления метод лучевых матриц, подобный тому, который был использован в предыдущей задаче (аппроксимируйте функцию Бесселя параболой) и примените условие устойчивости  $|A + D| < 2$ .

4. Выведите выражение для размера пятна и радиуса кривизны гауссова пучка, сфокусированного тонкой линзой в среду с показателем преломления  $n$ . Найдите положение и диаметр перетяжки пучка.

5. Вычислите поля гауссова пучка, дифрагированного на апертуре с пропусканием

$$T(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)/a^2]$$

Плоскость апертуры перпендикулярна направлению распространения гауссова пучка. Вычислите также с помощью закона  $ABCD$  соответствующую лучевую матрицу.

6. Имеется симметричный резонатор с гауссовым профилем коэффициента отражения зеркал. Найдите размер пятна и радиусы кривизны  $TEM_{00}$ -моды в непосредственной окрестности зеркал и вычислите поле излучения, выходящего из резонатора, а также интегральные потери на отражение. *Подсказка.* Рассмотрите резонатор как последовательность линз, в которой каждая линза имеет гауссов профиль пропускания. Заметьте, что интенсивность гауссовой моды, распространяющейся слева направо, не совпадает с интенсивностью моды, распространяющейся в противоположном направлении. (Подробное об этом см. в работе [64].)

### Раздел 7.10

7. Докажите условие ортогональности (7.10.2) для мод замкнутого резонатора с конечным импедансом стенок. *Подсказка.* Ознакомьтесь с работой ван Бладеля (см. работу [8, Ch.10], указанную в литературе к гл. 4 данной книги), а также используйте выражение (4.2.1).

### Раздел 7.11.

8. Вычислите диаметр входного отверстия в плоскопараллельном или конфокальном резонаторе, помещенном перед выходным зеркалом с целью получения генерации  $TEM_{00}$ -моды в  $CO_2$ -лазере. Считайте, что показатель усиления  $g = 0,04 \text{ см}^{-1}$  и дли-

на резонатора  $d = 1$  м. *Подсказка.* Используйте асимптотические выражения (7.11.8) и (7.11.9) для вычисления потерь в резонаторе.

9. Простой способ вывода излучения из резонатора ИК-лазера заключается в использовании кольцевого зеркала. Рассмотрите резонатор, состоящий из плоского и вогнутого зеркала. Предположите, что диаметр отверстия в зеркале меньше размеров пятна пучка на зеркале, так что картины мод возмущаются незначительно. Вычислите: а) коэффициенты потерь для  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{10}$  и  $TEM_{20}$  аксиально-симметричных мод и б) распределение интенсивности в дальнем поле для пучка, прошедшего через отверстие. В частности, рассмотрите случай, когда  $\lambda = 3$  мкм,  $d = 1$  м, а радиус кривизны вогнутого зеркала  $R = 20$  м. (Подробности можно найти в статье Мак-Камбера [65].)

10. Рассмотрите криптоновый лазер, имеющий выходную мощность 0,5 Вт и выходное полупрозрачное зеркало с пропусканием 2%. Вычислите среднее число фотонов в резонаторе, если резонатор состоит из плоского зеркала и полупрозрачного выходного зеркала с радиусом кривизны 6 м. Зеркала находятся друг от друга на расстоянии 0,75 м, длина волны генерации равна 415 нм. Сравните число фотонов в единице объема с плотностью частиц газа и предполагаемой плотностью числа плазменных электронов.

11. Рассмотрите резонатор, состоящий из плоского зеркала и полупрозрачного вогнутого зеркала с радиусом кривизны  $R = 15$  м. Вогнутое зеркало имеет плоскую внешнюю поверхность, поэтому действует как плосковогнутая линза с показателем преломления  $n = 1,5$  на длине волны  $\lambda = 500$  нм и толщиной  $d = 1$  см. Вычислите с учетом этих условий расходимость выходного пучка в дальнем поле.

12. Рассчитайте конструкцию из собирающей и рассеивающей линз, которая позволяет сфокусировать гауссов пучок с известными параметрами в данную точку с заданными параметрами перетяжки. Рассмотрите пучок, у которого размер пятна равен 1,5 мм, а расходимость в дальнем поле составляет 0,7 мрад. Считайте при этом, что длина волны излучения равна 500 нм.

13. Оптический резонатор аргонового лазера ( $\lambda = 5145 \text{ \AA}$ ) состоит из двух зеркал с коэффициентами отражения 99,8 и 87,8%, разнесенных на расстояние 60 см. Вычислите спектральную ширину резонансных мод пассивного резонатора и теоретическую ширину линии генерации лазера, определяемую выражением (7.1.14), при условии, что выходная мощность лазера в одномодовом режиме составляет 0,5 Вт. Затем, воспользовавшись выражением (7.11.5), оцените изменение длины резонатора, которое привело бы к сдвигу частоты генерации на величину, равную теоретической ширине лазерной линии. (См. книгу Корни [48, с. 375].)

14. Вычислите дифракционные потери излучения для аксиально-симметричных мод  $TEM_{00}$  и  $TEM_{01}$ , если в симметричный резонатор вблизи одного из зеркал ввести диафрагму, диаметр которой в 3,5 раза превышает размер перетяжки гауссова пучка в резонаторе. (См. книгу Корна [48, с. 375].)

#### Раздел 7.14

15. Покажите, что на каждом зеркале линейного резонатора две лаггер-гауссовы моды удовлетворяют условию ортогональности (7.14.13).

#### Раздел 7.16

16. Покажите, что при  $\bar{\tau} = \infty$  решением уравнения (7.16.4) является эрмит-гауссова мода. Вычислите собственное значение  $\gamma$ .

17. Вычислите для резонатора с зеркалами в виде бесконечных полос комплексный параметр  $p$ . Для этого моду резонатора можно записать в виде

$$f(t) = \cos s_0 t + A \cos s_1 t_1 + B \cos s_{-1} t.$$

18. Используя выражения (7.16.19) и (7.16.20) для коэффициентов отражения и преобразования мод на открытых концах резонатора, найдите числа Френеля резонатора, у которого амплитудами  $A$  и  $B$  в формуле из предыдущей задачи можно пренебречь.

### Раздел 7.17

19. Покажите, что при  $a = \infty$  уравнению (7.17.4) удовлетворяют лагерр-гауссовы моды.

### Раздел 7.19

20. Покажите, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}.$$

Используя это соотношение, выведите дисперсионное уравнение (7.19.8).

21. Покажите, что если инверсия населенностей  $\Delta N$  постоянна по сечению основной моды лазерного резонатора, то усиление лазерного резонатора  $g(z, E^{(+)}, E^{(-)})$ , определяемое выражением (7.19.25), запишется в виде

$$g(z, E^{(+)}, E^{(-)}) = k_0^2 f \operatorname{Re} \{ [1/[k_n(1 + i\zeta)]] \Delta N(z) [\ln(1 + W)] / W,$$

где

$$W = \mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)} + 2[\mathcal{J}^{(+)}\mathcal{J}^{(-)}]^{1/2} \cos(2k_n'z + \phi),$$

$$\mathcal{J}^{(\pm)} = |E^{(\pm)}|^2 |u_{00}^{(\pm)}(0, 0, z)|^2 / E_s^2.$$

22. Используя формулы, приведенные в предыдущей задаче, покажите, что

$$\frac{2}{\lambda} \int_z^{z+\lambda/2} \frac{\ln(1 + W)}{W} dz = 1 - \frac{1}{2}[\mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}] + \frac{1}{3}[\mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}]^2 + \\ + \frac{2}{3}\mathcal{J}^{(+)}\mathcal{J}^{(-)} + O[\mathcal{J}^{(+)^3}, \mathcal{J}^{(-)^3}],$$

где

$$\mathcal{J}^{(\pm)} = |E^{(\pm)}|^2 |u_{00}^{(\pm)}(0, 0, z)|^2 / E_s^2.$$

23. Используя выражения, приведенные в предыдущих двух задачах, покажите, что для гауссовой моды малой интенсивности уравнение Ригрода (7.19.31) можно заменить следующим уравнением:

$$d\mathcal{J}^{(\pm)}/dz = \pm g_0(z) \left\{ 1 - \frac{1}{2}[\mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}] + \frac{1}{3}[\mathcal{J}^{(+)} + \mathcal{J}^{(-)}]^2 + \frac{2}{3}\mathcal{J}^{(+)}\mathcal{J}^{(-)} \right\}.$$

Затем, используя равенство  $\mathcal{J}^{(+)}\mathcal{J}^{(-)} = \text{const}$ , запишите  $\mathcal{J}^{(+)}$  в виде функции координаты  $z$  при  $g_0(z) = \text{const}$ .

### Раздел 7.20

24. Рассмотрите твердотельный эталон, который наклонен на угол  $\theta$  относительно падающего гауссова пучка. Вычислите интенсивность прошедшего пучка. В частности, обсудите уменьшение максимума пропускания эталона при больших значениях  $\theta$ . Это явление уменьшения интенсивности обусловлено частичной суперпозицией многократно отраженных пучков, происходящей при  $\theta \neq 0$ , и является источником потерь *при выводе из резонатора*.

25. Покажите, что формулу Эйри для пропускания эталона можно записать в виде ряда Фурье:

$$\frac{1}{1 + [4R/(1 - R)^2] \sin^2 \phi} = \frac{1 - R}{1 + R} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos(2n\phi) \right].$$

*Подсказка.* Запишите  $2 \cos(2n\phi)$  в виде  $e^{i2n\phi} + e^{-i2n\phi}$  и покажите, что правая часть приведенного здесь выражения представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна левой части этого выражения.

26. Покажите, что если вектор разности оптических длин  $D_1$  одного из двух интерферометров Фабри — Перо почти параллелен вектору  $D_2$  другого интерферометра, то полосы суперпозиции в белом свете представляют собой гиперболы. (См. книгу Кука [59, с. 132].)

27. Рассмотрите эталон, на который под прямым углом падает гауссов пучок. Найдите форму изображения, возникающего в фокальной плоскости выходной линзы интерферометра. В частности, проверьте соотношение между диаметром перетяжки гауссова пучка, расстоянием между зеркалами эталона и числом наблюдаемых колец.

28. Определите основные параметры стеклянного эталона ( $n = 1,5$ ), который используется для выделения одночастотного излучения с длиной волны  $4880 \text{ \AA}$  на выходе ионного аргонового лазера. Считайте, что в этом случае ширина кривой усиления порядка  $6 \text{ ГГц}$ , а однородная ширина линии достигает почти  $500 \text{ МГц}$ . (См. работу Хершера [66].)

29. Имеется импульсный лазер на красителе, в котором для настройки используется дифракционная решетка. Рассчитайте параметры твердотельного эталона Фабри — Перо, который сужает линию лазера до  $100 \text{ МГц}$ . Ширина полосы генерации без эталона равна  $2 \text{ ГГц}$ . Вычислите угол, на который следует повернуть эталон, чтобы просканировать интервал  $2 \text{ ГГц}$ .

30. Покажите, что характеристическая матрица  $\mathbf{M}$  (см. гл. 3) эталона, представляющего собой плоскопараллельную пластину, на которую с противоположных сторон напылены одинаковые многослойные диэлектрические покрытия, дается выражением

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (AD + BC) \cos \phi - i \left( AC \hat{Z} + \frac{BD}{\hat{Z}} \right) \sin \phi & 2AB \cos \phi - i \left( A^2 \hat{Z} + \frac{B^2}{\hat{Z}} \right) \sin \phi \\ 2CD \cos \phi - i \left( C^2 \hat{Z} + \frac{D^2}{\hat{Z}} \right) \sin \phi & (BC + AD) \cos \phi - i \left( AC \hat{Z} + \frac{BD}{\hat{Z}} \right) \sin \phi \end{bmatrix},$$

где  $\phi = k_0 n d \cos \theta'$ ,  $\hat{Z} = (\zeta_0/n) \cos \theta' (1/\cos \theta')$  для ТМ (ТЕ)-волн, а  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — соответствующие компоненты характеристической матрицы многослойного диэлектрического покрытия.

31. Покажите, что амплитудный коэффициент пропускания выходной пластины эталона, рассмотренного в задаче 30, дается выражением

$$t = \left\{ [AD + BC + AB/\hat{Z}_{\text{внеш}} + CD\hat{Z}_{\text{внеш}}] \cos \phi - i [AC\hat{Z} + (BD/\hat{Z}) + (A^2\hat{Z})/(2\hat{Z}_{\text{внеш}}) + B^2/(2\hat{Z}\hat{Z}_{\text{внеш}}) + (1/2)C^2\hat{Z}\hat{Z}_{\text{внеш}} + (1/2)(D^2\hat{Z}_{\text{внеш}}/\hat{Z})] \sin \phi \right\}^{-1},$$

где  $\hat{Z}_{\text{внеш}}$  — импеданс среды на левой и правой сторонах обеих пластин эталона. *Подсказка.* Покажите, что  $t = (1+r)/(A+B/Z_{\text{внеш}})$ , где  $r$  — коэффициент отражения от входной пластины, а  $A$  и  $B$  — коэффициенты вышеупомянутой матрицы. Используйте также соотношение (3.12.6).

32. Используйте приведенное в задаче 31 выражение для  $t$  и вычислите коэффициент пропускания интерферометра Фабри — Перо с зеркалами, имеющими алюминиевое и серебряное покрытия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Liao S. Y.*, Microwave Devices and Circuits, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
2. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.
3. *Ананьев Ю. А.* Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. — М.: Наука, 1979.
4. *Ronchi L.* In: Laser Handbook, v. 1 (eds. F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois), North-Holland Publ., Amsterdam, 1972, p. 153.
5. *Chodzko R. A., Chester A. N.* — In: Handbook of Chemical Lasers (eds. R. W. G. Gross, J. F. Bott), Wiley, New York, 1976, p. 95—203. [Имеется перевод в кн.: Химические лазеры / Под ред. Р. Гросса, Дж. Ботта. — М.: Мир, 1980.]
6. *Steier W. H.* In: Laser Handbook, v. 3 (ed. M.L. Stith), North-Holland Publ., Amsterdam, 1979, p. 5.
7. *Courant R., Hilbert D.*, Methods of Mathematical Physics, v. 1, Theorem 18, Wiley (Interscience), New York, 1953, p. 442. [Имеется перевод: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Мир, 1964.]
8. *Schawlow A. L., Townes C. H.*, Phys. Rev., **112**, 1940 (1958).
9. *Прохоров А. М.* — ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 6.
10. *Fabry C., Perot A.*, Ann. Chim. Phys., **16**, 115 (1899).
11. *Macek W. M., Davis D. T. M.*, Appl. Phys. Lett., **2**, 67 (1963).
12. *Ambartsumyan R. V., Basov N. G., Kryukov B. G., Letokhov V. S.*, Prog. Quantum Electron., **1**, Part 3 (1970).
13. *Kogelnik H., Shank C. V.*, Appl. Phys. Lett., **18**, 152 (1971).
- 13a. *Renssch D. B., Chester A. N.*, Appl. Opt., **12**, 997 (1973).
- 13b. *Bloom A. L.*, Spectra Phys. Laser Tech. Bull., No. 2, Mountain View, California, 1963.
14. *Goubau G., Schwering F.*, IRE Trans. Antennas Propag., **AP-9**, 248 (1961).
15. *Boyd G. D., Kogelnik H.*, Bell Syst. Tech. J., **41**, 1347 (1962).
16. *Kogelnik H., Rigrod W. W.*, Proc. IRE, **50**, 220 (1962).
17. *Herriott D. R.*, J. Opt. Soc. Am., **52**, 31 (1962).
18. *Bennett W. R., Jr.*, The Physics of Gas Lasers, Gordon and Breach, New York, 1977.
19. *Slepian D.*, Bell Syst. Tech. J., **43**, 3009 (1964).
20. *Solimeno S., Torre A.*, Phys. Res., **A237**, 298 (1985).
21. *Siegman A.*, Proc. IEEE, **53**, 277 (1965). [Имеется перевод: *Сигмэн А.* — ТИИЭР, 1965, т. 53, № 3, с. 318.]
22. *Siegman A., Arrathon R. W.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-3**, 156 (1967).
23. *Krupke W. F., Sooy W. R.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-5**, 575 (1969).
24. *Нефедов Е. И.* Открытые коаксиальные резонансные структуры. — М.: Наука, 1982.
25. *Patel C. K. N.*, Appl. Phys. Lett., **7**, 15 (1965).
26. *Tricomi F.* Integral Equations, Wiley (Interscience), New York, 1957. [Имеется перевод: *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — М.: ИЛ, 1960.]
27. *Fox A. G., Li T.*, Bell Syst. Tech. J., **40**, 453 (1960).
28. *Gordon E. I., White A. D.*, Proc. IEEE, **52**, 206 (1964). [Имеется перевод: *Гордон, Уайт.* — ТИИЭР, 1964, т. 52, № 2, с. 218.]
29. *Gordon J. P., Kogelnik H.*, Bell Syst. Tech. J., **43**, 2873 (1964).

30. *Wilkinson J. H.*, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1965. [Имеется перевод: Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.]
31. *Li T.*, Bell Syst. Tech. J., **44**, 917 (1965).
32. *Checcacci P. F., Consortini A., Scheggi A.*, Proc. IEEE, **54**, 1329 (1966). [Имеется перевод: Чекаччи, Консортини. — ТИИЭР; 1966, т. 54, № 10, с. 113.]
33. *Johnson M. M.*, Appl. Opt., **13**, 2326 (1974).
34. *Siegman A. E.*, Opt. Lett., **1**, 13 (1977).
35. *Streifer W.*, J. Opt. Soc. Am., **55**, 868 (1965).
36. *Bergstein L., Marom E.*, J. Opt. Soc. Am., **56**, 16 (1966).
37. *Siegman A. E., Miller H. Y.*, Appl. Opt., **9**, 2729 (1970).
38. *Slepian D., Pollack H. O.*, Bell Syst. Tech. J., **40**, 43 (1960).
39. *Landau N. J., Pollack H. O.*, Bell Syst. Tech. J., **40**, 65 (1960); **42**, 1295 (1962).
40. *Boyd G. D., Gordon J. P.*, Bell Syst. Tech. J., **41**, 489 (1961).
41. *Luchini P., Solimeno S.*, Opt. Lett., **7**, 259 (1982).
42. *Horwitz P.*, J. Opt. Soc. Am., **63**, 1528 (1973).
- 42a. *Butts R., Avizonis P.*, J. Opt. Soc. Am., **68**, 1072 (1978).
43. *Chen L. W., Felsen L. B.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-9**, 1102 (1973).
44. *Stenholm S.* — In: Progress in Quantum Electronics, v. 1, Part A (eds. J. H. Sanders, K. W. H. Stevens), Pergamon, Oxford, 1970, p. 189—271.
45. *McFarlane R. A., Bennett W. R., Lamb W. E.*, Appl. Phys. Lett., **2**, 189 (1963).
46. *Szöke A., Javan A.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 521 (1963).
47. *Летохов В. С., Чеботаев В. П.* Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. — М.: Наука, 1975.
48. *Corney A.*, Atomic and Laser Spectroscopy, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1977, Ch. 13.
49. *Rigrod W. W.*, J. Appl. Phys., **34**, 2602 (1963); **36**, 2487 (1965).
50. *Smith P. W.*, Proc. IEEE, **60**, 422 (1972). [Имеется перевод: Смит П.В. — ТИИЭР, 1972, т. 60, № 4, с. 106.]
51. *Koehler W.*, Solid-state Laser Engineering, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.
52. *Smith P. W.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-1**, 343 (1965).
53. *Kurokawa K.*, Proc. IEEE, **61**, 1386 (1973). [Имеется перевод: Курокава К. — ТИИЭР, 1973, т. 61, № 10, с. 12.]
54. *Buczek C. J., Freiberg R. J., Skolnick M. L.*, Proc. IEEE, **61**, 1411 (1973). [Имеется перевод: Бучек Д., Фрейберг Р.Д., Скольник М.Л. — ТИИЭР, 1973, т. 61, № 10, с. 41.]
55. *Adler R.*, Proc. IEEE, **61**, 1380 (1973). [Имеется перевод: Адлер Р. — ТИИЭР, 1973, т. 61, № 10, с. 5.]
56. *Jacquinot P.*, Rep. Prog. Phys., **23**, 267 (1960).
57. *Girard A., Jacquinot P.* — In: Advanced Optical Techniques (ed. A. C. S. van Heel), North-Holland Publ., Amsterdam, 1967, p. 71—121.
58. *Danielmyer H. G.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-6**, 101 (1970).
59. *Cook A. H.*, Interference of Electromagnetic Waves, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1971.
60. *Roesler F. L.* — In: Astrophysics, Part A, Optical and Infrared Astronomy (ed. N. Carleton), Methods of Experimental Physics, v. 12, Academic Press, New York, 1974, p. 531—569.
61. *Mack J. E., McNutt D. P., Roesler F. G., Chabral R.*, Appl. Opt., **2**, 873 (1963).

62. *Chabbal R.*, J. Phys. Radium, **19**, 295 (1958).
63. *Connes P.*, J. Phys. Radium, **19**, 262 (1958).
64. *Zucker H.*, Bell Syst. Tech. J., **49**, 2349 (1970).
65. *McCumber D. E.*, Bell Syst. Tech. J., **44**, 333 (1965).
66. *Hercher M.*, Appl. Opt., **8**, 1103 (1969).

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Harris S. E.*, Proc. IEEE, **57**, 2096 (1969). [Имеется перевод: Харрис. — ТИИЭР, 1969, т. 57, № 12, с. 5.]
- Басов Н. Г., Крохин О. Н., Понов Ю. М.* — УФН, 1960, т. 72, с. 161.
- Bertolotti M.*, Masers and Lasers: an Historical Approach, Adam-Hilgher Ltd., Bristol, 1983.
- Siegman A. E., Belanger P. A., Hardy A.* — In: Optical Phase Conjugation (ed. R. A. Fisher), Academic Press, New York, 1983, p. 469—528.
- Svelto O.*, Principles of Lasers, Plenum Press, 1976. [Имеется перевод: Звелто О. Физика лазеров. — М.: Мир, 1979.]

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

## 8.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Электромагнитная энергия в оптическом диапазоне частот может передаваться на расстояние путем распространения электромагнитного поля в специальных диэлектрических волноводах. Их волноводные свойства обусловлены, главным образом, *полным внутренним отражением*, согласно которому световой пучок, распространяющийся в среде с показателем преломления  $n_1$ , может полностью отразиться от поверхности раздела между первой и второй средой, имеющей показатель преломления  $n_2 < n_1$ . Точнее говоря, существует угол  $\theta_c$  [пределный угол; см. выражение (3.20.1)], определяемый выражением

$$\theta_c = \arcsin(n_2/n_1), \quad (8.1.1)$$

такой, что полное внутреннее отражение происходит при углах

$$\theta \geq \theta_c, \quad (8.1.2)$$

где  $\theta$  — угол между осью пучка и нормалью  $\hat{n}$  к поверхности раздела двух сред. При  $\theta < \theta_c$  пучок частично отражается и частично пропускается (рис. 8.1).

Эти процессы описываются законами геометрической оптики (см. разд. 2.11.1), согласно которым угол падения  $\theta$  равен углу отражения  $\theta''$  (т. е. углу между отраженным лучом и направлением  $-\hat{n}$ ),

$$\theta = \theta'', \quad (8.1.3)$$

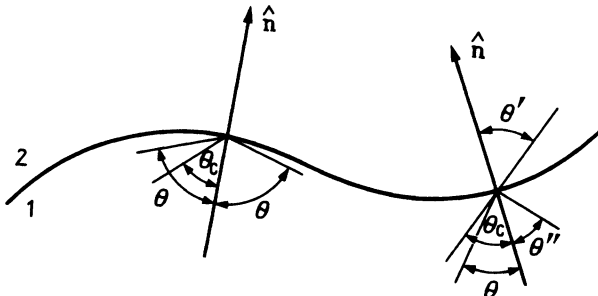


Рис. 8.1. Отражение и преломление на границе раздела двух сред.



а угол преломления  $\theta'$  (угол между прошедшим лучом и  $\hat{n}$ ) связан с  $\theta$  следующим соотношением [см. закон Снеллиуса (2.11.8):

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'. \quad (8.1.4)$$

Это предварительное рассмотрение достаточно для того, чтобы качественно описать волноводные свойства простой планарной структуры, в которой диэлектрический слой с показателем преломления  $n_1$  окружен диэлектриком с показателем преломления  $n_2 < n_1$  (рис. 8.2). Световые лучи, для которых

$$\hat{\theta} = \pi/2 - \theta \leq \pi/2 - \theta_c, \quad (8.1.5)$$

в процессе многократных отражений распространяются в световоде, а лучи, которые не удовлетворяют соотношению (8.1.5), ослабляются в результате последовательных преломлений.

На практике волноводы, наиболее широко применяемые для передачи света на большие расстояния, имеют цилиндрическую симметрию. В этом случае траектории лучей становятся значительно более сложными, даже если проведенное выше элементарное доказательство объясняет их поведение. Кроме того, уменьшение показателя преломления, обуславливающее направленное распространение, может быть реализовано либо дискретным (*волокна со ступенчатым профилем показателя преломления*), либо непрерывным (*градиентные волокна*) способом. В первом случае показатель преломления имеет постоянную величину  $n_1$  в цилиндрической области радиусом  $a$  (*сердцевина*) и постоянную величину  $n_2$  в концентрической кольцевой области (*оболочка*). Во втором случае показатель преломления в сердцевине непрерывно уменьшается с расстоянием  $\rho$  от оси симметрии  $z$ , пока не достигнет постоянной величины  $n_2$  в оболочке (рис.8.3).

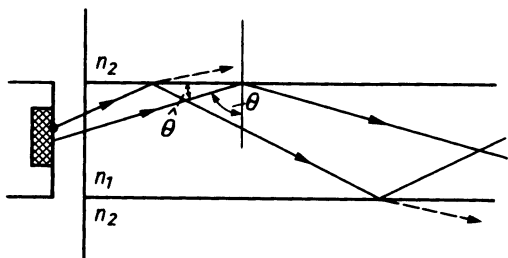
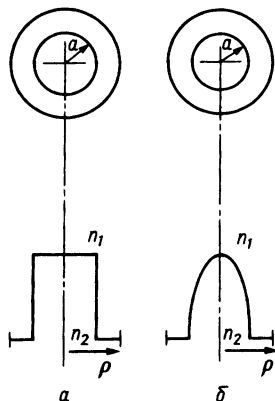


Рис. 8.2. Схематическое представление волноводного механизма в плоской структуре.

Рис. 8.3. Профили показателя преломления.  $a$  — ступенчатый;  $b$  — градиентный.



Понятие луча имеет строгое объяснение с помощью уравнения эйконала (2.3.1), которое было подробно изучено в гл. 2 в рамках приближения лучевой оптики. Область применения этого понятия существенно ограничена длинами волн, много меньшими поперечных размеров оптического волокна.

## 8.2. ВОЛОКНА СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Элементарное описание процесса распространения света в цилиндрических волокнах со ступенчатым профилем применимо лишь к лучам, введенным в волокно в плоскости, содержащей ось  $z$  (*меридиональные лучи*) [см., например, выражение (2.13.11)]. Действительно, из соображений симметрии следует, что траектории этих лучей будут все время оставаться в этой плоскости, как показано на рис. 8.2 для двумерного случая. Это позволяет ввести параметр  $\theta_M$  (*приемный угол*), представляющий собой наибольший угол, который может образовать с осью  $z$  направляемый меридиональный луч. Из соотношений (8.1.1) и (8.1.4) имеем (рис. 8.4)

$$n_e \sin \theta_M = n_1 \sin \theta'_M = n_1 \cos \theta_c = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}; \quad (8.2.1)$$

здесь  $n_e$  — показатель преломления среды перед входом в волокно, который, как правило, равен приблизительно единице. На практике разница между значениями показателей преломления в сердцевине и оболочке составляет несколько процентов:

$$\Delta \equiv (n_1^2 - n_2^2)/(2n_1^2) \ll 1, \quad (8.2.2)$$

так что

$$\theta_M \cong \sin \theta_M = (n_1/n_e)(2\Delta)^{1/2}. \quad (8.2.3)$$

Полезно также определить *числовую апертуру* (ЧА) (см. разд. 2.15.3) через соотношение

$$\text{ЧА} = n_e \sin \theta_M = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \quad (8.2.4)$$

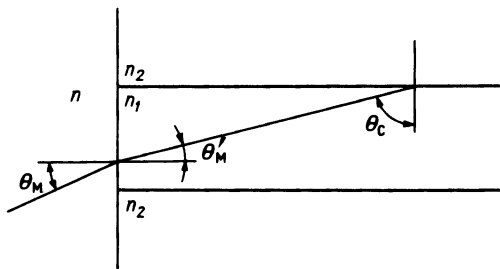


Рис. 8.4. Приемный угол в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

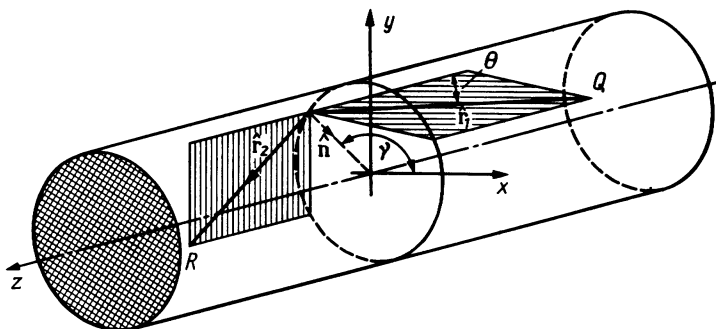


Рис. 8.5. Косые лучи в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

Для немеридиональных лучей (*косых лучей*) описание становится более сложным, поскольку плоскость, содержащая отрезок луча и две образующие цилиндра, которые он пересекает, изменяет свое положение при каждом отражении (рис. 8.5). Однако можно показать, что угол падения  $\psi$  между произвольным отрезком луча  $\hat{r}_j$  и нормалью  $\hat{n}$  к поверхности раздела сердцевина — оболочка является *интегралом движения* [см. *инвариант наклона* в разд. 2.13.1] наряду с углами  $\theta$  и  $\gamma$  (рис. 8.5) и что

$$\cos \psi = -\sin \theta \cos \gamma. \quad (8.2.5)$$

Это соотношение позволяет обобщать понятие приемного угла на случай косых лучей. В соответствии с выражением (8.2.5) направляемыми лучами являются те лучи, для которых

$$|\cos \psi| = \sin \theta |\cos \gamma| \leq \cos \theta_c = (1/n_1)(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad (8.2.6a)$$

т. е.

$$\sin \theta \leq (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} / (n_1 |\cos \gamma|), \quad (8.2.6b)$$

что соответствует числовой апертуре

$$\text{ЧА} = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} / |\cos \gamma|, \quad (8.2.7)$$

большой чем числовая апертура для меридиональных лучей. Однако строгий анализ мод показывает, что косые лучи могут испытывать потери на границе раздела сердцевина — оболочка, обусловленные кривизной этой границы. Используя понятия лучевой оптики, можно выделить три класса лучей. *Направляемые (волноводные) лучи* (которые могут быть либо меридиональными, либо косыми) удовлетворяют условию

$$\sin \theta \leq (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} / n_1 \quad (8.2.8)$$

и распространяются без ослабления. Лучи, которые не удовлетворяют условию (8.2.8), в свою очередь подразделяются на *просачивающиеся туннелирующие лучи*, удовлетворяющие условию (8.2.6) (очевидно, все эти лучи являются косыми) и *просачивающиеся преломленные лучи*, которые не удовлетворяют условию (8.2.6). Обычно туннелирующие лучи ослабляются значительно слабее, чем преломленные лучи.

### 8.3. ГРАДИЕНТНЫЕ ВОЛОКНА

Волноводный эффект можно получить в структурах, в центральной области которых показатель преломления непрерывно уменьшается с расстоянием от оси  $z$ , пока не достигнет постоянного значения в оболочке (рис. 8.3). Чтобы проверить это утверждение, вспомним результаты, полученные в рамках лучевой оптики при изучении распространения света в среде с аналогичным радиальным профилем показателя преломления [см., например, в гл. 2 выражения (2.12.14) и (2.13.31)]. Очевидно [см. выражение (2.13.33)], что если электромагнитное поле распространяется вдоль оси симметрии  $z$ , то оно стремится сосредоточиться вблизи этой оси, что объясняет волноводные свойства такой структуры.

Приведем другой пример. Рассмотрим гауссов профиль показателя преломления вида

$$n^2(\rho) = n_0^2 \exp(-b\rho^2/n_0), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad (8.3.1)$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $x$  и  $y$  — поперечные декартовы координаты. Этот профиль особенно интересен, поскольку обусловленные им траектории лучей имеют очень простой вид и его можно рассматривать как пример широкого класса профилей показателя преломления. Действительно, если (как это часто случается на практике)

$$ba^2/n_0 \ll 1, \quad (8.3.2)$$

то выражение (8.3.1) с хорошей точностью описывает параболический профиль показателя преломления:

$$n^2(x, y) = n_0^2 - n_0 b \rho^2, \quad (8.3.3)$$

который является частным случаем ( $q = 2$ ) широкого класса профилей показателя преломления вида (рис. 8.6)

$$n(\rho) = \begin{cases} n_0 [1 - 2\Delta(\rho/a)^q]^{1/2}, & \rho \leq a, \\ n_0 (1 - 2\Delta)^{1/2}, & \rho > a. \end{cases} \quad (8.3.4)$$

В параксиальном приближении, когда угол наклона лучей к оси  $z$  мал, траектории лучей описываются уравнениями (см. задачу 2 в гл. 2)

$$d^2x/dz^2 = -(b/n_0)x, \quad d^2y/dz^2 = -(b/n_0)y, \quad (8.3.5)$$

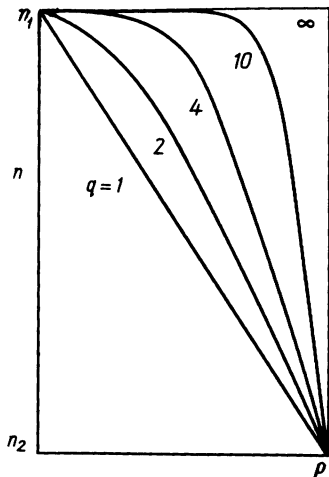


Рис. 8.6. Профили показателя преломления, соответствующие выражению (8.3.4).

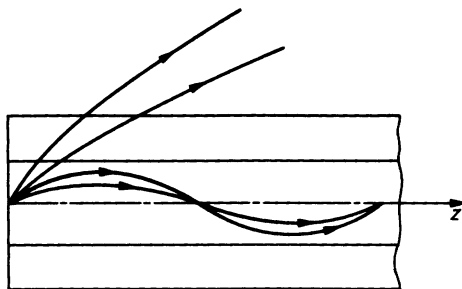


Рис. 8.7. Направляемое и ненаправляемое распространение лучей в градиентном волокне.

которые имеют общее решение, определяемое выражениями

$$x(z) = A_x \sin[(b/n_0)^{1/2}z + \phi_x], \quad y(z) = A_y \sin[(b/n_0)^{1/2}z + \phi_y]. \quad (8.3.6)$$

Эти выражения, полученные в параксиальном приближении, можно сравнить с формулами (2.13.33), с которыми их роднит наличие у них пространственной периодичности, независимой от начального положения и наклона луча (рис. 8.7).

Направляемыми лучами являются те лучи, для которых справедливо неравенство

$$A_x^2 + A_y^2 < a^2, \quad (8.3.7)$$

в то время как лучи, не удовлетворяющие этому условию, проникают в оболочку и пересекают ее по прямой линии (рис. 8.7). В соответствии с условием (8.3.7) направляемые лучи подчиняются соотношению

$$(dx/dz)^2 + (dy/dz)^2 \leq (A_x^2 + A_y^2)b/n_0 \leq ba^2/n_0, \quad (8.3.8)$$

которое оправдывает а posteriori использование параксиального приближения [см. выражение (8.3.2)]. Среди направляемых лучей меридиональными лучами будут те, для которых  $\phi_x = \phi_y$ .

Как для волокон со ступенчатым профилем показателя преломления, можно ввести приемный угол и для градиентных волокон, который, как будет показано, является функцией расстояния  $\rho$  от оси  $z$ . Напомним, что в соответствии с выражением (2.2.5) изменение фазы

на элементарном отрезке пути  $d\mathbf{r}$  дается выражением

$$-k_0 \nabla S \cdot d\mathbf{r}, \quad (8.3.9)$$

что позволяет определить локальный волновой вектор [см. выражение (2.4.2)]

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = k_0 \nabla S. \quad (8.3.10)$$

Этот вектор является интегралом движения, в чем можно сразу убедиться, записав проекцию соотношения (2.4.2) на ось  $z$  и вычислив производную по криволинейной абсциссе  $s$  от обеих частей полученного уравнения. Если предположить, что  $n(\mathbf{r})$  не зависит от  $z$ , то получим следующее уравнение:

$$d(\nabla S)_z/ds = (d/ds)[n(x, y) dz/ds], \quad (8.3.11)$$

правая часть которого в соответствии с (2.4.5) равна нулю, поскольку  $(\nabla n)_z = 0$ . При этом угол  $\theta(\rho)$  между осью  $z$  и лучом на расстоянии  $\rho$  от оси  $z$  определяется соотношением

$$\cos \theta(\rho) = k_z / [\mathbf{k}(\rho) \cdot \mathbf{k}(\rho)]^{1/2}, \quad (8.3.12)$$

или в соответствии с (8.3.10) и (2.3.1) соотношением

$$\cos \theta(\rho) = k_z / [k_0 n(\rho)]. \quad (8.3.13)$$

Среди множества лучей, проходящих через  $\rho$  при любом данном его значении, угол  $\theta(\rho)$  достигает максимума  $\theta_M(\rho)$  для касательного луча к поверхности раздела сердцевина — оболочка. При этом  $k_z$  принимает минимальное значение  $k_0 n(a)$ , и мы имеем

$$\cos \theta_M(\rho) = n(a)/n(\rho). \quad (8.3.14)$$

Следовательно, числовую апертуру можно записать в виде

$$\text{ЧА} = n(\rho) \sin \theta_M(\rho) = [n^2(\rho) - n^2(a)]^{1/2}, \quad (8.3.15)$$

что совпадает с аналогичным выражением (8.2.4) для волокна со ступенчатым профилем показателя преломления, для которого  $n(\rho) \equiv n_1$  независимо от расстояния от оси до выбранной точки на входной плоскости волокна.

Общие рассуждения, кратко изложенные нами в предыдущих разделах, более подробно рассматриваются в специальных книгах [1—8], число которых постоянно увеличивается в связи с возрастающим интересом к данному предмету.

## 8.4. МОДОВАЯ ТЕОРИЯ

Изучение общего решения уравнений Максвелла для цилиндрического волокна приводит к понятию *распространяющейся моды*, т. е. определенной конфигурации электромагнитного поля, зависящей от расстояния  $z$  в направлении распространения как  $\exp(-i\beta z)$ . *Направле-*

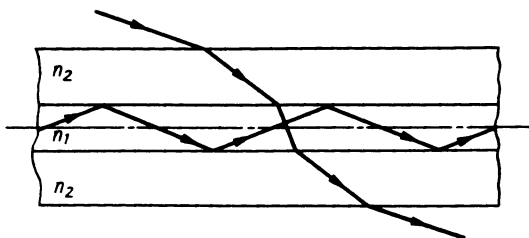


Рис. 8.8. Лучи, соответствующие направляемым и излучательным модам в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

*мые (волноводные) моды* — это такие распространяющиеся моды, у которых электромагнитная энергия сосредоточена, главным образом, в сердцевине на всем протяжении волокна.

Различие между волноводными и неволноводными модами, которое отсутствует в теории распространения в металлических волноводах, существенно для диэлектрических волноводов. Для того чтобы полностью описать электромагнитное поле в волокне, кроме дискретного спектра волноводных мод (соответствующего в геометрической оптике лучам, локализованным в ходе последовательных отражений внутри сердцевины), необходимо рассмотреть и непрерывный спектр излучательных мод (соответствующий лучам, пересекающим волокно при последовательных отражениях; рис. 8.8).

Распространение электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде в отсутствие зарядов и токов описывается уравнениями Максвелла (1.1.1)—(1.1.4) наряду с *материальными уравнениями* (1.1.6) и (1.2.3). Обратите внимание на то, что в нестационарном случае ( $\partial/\partial t \neq 0$ ) последние два уравнения Максвелла (1.1.3) и (1.1.4) являются следствиями первых двух, что можно сразу доказать, применяя оператор  $\nabla$  к обеим частям уравнений (1.1.1) и (1.1.2) и используя векторное тождество (А.15) (см. приложение А в конце книги). Поэтому в дальнейшем достаточно будет рассматривать лишь уравнения

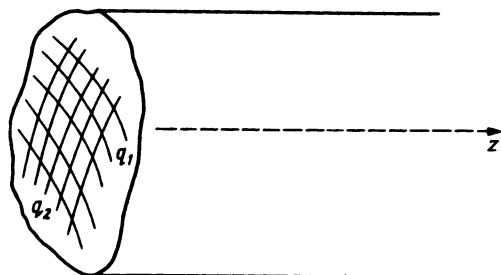


Рис. 8.9. Система координат, применяемая при изучении распространения мод в цилиндрических структурах.

(1.1.1) и (1.1.2) вместе с условиями непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ .

Будем искать решения в виде монохроматических волн

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}. \quad (8.4.1)$$

Рассмотрим наиболее общую цилиндрическую структуру, в которой ось  $z$  параллельна образующей цилиндра, а в поперечном сечении определим криволинейную систему координат  $(q_1, q_2)$  (рис. 8.9). Если диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  зависит только от поперечных координат  $q_1$  и  $q_2$ , то из соображений симметрии решения можно записать в виде

$$\mathbf{E}(q_1, q_2, z) = \mathbf{E}_0(q_1, q_2)e^{-i\beta z}, \quad \mathbf{H}(q_1, q_2, z) = \mathbf{H}_0(q_1, q_2)e^{-i\beta z}. \quad (8.4.2)$$

Дифференциальный оператор  $\nabla$  удобно выразить в виде суммы поперечной и продольной составляющих:

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \hat{z}\partial/\partial z, \quad (8.4.3)$$

Из уравнений (1.1.1) и (1.1.2) и материальных уравнений получаем

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_0 - i\beta \hat{z} \times \mathbf{E}_0 = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad \nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_0 - i\beta \hat{z} \times \mathbf{H}_0 = i\omega \varepsilon \mathbf{E}_0. \quad (8.4.4)$$

Как станет видно в дальнейшем, постоянная  $\beta$  может принимать только некоторые дискретные значения (*собственные значения*), зависящие от граничных условий, налагаемых волноводной структурой. Если записать электрические и магнитные поля в виде суммы поперечных и продольных составляющих

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\perp} + \hat{z}E_z, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{\perp} + \hat{z}H_z, \quad (8.4.5)$$

то после алгебраических преобразований можно выразить поперечные компоненты полей через их продольные составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\perp} &= -[i/(\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2)](\beta \nabla_{\perp} H_z - \omega \varepsilon \nabla_{\perp} E_z \times \hat{z}), \\ \mathbf{E}_{\perp} &= -[i/(\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2)](\beta \nabla_{\perp} E_z + \omega \mu_0 \nabla_{\perp} H_z \times \hat{z}). \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Таким образом, возникает задача нахождения выражений для продольных компонент  $E_z$  и  $H_z$  электрического и магнитного полей. В соответствии с выражением (2.8.1) продольная компонента электрического поля подчиняется следующему уравнению:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2)E_z - i\beta \mathbf{E}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \ln \varepsilon = 0, \quad (8.4.7)$$

а соответствующая магнитная компонента — уравнению

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2)H_z + i\omega \varepsilon \nabla_{\perp}(\ln \varepsilon) \times \mathbf{E}_{\perp} \cdot \hat{z} = 0. \quad (8.4.8)$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2)E_z = 0, \quad (8.4.9)$$



$$\nabla_{\perp}^2 H_z + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2) H_z = 0, \quad (8.4.10)$$

если предположить, что  $\varepsilon$  меняется незначительно на расстояниях порядка длины волны.

### 8.5. МОДОВАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ВОЛОКОН СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Основная трудность в решении краевой задачи при изучении волноводных мод в оптическом волокне связана с интегрированием уравнения в частных производных методом разделения переменных. Хотя для волокон со ступенчатым профилем показателя преломления эта задача оказывается не столь уж сложной, удобно все-таки ввести некоторые приближения, для того чтобы получить простые выражения для интересующих нас величин. Таким образом, предположим, например, что оболочка простирается на бесконечно большое расстояние; такое предположение правомерно благодаря экранирующей роли оболочки и экспоненциальному затуханию волноводных мод с расстоянием  $\rho$  от оси волокна. Кроме того, особое внимание уделим случаю, когда показатели преломления сердцевины и оболочки отличаются всего на несколько процентов ( $\Delta \ll 1$ , случай *слабонаправляющих волокон*), что часто имеет место на практике, так как малость  $\Delta$  ограничивает искажения, вносимые волокном в распространяющийся импульсный сигнал, при сохранении волноводных свойств волокна.

Уравнения (8.4.9) и (8.4.10) для продольных компонент электрического и магнитного полей становятся строгими, поскольку теперь  $\varepsilon = \text{const}$  как в сердцевине, так и в оболочке, и их можно переписать в виде

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z = 0, \quad \rho \leq a, \quad (8.5.1)$$

$$\nabla_{\perp}^2 E_z - \gamma^2 E_z = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 H_z - \gamma^2 H_z = 0, \quad \rho > a, \quad (8.5.2)$$

где

$$\chi^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - \beta^2 = (\omega^2/c^2) \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - \beta^2, \quad (8.5.3)$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 = \beta^2 - (\omega^2/c^2) n_2^2. \quad (8.5.4)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  ( $n_1$  и  $n_2$ ) — диэлектрические проницаемости (показатели преломления) соответственно сердцевины и оболочки. Обычно помимо величин  $\gamma$  и  $\chi$  вводят еще один параметр  $V$  (так называемую *нор-*

мированную частоту), определяемый выражением

$$\begin{aligned} V &= a(\chi^2 + \gamma^2)^{1/2} = a\omega[\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^{1/2} = \\ &= a(\omega/c)(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.5.5)$$

Для волноводной моды постоянная распространения  $\beta$  является вещественной и удовлетворяет соотношению

$$(\omega/c)n_2 \leq \beta \leq (\omega/c)n_1 \quad (8.5.6)$$

(положительные значения  $\beta$  соответствуют модам, распространяющимся в положительном направлении оси  $z$ ). Справедливость этого соотношения обусловлена тем, что величины  $(\omega/c)n_1 = k_0 n_1$  и  $(\omega/c)n_2 = k_0 n_2$  соответствуют однородной плоской волне, распространяющейся в однородной среде с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , и что волноводный случай является промежуточным. Как следствие,  $\chi$  и  $\gamma$  являются вещественными и предполагаются положительными.

В соответствии с симметрией задачи введем полярные координаты  $\rho$  и  $\phi$ . Оператор  $\nabla_{\perp}^2$  при этом принимает вид

$$\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)(\partial/\partial\rho) + (1/\rho^2)(\partial^2/\partial\phi^2), \quad (8.5.7)$$

и переменные разделяются:

$$E_z(\rho, \phi) = F_1(\rho)e^{iv\phi}, \quad H_z(\rho, \phi) = F_2(\rho)e^{iv\phi}, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (8.5.8)$$

Уравнения (8.5.1) и (8.5.2) в этом случае принимают вид соответственно уравнения Бесселя и модифицированного уравнения Бесселя:

$$d^2F_{1,2}/d\rho^2 + (1/\rho)(dF_{1,2}/d\rho) + (\chi^2 - v^2/\rho^2)F_{1,2} = 0, \quad \rho \leq a, \quad (8.5.9)$$

$$d^2F_{1,2}/d\rho^2 + (1/\rho)(dF_{1,2}/d\rho) - (\gamma^2 + v^2/\rho^2)F_{1,2} = 0, \quad \rho > a, \quad (8.5.10)$$

решения которых записываются в виде

$$F_{1,2}(\rho) = a_{1,2}J_v(\chi\rho) + b_{1,2}Y_v(\chi\rho), \quad \rho \leq a, \quad (8.5.11)$$

$$F_{1,2}(\rho) = c_{1,2}K_v(\gamma\rho) + d_{1,2}I_v(\gamma\rho), \quad \rho > a, \quad (8.5.12)$$

где  $J_v$  и  $Y_v$  — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, а  $K_v$  и  $I_v$  — модифицированные функции Ханкеля первого и второго рода (см. книгу [4, ch. II] и уравнения В.10 в приложении В).

Функции  $Y_v$  и  $I_v$  расходятся соответственно при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$  (поскольку  $\gamma > 0$ ), так что их нельзя использовать для описания компонент  $E_z$  и  $H_z$  (которые предполагаются конечными). Следовательно, необходимо положить  $b_{1,2} = d_{1,2} = 0$ . Наоборот,  $J_v$  ограничена при  $\rho = 0$ , а  $K_v$  при  $\rho \rightarrow \infty$  дается асимптотическим выражением

$$K_v(\gamma\rho) \sim e^{-\gamma\rho}/(\gamma\rho)^{1/2}. \quad (8.5.13)$$

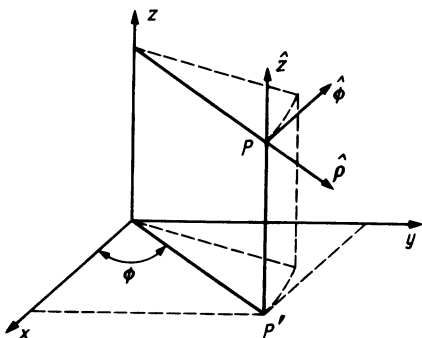


Рис. 8.10. Цилиндрическая система координат.

Условие непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе раздела сердцевина — оболочка позволяет записать следующие выражения:

$$E_z(\rho, \phi) = \begin{cases} AJ_v(\chi\rho)e^{i\nu\phi}, & \rho \leq a, \\ A[J_v(\chi a)/K_v(\gamma a)]K_v(\gamma\rho)e^{i\nu\phi}, & \rho > a, \end{cases} \quad (8.5.14)$$

$$H_z(\rho, \phi) = \begin{cases} BJ_v(\gamma\rho)e^{i\nu\phi}, & \rho \leq a, \\ B[J_v(\chi a)/K(\gamma a)]K_v(\gamma\rho)e^{i\nu\phi}, & \rho > a; \end{cases} \quad (8.5.15)$$

здесь  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, а целое  $\nu$  представляет собой *азимутальное число*.

Теперь с помощью выражений (8.4.6) можно найти поперечные компоненты полей в цилиндрической системе координат (рис. 8.10) и затем наложить условия непрерывности

$$E_\phi(a^+) = E_\phi(a^-), \quad (8.5.16)$$

$$H_\phi(a^+) = H_\phi(a^-). \quad (8.5.17)$$

Действительно, можно показать, что если  $\varepsilon_1 \cong \varepsilon_2$ , то соотношение

$$\mathbf{H}_t \cong (\varepsilon_1/\mu_0)^{1/2} \hat{z} \times \mathbf{E}_t \quad (8.5.18)$$

связывает поперечные компоненты электрического и магнитного полей (аналогичное соотношение справедливо для однородной плоской волны, распространяющейся в сердцевине вдоль оси  $z$ ). Поэтому вместо условия (8.5.17) можно наложить эквивалентное условие

$$E_\rho(a^+) = E_\rho(a^-). \quad (8.5.19)$$

Не вдаваясь в подробности вычислений, запишем следующее уравнение, полученное на основании выражений (8.5.16) и (8.5.19):

$$\left[ \frac{J_{\nu-1}(\chi a)}{\chi a J_\nu(\chi a)} - \frac{K_{\nu-1}(\gamma a)}{\gamma a K_\nu(\gamma a)} \right] \left[ \frac{J_{\nu+1}(\chi a)}{\chi a J_\nu(\chi a)} + \frac{K_{\nu+1}(\gamma a)}{\gamma a K_\nu(\gamma a)} \right] = 0. \quad (8.5.20)$$

Уравнение (8.5.20) называется *характеристическим уравнением*. Его решение для направляемых мод с учетом выражений (8.5.3) и (8.5.4) дает два бесконечных множества дискретных допустимых значений постоянной распространения  $\beta$ , а именно  $\beta_{\nu\delta}$  (здесь  $\delta$  — положительное целое число, отличающее разные решения для каждого фиксированного  $\nu$ ). Если  $\beta_{\nu\delta}$  ведет себя как известная функция частоты  $\omega$ , то можно ввести понятие *частоты отсечки* или *критической частоты*  $\omega_{\nu\delta}$ , устанавливающей нижний предел, ниже которого направляемая мода  $\nu, \delta$  не может существовать. Действительно, в соответствии с зависимостью, описываемой выражением (8.5.13), мода теперь не остается локализованной в сердцевине при  $\gamma \rightarrow 0$ . Иными словами [см. выражение (8.5.4)], при таком значении частоты  $\omega_{\nu\delta}$ , для которого

$$\beta(\omega_{\nu\delta}) = (\omega_{\nu\delta}/c)n_2, \quad (8.5.21)$$

мода занимает все пространство.

При  $\omega < \omega_{\nu\delta}$  величина  $\beta_{\nu\delta}$  становится комплексной и соответствующая мода затухает во время распространения. Можно показать, что в отличие от металлических волноводов в диэлектрических волноводах существует такая основная мода (обозначаемая символом  $HE_{11}$ ), для которой не существует критической частоты [1] (рис. 8.11).

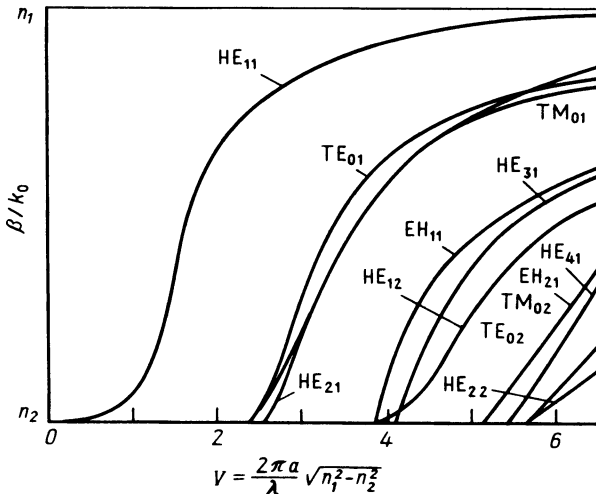


Рис. 8.11. Нормированная постоянная распространения в зависимости от нормированной частоты  $V$  для различных мод низшего порядка в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления.

## 8.6. СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЛОКНА СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В случае  $\Delta \ll 1$  модовая структура и характеристическое уравнение существенно упрощаются. Этот случай всегда реализуется на практике в волоконно-оптической связи. Главное преимущество при этом состоит в том, что электромагнитное поле можно теперь представить в виде суперпозиции *линейно-поляризованных мод*  $(LP)_{\nu\delta}$ , продольные компоненты которых пренебрежимо малы по сравнению с поперечными (порядка  $\Delta^{1/2}$ ) [1, 9].

После введения единичных векторов  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  в направлении осей  $x$  и  $y$  (рис. 8.10) электрические поперечные компоненты этих мод можно записать в виде

$$(LP_x)_{\nu\delta} = \beta A_0 [\sin(\nu\phi), -\cos(\nu\phi)] \hat{x} \begin{cases} J_\nu(\chi\rho)/J_\nu(\chi a), & \rho \leq a, \\ K_\nu(\gamma\rho)/K_\nu(\gamma a), & \rho > a, \end{cases} \quad (8.6.1)$$

$$(LP_y)_{\nu\delta} = \beta A_0 [\cos(\nu\phi), \sin(\nu\phi)] \hat{y} \begin{cases} J_\nu(\chi\rho)/J_\nu(\chi a), & \rho \leq a, \\ K_\nu(\gamma\rho)/K_\nu(\gamma a), & \rho > a, \end{cases} \quad (8.6.2)$$

где  $A_0$  — произвольная постоянная. Запятая в квадратных скобках ( , ) означает, что можно выбирать либо  $\cos$ , либо  $\sin$ ;  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\gamma$  связаны с  $\nu$  и  $\delta$  характеристическим уравнением

$$-J_\nu(\chi a)/\chi a J_{\nu+1}(\chi a) = K_\nu(\gamma a)/\gamma a K_{\nu+1}(\gamma a). \quad (8.6.3)$$

Поперечные составляющие магнитного поля получаются из выражений (8.6.1) и (8.6.2) с помощью соотношения (8.5.18). Каждая из LP-мод при  $\nu \geq 1$  является четырехкратно вырожденной в том смысле, что для любых фиксированных  $\nu$  и  $\delta$  существуют по две моды  $LP_x$  и  $LP_y$  (соответствующие решениям с  $\sin\phi$  и  $\cos\phi$ ) с одним и тем же значением  $\beta_{\nu\delta}$ . Моды с  $\nu = 0$  имеют двукратное вырождение.

Для частот, значительно превышающих критическую частоту, решение уравнения (8.6.3) можно получить с хорошей точностью. Вдали от критической частоты ( $\gamma a \rightarrow \infty$ ) уравнение (8.6.3) с учетом зависимости (8.5.13) принимает вид

$$\chi a J_{\nu+1}(\chi a) = \gamma a J_\nu(\chi a), \quad (8.6.4)$$

а поскольку  $\gamma a \cong V$ , это уравнение можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\chi a J_{\nu+1}(\chi a) = V J_\nu(\chi a). \quad (8.6.5)$$

Вычисляя производную по  $V$  от обеих частей уравнения (8.6.5) и решая полученное уравнение относительно  $d(\chi a)/dV$ , получаем

$$\frac{d(\chi a)}{dV} = \frac{J_\nu(\chi a)}{-\nu J_{\nu+1}(\chi a) + \chi a J_\nu(\chi a) - [VJ'(\chi a)]J_\nu(\chi a) + VJ_{\nu+1}(\chi a)}. \quad (8.6.6)$$

При этом были использованы следующие тождества [8]:

$$(d/d\zeta)J_\nu(\zeta) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(\zeta) - J_{\nu+2}(\zeta)], \quad (8.6.7)$$

$$(\nu/\zeta)J_\nu(\zeta) = \frac{1}{2}[J_{\nu+1}(\zeta) + J_{\nu-1}(\zeta)]. \quad (8.6.8)$$

Подставляя (8.6.5) в уравнение (8.6.6), окончательно имеем

$$\frac{d(\chi a)}{dV} = \frac{1}{[V/(\chi a)](V - 2\nu) + \chi a} \cong \chi a/[V(V - 2\nu)]. \quad (8.6.9)$$

Решение этого уравнения при  $\nu \neq 0$  запишется в виде

$$\chi a = (\chi a)_\infty (1 - 2\nu/V)^{1/(2\nu)}, \quad (8.6.10)$$

а при  $\nu = 0$  — в виде

$$\chi a = (\chi a)_\infty e^{-1/V}, \quad (8.6.11)$$

где  $(\chi a)_\infty$  является  $\delta$ -м нулем уравнения  $J_\nu(\chi a) = 0$  [см. уравнение (8.6.5)].

В *многомодовом волокне*, т. е. в волокне, в котором распространяется не одна, а множество направляемых мод, почти для всех из них  $\chi a \gg 1$  (за исключением нескольких мод вблизи критической частоты), поэтому решения (8.6.10) и (8.6.11) наряду с уравнением (8.5.3) с хорошей точностью определяют постоянные распространения практически для всех мод.

В отличие от только что рассмотренной ситуации, случай, когда мы имеем дело с отсечкой, реализуется при  $\chi a \rightarrow 0$ . Подставляя в уравнение (8.6.3) асимптотическое выражение для  $K_\nu(\chi a)$  при  $\chi a \rightarrow 0$ , находим его решения и из них определяем критические частоты  $\omega_{\nu\delta}$ , которые можно записать в виде

$$\omega_{\nu\delta} = (c/a)[1/(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}] \xi_{\nu\delta}, \quad (8.6.12)$$

где  $\xi_{\nu\delta}$  являются решениями уравнений  $J_{\nu-1}(\xi) = 0$  при  $\nu \geq 1$  (за исключением решения  $\xi = 0$  при  $\nu \geq 2$ ), а  $\xi_{0\delta}$  являются решениями уравнения  $J_1(\xi) = 0$ . Так как  $J_1(0) = 0$ ,  $\xi_{01} = 0$ , то мода  $(LP)_{01}$  и только она не имеет отсечки. Минимальная критическая частота находится по наименьшему из ненулевых корней  $\xi_{\nu\delta}$ , которым оказывается первый нуль функции  $J_0(\xi)$ , т. е.  $\xi_{11} = 2,405\dots$ . Выражения (8.5.5) и (8.6.12) позволяют сформулировать условие одномодовости для волокна со ступенчатым профилем показателя преломления в следующем виде:

$$V \leq 2,405. \quad (8.6.13)$$

## 8.7. ВОЛОКНА С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Изучение распространения направляемых мод в волокне с параболическим профилем показателя преломления можно упростить, если предположить, что показатель преломления мало меняется на расстоянии порядка длины волны и что его параболическая зависимость остается справедливой для любого  $\rho$  (таким образом, допускаются сколь угодно большие значения  $\rho$ ) (рис. 8.12). Последнее предположение подтверждается результатами, полученными в разд. 8.3 относительно траектории направляемых лучей, откуда можно сделать вывод, что по крайней мере моды низших порядков локализируются вблизи оси волокна, так что они нечувствительны к изменениям показателя преломления при больших  $\rho$ . Таким образом можно избежать трудностей, связанных с необходимостью согласования тангенциальных компонент поля на границе раздела сердцевина — оболочка и перейти непосредственно к скалярной теории поляризованных мод в декартовых координатах.

Согласно уравнению (1.1.9), любая декартова компонента  $E_i(x, y)$  электрического поля удовлетворяет (в скалярном приближении) уравнению

$$\partial^2 E_i / \partial x^2 + \partial^2 E_i / \partial y^2 + \{k_0^2 [n_0^2 - n_0 b(x^2 + y^2)] - \beta^2\} E_i = 0, \quad (8.7.1)$$

в котором мы учли параболический профиль показателя преломления (8.3.3). В декартовых координатах этот профиль запишется в виде

$$n^2 = c^2 \mu_0 \varepsilon = n_0^2 - n_0 b(x^2 + y^2). \quad (8.7.2)$$

После разделения переменных, а именно записывая  $E_i(x, y) = f(x)g(y)$ , уравнение (8.7.1) можно записать в виде

$$(1/f)(d^2 f/dx^2) + (n_0^2 k_0^2 - \beta^2 - k_0^2 n_0 b x^2) + [(1/g)(d^2 g/dy^2) - k_0^2 n_0 b y^2] = 0, \quad (8.7.3)$$

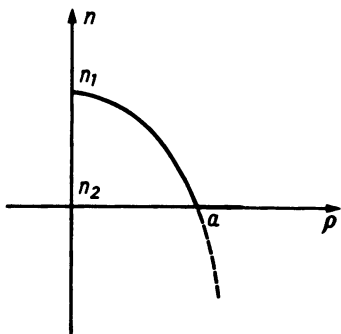


Рис. 8.12. Реальный и идеальный профили показателя преломления в виде параболы.

или (что эквивалентно) в виде двух уравнений

$$d^2f/dx^2 + (n_0^2k_0^2 - R^2 - \beta^2 - k_0^2n_0bx^2)f = 0, \quad (8.7.4)$$

$$d^2g/dy^2 + (R^2 - k_0^2n_0by^2)g = 0, \quad (8.7.5)$$

где  $R^2$  — постоянная разделения. После введения безразмерных переменных

$$\xi = k_0^{1/2}(n_0b)^{1/4}x, \quad (8.7.6)$$

$$\eta = k_0^{1/2}(n_0b)^{1/4}y \quad (8.7.7)$$

уравнения (8.7.4) и (8.7.5) принимают вид

$$d^2f/d\xi^2 + (\sigma^2 - \xi^2)f = 0, \quad (8.7.8)$$

$$d^2g/d\eta^2 + (\psi^2 - \eta^2)g = 0, \quad (8.7.9)$$

причем

$$\sigma^2 = (n_0^2k_0^2 - R^2 - \beta^2)/[k_0(n_0b)^{1/2}], \quad (8.7.10)$$

$$\psi^2 = R^2/[k_0(n_0b)^{1/2}]. \quad (8.7.11)$$

Уравнение (8.7.8) [или (8.7.9)] хорошо известно: это уравнение Шрёдингера для одномерного гармонического осциллятора, и его решение можно найти в любом учебнике по квантовой механике. Можно показать, что уравнения (8.7.8) и (8.7.9) имеют решения, которые конечны и непрерывны во всем пространстве и стремятся к нулю при  $\xi, \eta \rightarrow \pm\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\sigma^2 = 2p + 1, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7.12)$$

$$\psi^2 = 2q + 1, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7.13)$$

Эти решения записываются в виде

$$f(\xi) = e^{-\xi^2/2}H_p(\xi), \quad (8.7.14)$$

$$g(\eta) = e^{-\eta^2/2}H_q(\eta), \quad (8.7.15)$$

где  $H_m$  — полином Эрмита  $m$ -го порядка (см. разд. 7.8 и табл. 7.2, а также выражения (В.4) в приложении В).

Учитывая представленное выше рассмотрение, можно написать следующий набор линейно-поляризованных направляемых мод:

$$E_{pq}(\xi, \eta) = [(2/\pi)^{1/2}/(2^{p+q}p!q!)^{1/2}]H_p(\xi)H_q(\eta)e^{-(\xi^2 + \eta^2)}, \quad (8.7.16)$$

где нормировочный множитель выбран таким образом, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy |E_{pq}|^2 = 1. \quad (8.7.17)$$

Подставляя выражения (8.7.12) и (8.7.13) в (8.7.10) и (8.7.11), получаем постоянную распространения  $\beta_{pq}$ :



$$\beta_{pq} = [n_0^2 k_0^2 - 2k_0(n_0 b)^{1/2}(p + q + 1)]^{1/2}. \quad (8.7.18)$$

Для мод низших порядков, поскольку  $b^{1/2}/k_0 \ll 1$  благодаря пренебрежимо малому изменению показателя преломления на расстоянии, равном одной длине волны, выражение (8.7.18) принимает вид

$$\beta_{pq} = n_0 k_0 - (b/n_0)^{1/2}(p + q + 1). \quad (8.7.19)$$

Результаты этого раздела можно сравнить с теми, которые мы получили в рамках геометрической оптики в гл. 2 (см. разд. 2.12.1а) для параболического профиля показателя преломления в радиальном направлении [см. выражение (2.12.14)]. В частности, интересно сравнить распределение мод, определяемое выражением (8.7.16), с распределением поля, определяемым выражением (2.12.17), и отметить замечательное совпадение двух выражений для постоянных распространения  $\beta_{pq}$  [а именно (2.12.21) и (8.7.18)], полученных двумя полностью различными методами.

## 8.8. НЕНАПРАВЛЯЕМЫЕ МОДЫ

Решения характеристического уравнения, для которых величина  $\beta$  вещественна и подчиняется соотношению [см. (8.5.6)]

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1, \quad (8.8.1)$$

определяют (см. разд. 8.5) дискретный набор волноводных мод, которые распространяются без ослабления вдоль волокна и экспоненциально затухают на больших расстояниях от оси. Однако для того, чтобы полностью описать электромагнитное поле, к первоначальному необходимо добавить непрерывный набор мод. С аналитической точки зрения такие моды получаются, когда коэффициенты  $d_{1,2}$  [см. выражение (8.5.12)] отличны от нуля, а это означает, что  $\gamma$  должна быть мнимой величиной, чтобы удовлетворить физическому условию обращения в нуль поля при  $\rho \rightarrow \infty$ . Действительно, можно написать следующее асимптотическое выражение:

$$I_\nu(\gamma\rho) \underset{\gamma\rho \rightarrow \infty}{\sim} e^{\gamma\rho}/(\gamma\rho)^{1/2}, \quad (8.8.2)$$

которое наряду с асимптотической зависимостью  $K_\nu(\gamma\rho)$  [см. выражение (8.5.13)] показывает, что допустимым являются лишь мнимые значения величины  $\gamma$ . Следовательно, из выражения (8.5.4) можно заключить, что  $\beta$  принимает вещественные значения в интервале

$$0 < \beta \leq n_2 k_0, \quad (8.8.3)$$

а мнимые значения в интервале

$$-i\infty < \beta < 0. \quad (8.8.4)$$

Выбор положительных вещественных значений в (8.8.3) и отрицательных *мнимых* значений в (8.8.4) определяет соответственно моды, распространяющиеся в положительном направлении оси  $z$ , и моды, экспоненциально затухающие в том же направлении. Благодаря добавочной степени свободы, появившейся за счет сохранения члена  $I_\nu$  в (8.5.12), условию непрерывности на границе раздела сердцевина — оболочка можно удовлетворить без обращения к характеристическому уравнению. Таким образом, величины  $\beta$  могут теперь быть не дискретными, а принимать непрерывное множество значений в интервалах, определяемых неравенствами (8.8.3) и (8.8.4)

В общем случае электромагнитное поле, связанное с цилиндрическим волокном, можно записать в виде суперпозиции направляемых и непрерывных мод:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, z, t) = & \sum_{\nu, \delta} A_{\nu, \delta} \mathbf{E}_{\nu, \delta} \exp(i\omega t - i\beta_{\nu, \delta} z) + \\ & + \sum_{\nu} \int_0^{k_0 n_2} A_{\nu}(\xi) \mathbf{E}_{\nu}(\xi) \exp[i\omega t - i\beta_{\nu}(\xi) z] d\xi + \\ & + \sum_{\nu} \int_{k_0 n_2}^{\infty} A_{\nu}(\xi) \mathbf{E}_{\nu}(\xi) \exp[i\omega t - i\beta_{\nu}(\xi) z] d\xi, \end{aligned} \quad (8.8.5)$$

где первый член представляет вклад направляемых мод,  $\mathbf{E}_{\nu, \delta}$  обозначают относительные модовые конфигурации (зависимости от  $\rho$  и  $\omega$  для простоты опущены),  $A_{\nu, \delta}$  — соответствующие амплитуды, а второй и третий члены представляют вклады непрерывных мод, для которых соответственно

$$0 \leq \gamma < ik_0, \quad (8.8.6)$$

$$ik_0 n_2 < \gamma < i\infty. \quad (8.8.7)$$

Таким образом, если  $\xi = -i\gamma$ , то имеют место следующие неравенства:

$$0 \leq \xi < k_0 n_2, \quad (8.8.8)$$

$$k_0 n_2 < \xi < \infty. \quad (8.8.9)$$

Непрерывные моды, удовлетворяющие условию (8.8.8), для которых величина  $\beta$  вещественна, называются *радиационными модами*, а моды, удовлетворяющие условию (8.8.9), называются *затухающими модами*.

Описание электромагнитного поля с помощью выражения (8.8.5) на практике оказывается слишком сложным. Поэтому в большинстве случаев при рассмотрении распространения волн предпочитают ис-

пользовать приближенное описание, в котором радиационные моды заменяются соответствующим набором дискретных мод (*мод утечки*) [7], которые экспоненциально затухают в положительном направлении оси  $z$ . Эти моды вместе с направляемыми модами с хорошей точностью представляют электромагнитное поле в сердцевине волокна и в ее окрестности (так что при достаточно больших  $z$  поле описывается одними лишь направляемыми модами). Это не противоречит тому факту, что отдельно взятая радиационная мода не затухает с расстоянием  $z$ , поскольку любое реальное поле, переносящее энергию по волокну, представляет собой интеграл по конечной области значений  $\xi$  и именно этот интеграл стремится к нулю при достаточно больших  $z$ .

Спектр мод утечки получается естественным образом, если выбрать решения  $\beta$  характеристического уравнения с отрицательной мнимой частью  $\beta_2$  и вещественной частью  $\beta_1$ , удовлетворяющей неравенству (8.8.3), что, как и следовало ожидать, соответствует направлениям распространения, образующим с осью  $z$  угол, больший чем  $\pi/2 - \theta_c$ . При этом мода будет направляемой, если частота поля больше критической, и модой утечки в противоположном случае.

Заметим, что в соответствии с выражением (8.5.4) и условием (8.8.3), а также с учетом того обстоятельства, что  $\beta_2$  отрицательна при отрицательной вещественной части величины  $\gamma$ , из (8.5.13) сразу находим, что моды утечки расходятся при  $\rho \rightarrow \infty$ . Это означает, что в области, не слишком удаленной от границы раздела сердцевина — оболочка, электромагнитное поле, распространяющееся вдоль волокна, может быть представлено в виде суперпозиции направляемых мод и мод утечки (см. также разд. 3.19).

## 8.9. ОДНОМODOВЫЕ ВОЛОКНА

В разд. 8.6 мы показали, каким образом волокно со ступенчатым профилем показателя преломления может работать в одномодовом режиме, т. е. направлять только две вырожденные ортогонально-поляризованные волны, соответствующие моде  $(LP)_{01}$  при условии, что нормированная частота  $V$  удовлетворяет неравенству (8.6.13). В области длин волн 1,2—1,6 мкм, в которой кварцевые волокна характеризуются малыми потерями и слабой хроматической дисперсией (см. разд. 8.13 и 8.14), одномодовые волокна имеют большие потенциальные возможности для ультраширокополосной оптической связи, что побуждает заняться детальным изучением их характеристик распространения. Однако это изучение не может ограничиваться рассмотрением волокон со ступенчатым профилем показателя преломления, для

которого уже имеется аналитическое решение, хотя и сложное. В практически важном диапазоне длин волн (по крайней мере используемом в настоящее время) одномодовость достигается при малых радиусах сердцевин, что не позволяет осуществлять в процессе изготовления точный контроль профиля показателя преломления волокна, который проявляет искажения или провалы вокруг оси волокна. К счастью, оказывается, что поле моды и постоянная распространения одномодового волокна практически нечувствительны к малым искажениям профиля показателя преломления и эти параметры можно вычислять независимо от тонкой структуры профиля [10].

В соответствии с рассмотрением, проведенным в предыдущих разделах, разумно предположить, что в слабонаправляющих волокнах с произвольным профилем показателя преломления  $n(\rho)$  в сердцевине поле любой моды можно аппроксимировать поперечной линейно-поляризованной волной, являющейся решением скалярного волнового уравнения. Например, направляя плоскость поляризации по оси  $x$  и записывая приближенно (с учетом предположения о слабой направленности):

$$E_x = \psi e^{-i\beta z}, \quad H_y \cong (\epsilon/\mu_0)^{1/2} E_x, \quad (8.9.1)$$

получаем следующее уравнение для амплитуды  $\psi_\nu(\rho)$  моды с азимутальным числом  $\nu$ :

$$d^2\psi_\nu/d\rho^2 + (1/\rho)(d\psi_\nu/d\rho) + [k_0^2 n^2(\rho) - \beta^2 - \nu^2/\rho^2]\psi_\nu = 0. \quad (8.9.2)$$

Прямой подход к решению уравнения (8.9.2) с целью изучения характеристик распространения одномодовых оптических волокон, состоящий в том, чтобы определить конкретный вид  $n(\rho)$  и найти какой-либо точный численный метод расчета [11], в общем случае при произвольных профилях показателя преломления является трудным. Однако разработан значительно более простой подход, который позволяет получить важные характеристики, исходя всего лишь из двух-трех параметров, соответствующих моментам профиля показателя преломления [12]. В этом методе обычно вводится функция профиля  $s(\rho)$ , определяемая выражением

$$n^2(\rho) = n_2^2 + (n_0^2 - n_2^2)s(\rho), \quad (8.9.3)$$

где  $n_0$  — максимальное значение  $n(\rho)$  в сердцевине, а  $n_2$  — показатель преломления в оболочке, имеющий постоянную величину. Функция профиля  $s(\rho)$ , очевидно, тождественно равна нулю для  $\rho$ , больших чем радиус сердцевин ( $\rho \geq a$ ; рис. 8.13), а ее моменты  $\Omega_l$  определяются выражением

$$N_l \equiv \int_0^a [n^2(\rho) - n_2^2] \rho^{l+1} d\rho \equiv (n_0^2 - n_2^2) a^{l+2} \Omega_l, \quad (8.9.4)$$

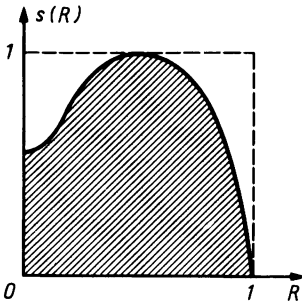


Рис. 8.13. Типичный вид функции профиля  $s(R)$  ( $R = \rho/a$ ).

откуда находим

$$\Omega_1 = \int_0^1 s(R) R^{l+1} dR, \quad (8.9.5)$$

причем  $R = \rho/a$ . Заметим, что для полного определения функции профиля  $s(R)$  достаточно только четных моментов, поскольку она определяется лишь в области  $R \geq 0$ . Моменты  $N_0$  и  $\Omega_0$  и *эффективная нормированная частота* волокна, определяемая выражением

$$\bar{V}^2 = 2k_0^2 \int_0^a [n^2(\rho) - n_2^2] \rho d\rho, \quad (8.9.6)$$

связаны друг с другом следующим простым соотношением:

$$\bar{V}^2 = 2k_0^2 N_0 = 2V^2 \Omega_0, \quad (8.9.7)$$

где

$$V = k_0 a (n_0^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (8.9.8)$$

— нормированная частота волокна со ступенчатым профилем, имеющего тот же радиус  $a$  и показатель преломления сердцевины  $n_0$ , что и у рассматриваемого волокна.

В остальной части этого раздела мы будем следовать методу, который применяли Хасси и Паск [13]. Рассматривая основную моду, для которой  $\nu = 0$ , перепишем уравнение (8.9.2) в виде

$$[-D_0 + \frac{1}{2}\bar{V}^2 \bar{s}(R)]\psi = \Gamma^2 \psi, \quad (8.9.9)$$

где  $R = \rho/a$ ,  $\bar{s}(R) = s(R)/\Omega_0$ ,

$$D_0 = -d^2/dR^2 - (1/R)(d/dR) \quad (8.9.10)$$

и

$$\Gamma^2 = \beta^2 a^2 - k_0^2 n_2^2 a^2. \quad (8.9.11)$$

Предполагая, что опорный профиль  $\hat{s}$  и поле  $\hat{\psi}$  удовлетворяют уравнению

$$(-D_0 + \frac{1}{2}\bar{V}^2\bar{s})\hat{\psi} = \hat{\Gamma}^2\hat{\psi}, \quad (8.9.12)$$

в первом приближении теории возмущений получаем

$$\frac{\Gamma^2}{\bar{V}} = \frac{\hat{\Gamma}^2}{\bar{V}} + \frac{\bar{V}}{2} \frac{\int_0^\infty (\bar{s} - \hat{s})\hat{\psi}^2 R dR}{\int_0^\infty \hat{\psi}^2 R dR}. \quad (8.9.13)$$

В частности, если  $\hat{\psi}^2$  представить в виде полинома от  $R^2$  [в соответствии с уравнением (8.9.9)  $\hat{\psi}$  является четной функцией величины  $R$ ] с коэффициентами разложения  $b_i$ , то мы можем записать следующее равенство:

$$\int_0^\infty (\bar{s} - \hat{s})^2 R dR = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\bar{\Omega}_{2i} - \hat{\Omega}_{2i}), \quad (8.9.14)$$

где  $\bar{\Omega}_i = \Omega_i/\Omega_0$ .

Обычно за исходный удобно принять ступенчатый профиль показателя преломления, для которого поля  $\hat{\psi} = \hat{\psi}_s$  и  $\hat{\Gamma}/a = \gamma$  хорошо известны (см. разд. 8.6), так что  $V = \bar{V}$ , а радиус сердцевины  $a_s$  предполагается *a priori* неизвестным опорным параметром. Вычислив коэффициенты  $b_i$ , можно получить следующие соотношения, выраженные через моменты низших порядков:

$$a_s/a = (2\bar{\Omega}_2)^{1/2}, \quad \Gamma^2/a^2 \cong \gamma^2(\bar{V})/(2\bar{\Omega}_2), \quad (8.9.15)$$

для  $x \leq 0$  и

$$a_s/a = (3\bar{\Omega}_4)^{1/4}, \quad \Gamma^2/a^2 \cong [\gamma^2(\bar{V})/(3\bar{\Omega}_4)^{1/2}] \{1 + x\chi^2 a_s^2/[4J_1^2(\chi a_s)]\} \quad (8.9.16)$$

для  $x > 0$ , где параметр

$$x = 1 - (2\bar{\Omega}_2/(3\bar{\Omega}_4)^{1/2}) \quad (8.9.17)$$

определяется типом профиля. В частности, для ступенчатого профиля  $x = 0$ , для профилей со степенной зависимостью типа  $s_1(R) = 1 - R^q$  величина  $x$  положительна, а для зависимости типа  $s_2(R) = 1 - (1 - R)^q$  (которые имеют провал на оси волокна) она отрицательна.

Выражения (8.9.15) и (8.9.16) позволяют нам описывать одномодовые оптические волокна с помощью первых трех моментов  $\Omega_0$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_4$  профиля показателя преломления. Поскольку моменты являются усредненными по профилю величинами, данный метод автоматически приводит к сглаживанию несущественной тонкой структуры показателя преломления  $n(\rho)$ .

Для того чтобы описать распространение импульса и хроматическую дисперсию (см. разд. 8.13), обычно вводится параметр  $b$ , определяемый выражением [9]

$$\beta = k_0 n_2(1 + b\bar{\Delta}), \quad (8.9.18)$$

где  $\tilde{\Delta} = \Delta(n_0/n_2)^2$ . Параметр  $b$  можно выразить через  $\Gamma$  в виде

$$b(V) = \Gamma^2/V^2 = 2\Omega_0\Gamma^2/\bar{V}^2 \equiv 2\Omega_0\bar{b}(\bar{V}). \quad (8.9.19)$$

Другим важным параметром, особенно в связи с вопросом о связи источника с волокном и потерях на микроизгибах (см. разд. 8.15), является *размер пятна*  $\rho_0$ . Его можно определить, вспомнив, что для ступенчатых профилей и профилей, изменяющихся в соответствии со степенным законом, функция  $\psi(\rho)$  с хорошей точностью аппроксимируется гауссовой функцией

$$\psi(\rho) \cong \exp(-\frac{1}{2}\rho^2/\rho_0^2) \quad (8.9.20)$$

или непосредственно выражением

$$\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2 = \frac{\int_0^\infty \psi^2 R^3 dR}{\int_0^\infty \psi^2 R dR}. \quad (8.9.21)$$

Величину  $\rho_0$  можно вычислить в явном виде с помощью рассмотренного выше метода, который дает следующее выражение:

$$(\rho_0/a)_{\bar{V}} = (2\bar{\Omega}_2)^{1/2}(\rho_0/a)_{s,v=\bar{V}}. \quad (8.9.22)$$

В частности, можно показать [10], что при  $V > 1$  с хорошей точностью мы можем записать

$$(\rho_0/a)_s^2 = 1/\ln V^2. \quad (8.9.23)$$

Остается вычислить критическую частоту для второй моды. Это можно сделать, применяя ко второй моде  $\nu = 1$  рассмотренный выше метод и учитывая условие отсечки  $\Gamma = 0$ , которое после некоторых алгебраических преобразований можно записать следующим образом:

$$\bar{V} \leq \bar{V}_{co} \cong 2,405/(1 - 1,1419x)^{1/2}. \quad (8.9.24)$$

## 8.10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ ВОЛОКНА

В предыдущих разделах основные особенности процесса распространения волн в оптических волокнах были изучены на примере мод, распространяющихся при фиксированной частоте в идеальных диэлектрических волноводах. Рассмотрим теперь реальную ситуацию, когда поле, представляющее собой суперпозицию различных мод и имеющее ограниченную полосу частот, распространяется в реальном волокне, профиль показателя преломления которого неизбежно отклоняется от идеального, что приводит к ослаблению волн и связи между различными модами. Одновременное возбуждение многих мод и зависимость постоянной распространения от частоты приводит к искажению сигнала и ухудшению характеристик оптического волокна.

Обозначим пространственную конфигурацию произвольной моды,

определяемой индексом  $m$  (который, как было показано, на самом деле означает набор индексов), через  $\mathbf{E}_m(\rho; \omega)$ , а постоянную распространения этой моды (вещественную для направляемых мод и комплексную для мод утечки) через  $\beta_m(\omega)$ . При этом аналитический сигнал (см. гл. 1, разд. 1.8), соответствующий монохроматическому электрическому полю, распространяющемуся в идеальном волокне, можно записать в виде следующего разложения:

$$\hat{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \sum_m c_m \mathbf{E}_m(\rho; \omega) \exp[-i\beta_m(\omega)z + i\omega t], \quad (8.10.1)$$

где  $c_m$  — коэффициенты разложения. Если поле имеет конечную ширину полосы  $\delta\omega$ , то выражение (8.10.1) заменяется на

$$\hat{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \sum_m \int_0^\infty c_m(\omega) \mathbf{E}_m(\rho; \omega) \exp[-i\beta_m(\omega)z + i\omega t] d\omega. \quad (8.10.2)$$

Как уже отмечалось, поле в волокне не является строго поперечным, причем отношение его продольной компоненты к поперечной составляет величину порядка  $\Delta^{1/2}$ . Однако в качестве значимой величины обычно рассматривают мощность  $P^{(\sigma)}$ , переносимую через элемент поперечного сечения  $\sigma$  волокна (рис. 8.14) и определяемую следующим образом:

$$P^{(\sigma)}(z, t) = \text{Re} \iint_{\sigma} \tilde{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy. \quad (8.10.3)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор в положительном направлении оси  $z$ , а  $\tilde{\mathbf{S}}$  — комплексный вектор Пойнтинга, определяемый выражением (см. разд. 1.8)

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \rangle_t, \quad (8.10.4)$$

где скобки  $\langle \rangle_t$  обозначают усреднение во времени за несколько периодов  $2\pi/\omega$  изменения поля. Следовательно, для вычисления вектора Пойнтинга необходимо иметь лишь поперечную составляющую электромагнитного поля. Произведя замену  $\hat{\mathbf{E}} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$  и  $\mathbf{E}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$  можно записать выражения, аналогичные (8.10.1) и (8.10.2), для поперечной составляющей магнитного поля. Коэффициенты разложения  $c_m$  направляемых мод можно в принципе определить по известным граничным

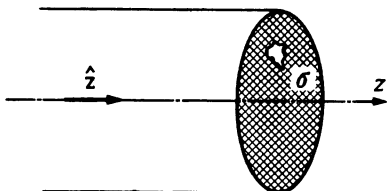


Рис. 8.14. Поперечное сечение волокна.



условиям  $\mathbf{E}(\rho, z = 0, t)$ , используя следующее соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\mathbf{E}_m(\rho; \omega) \times \mathbf{H}_n^*(\rho; \omega)] \cdot \hat{z} = 2P\delta_{mn}, \quad (8.10.5)$$

где  $P$  — положительный нормировочный коэффициент, а  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера. Соотношение ортогональности, аналогичное (8.10.5), приближенно справедливо и для *просачивающихся туннелирующих мод*, соответствующих туннелирующим лучам (см. разд. 8.2), которые могут вносить заметный вклад в суммарное поле на значительных расстояниях вдоль оси.

Если предположить, что ширина полосы  $\delta\omega$  удовлетворяет неравенству (как это имеет место в большинстве случаев)

$$\delta\omega/\omega_0 \ll 1, \quad (8.10.6)$$

где  $\omega_0$  — характерная частота поля, то в (8.10.2) можно положить  $\mathbf{E}_m(\rho; \omega) \approx \mathbf{E}_m(\rho; \omega_0)$ . В результате мы получим более простое выражение

$$\hat{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho; \omega_0) \int_0^\infty c_m(\omega) \exp[-i\beta_m(\omega)z + i\omega t] d\omega. \quad (8.10.7)$$

Заметим, что выражения (8.10.2) и (8.10.7) можно без труда обобщить на случай реального волокна, у которого профиль показателя преломления лишь незначительно отличается от идеального. Для этого необходимо ввести зависимость коэффициентов  $c_m(\omega)$  от  $z$ . Такая зависимость учитывает связь между различными модами, образующимися вследствие искажения профиля показателя преломления. Следовательно, в общем случае мы имеем

$$\hat{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho; \omega) \int_0^\infty c_m(\omega, z) \exp[-i\beta_m(\omega)z + i\omega t] d\omega. \quad (8.10.8)$$

Используя выражения (8.10.5) и (8.10.7), можно сразу вычислить коэффициенты  $c_m(\omega, z = 0)$  при известных граничных условиях:

$$c_m(\omega, z = 0) = \frac{1}{4\pi P} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \hat{z} \cdot [\hat{\mathbf{E}}(\rho, z = 0, t) \times \mathbf{H}_m^*(\rho; \omega_0)] \quad (8.10.9)$$

[в идеальном случае  $c_m(\omega, z) = c_m(\omega, 0) \equiv c_m(\omega)$ ]. Выделяя в виде отдельного множителя быстро меняющиеся (как в пространстве, так и во времени) члены, выражение (8.10.8) можно переписать в виде

$$\hat{\mathbf{E}}(\rho, z, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\rho) \exp[-i\beta_m(\omega_0)z + i\omega_0 t] \Phi_m(z, t), \quad (8.10.10)$$

где  $\mathbf{E}_m(\rho) \equiv \mathbf{E}_m(\rho; \omega_0)$  и  $\Phi_m$  — медленноменяющаяся амплитуда, которая дается выражением

$$\Phi_m(z, t) = \int_0^\infty c_m(\omega, z) \exp\{-i[\beta_m(\omega) - \beta_m(\omega_0)]z + i(\omega - \omega_0)t\} d\omega. \quad (8.10.11)$$

Подставляя формулы (8.10.4) и (8.10.10), а также аналогичные выражения для магнитного поля в (8.10.3), имеем

$$P^{(\sigma)}(z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_m F_{mn}^{(\sigma)} \langle |\Phi_m(z, t)|^2 \rangle_t + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{m \neq n} F_{mn}^{(\sigma)} \exp\{i[\beta_n(\omega_0) - \beta_m(\omega_0)]z\} \times \\ \times \langle \Phi_m(z, t) \Phi_n^*(z, t) \rangle_t; \quad (8.10.12)$$

здесь

$$F_{mn}^{(\sigma)} = \iint_{\sigma} dx dy [\mathbf{E}_m(\rho; \omega_0) \times \mathbf{H}_n^*(\rho; \omega_0)] \cdot \hat{z}. \quad (8.10.13)$$

Если элемент площади  $\sigma$  совпадает со всем сечением волокна, то

$$P^{(\infty)}(z, t) = P \sum_m \langle |\Phi_m(z, t)|^2 \rangle_t \equiv \sum_m P_m(z, t), \quad (8.10.14)$$

причем недиагональные члены, представляющие интерференцию различных мод, обращаются в нуль благодаря соотношению ортогональности [см. (8.10.5)]. Ненулевые диагональные члены  $P_m(z, t)$  можно интерпретировать как суммарную мощность, переносимую  $m$ -й модой через полное сечение волокна при данном  $z$ .

## 8.11. ЗАТУХАНИЕ

Затухание излучения внутри оптического волокна обусловлено как поглощением в материале волокна (включая рассеяние, вызванное флуктуациями плотности на микроскопическом и атомном уровнях), так и самим процессом распространения света в волноводе. Первый механизм затухания определяется материалом и может быть исследован на любом образце этого материала, тогда как второй определяется геометрической формой волновода. Потери, обусловленные поглощением в стекле, можно подразделить на три части: поглощение материала, поглощение на примесях, неизбежно присутствующих в материале, и поглощение на атомных дефектах. Эти потери можно описать феноменологически через *коэффициент потерь*  $\alpha$  — характеристику рассматриваемого материала, который определяет относительное затухание на единицу длины полной энергии, переносимой электромагнитным полем. Разумеется, необходимо ввести два коэффициента потерь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , первый из которых относится к материалу сердцевины, а

второй — к оболочке. При этом относительный декремент затухания на единицу длины полной энергии  $I_m(z)$ , переносимой  $m$ -й модой и определяемой выражением

$$I_m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(z, t) dt, \quad (8.11.1)$$

запишется в виде

$$\alpha_m = \alpha_1 f_m^{(1)} + \alpha_2 f_m^{(2)}, \quad (8.11.2)$$

где  $f_m^{(1)}$  — доля энергии  $m$ -й моды, распространяющейся в сердцевине, а  $f_m^{(2)}$  — то же, но в оболочке (эти величины вычислены для идеально-го волокна).

Еще одним источником затухания является рассеяние света на флуктуациях плотности числа частиц на атомном уровне. Если бы атомы и молекулы составляли идеально однородную структуру, то поля, рассеиваемые отдельными атомами, при интерференции взаимно компенсировались бы и рассеяние не наблюдалось. Этого не происходит из-за наличия локальных неоднородностей, зависящих от времени и вызванных тепловыми флуктуациями. В волокне неоднородности имеют статический характер и образуются при температуре  $T$  фазового перехода стекла; эти неоднородности остаются «замороженными» в стекле после его затвердевания. Наличие таких неоднородностей в стекле вызывает рассеяние (*рэлеевское рассеяние*) электромагнитных волн, приводящее к их затуханию с коэффициентом  $\alpha^{(s)}$  (см. также разд. 8.13.4):

$$\alpha^{(s)} = [(8\pi^3)/(3\lambda_0^4)](n^2 - 1)K_B T \beta_c, \quad (8.11.3)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны излучения в вакууме,  $n$  — показатель преломления материала,  $K_B$  — постоянная Больцмана, а  $\beta_c$  — изотермический коэффициент сжимаемости среды.

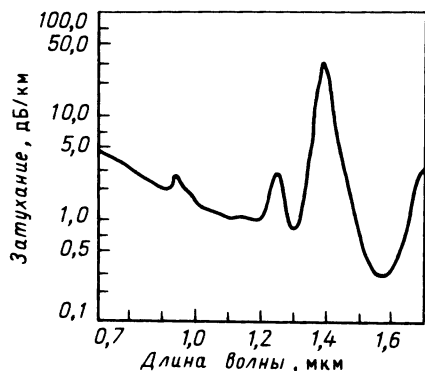


Рис. 8.15. Спектральная зависимость затухания для типичного оптического волокна.

На рис. 8.15 показано изменение коэффициента затухания с длиной волны  $\lambda_0$ . Рэлеевское рассеяние отвечает за затухание в более длинноволновой части, где коэффициент затухания зависит от длины волны как  $1/\lambda_0^4$ .

Различные виды потерь в волокне связаны с его геометрической структурой (например, уже упоминавшиеся потери мод утечки с коэффициентом затухания  $\alpha = -2\beta_2$  и потери, обусловленные конечной кривизной волокна).

Конечный диаметр оболочки приводит к дополнительному затуханию, обусловленному тем, что часть электромагнитной энергии распространяется в окружающем волокно покрытии, которое обладает большими потерями. Другие виды потерь вызываются нелинейными оптическими эффектами, *вынужденным комбинационным рассеянием и рассеянием Мандельштама — Бриллюэна*, которыми в оптических волокнах при низкой мощности света можно, как правило, пренебречь (см. разд. 8.18).

Помимо перечисленных выше механизмов потерь, которые имеют детерминированную природу, существуют и другие, вызванные тем, что в любом волокне неизбежно происходят случайные деформации сердцевин и микроизгибы его оси. Эти случайные неоднородности приводят к возникновению связи между различными модами и взаимной перекачки электромагнитной мощности. Увеличивающийся при этом поток мощности от направляемых мод к модам утечки и далее к преломленным модам является одной из причин затухания энергии, распространяющейся в волокне.

## 8.12. ДИСПЕРСИЯ МОД

Исходя из выражений (8.10.10) и (8.10.11), а также учитывая неравенство (8.10.6), можно записать следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\rho, z, t) = & \sum_m \mathbf{E}_m(\rho) \exp[-i\beta_m(\omega_0)z + i\omega_0 t] \int_0^\infty c_m(\omega, z) \times \\ & \times \exp[-i\beta'_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)z] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{i}{2}\beta''_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 z + i(\omega - \omega_0)t\right] d\omega, \quad (8.12.1) \end{aligned}$$

где  $\beta'_m(\omega_0) = (d\beta_m/d\omega)_{\omega=\omega_0}$  и  $\beta''_m(\omega_0) = (d^2\beta_m/d\omega^2)_{\omega=\omega_0}$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $\delta\omega$  столь мало, что в выражении (8.12.1) членом  $(\omega - \omega_0)^2$  можно пренебречь. Определяя *группо-*

вую скорость  $v_m$   $m$ -й моды

$$v_m = 1/\beta'_m(\omega_0), \quad (8.12.2)$$

для идеального волокна нетрудно получить следующее выражение:

$$\hat{E}(\rho, z, t) = \sum_m E_m(\rho) \exp[-i\beta_m(\omega_0)z + i\omega_0 t] \Phi_m\left(0, t - \frac{z}{v_m}\right), \quad (8.12.3)$$

из которого видно, что различные моды распространяются с различными скоростями  $v_m$ . Мощность моды  $P_m(z, t)$  удовлетворяет соотношению

$$P_m(z, t) = P_m(0, t - z/v_m), \quad (8.12.4)$$

так что сигнал, образованный суперпозицией различных мод, претерпевает искажение, обусловленное различными скоростями их распространения (*дисперсия мод*). Определяя *задержку*  $\tau_m$   $m$ -й моды

$$\tau_m = L/v_m \quad (8.12.5)$$

( $L$  — длина волокна), дисперсию мод можно выразить количественно через максимальную возможную разность времен запаздывания различных мод:

$$\Gamma^{(\text{мод})} = \max|\tau_m - \tau_n|. \quad (8.12.6)$$

Для практических целей нередко приходится рассматривать форму импульса, прошедшего определенное расстояние по волокну, при условии, что его ширина на входе пренебрежимо мала и все моды возбуждаются в одинаковой степени (*импульсный отклик*). Форма этого импульса изображена на рис. 8.16 для различных профилей показателя преломления. Можно показать, что выходной импульс имеет мини-

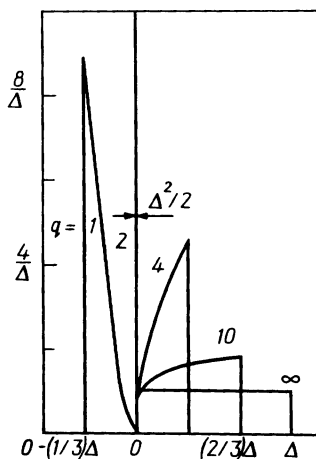


Рис. 8.16. Импульсный отклик для различных профилей показателя преломления в зависимости от нормированной задержки  $\Delta = (t - Ln_0/c)/(Ln_0/c)$ .

мальную ширину  $\Delta^2/8$  при [14]

$$q = 2 - 2,4 \Delta, \quad (8.12.7)$$

где  $q$  — показатель степени в представлении профиля показателя преломления в виде степенной зависимости [см. выражение (8.3.4)].

### 8.13. ХРОМАТИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ

В предыдущем разделе при рассмотрении выражения (8.12.1) мы пренебрегли эффектом искажения, связанным с конечной шириной полосы  $\delta\omega$  сигнала и учитываемым квадратичными членами по  $(\omega - \omega_0)$ . Этот эффект, который оказывается пропорциональным  $\delta\omega$ , в многомодовых волокнах, если возбуждающий источник является достаточно монохроматическим, на практике пренебрежимо мал, но в идеальном одномодовом волокне он представляет собой единственный источник искажения. Простой метод изучения этого явления состоит в рассмотрении зависимости групповой скорости  $v_m$  от частоты (для данной моды  $m$ ) и связанной с этим задержки между самой «медленной» и самой «быстрой» частотами  $\omega'$  и  $\omega''$ . Точнее говоря, можно записать следующее выражение:

$$T_m^{(cr)} = L \left[ \frac{1}{v_m(\omega')} - \frac{1}{v_m(\omega'')} \right] = L \left( \frac{d\beta_m}{d\omega_{\omega=\omega'}} - \frac{d\beta_m}{d\omega_{\omega=\omega''}} \right), \quad (8.13.1)$$

которое при обычном допущении, учитываемом в (8.10.6), можно переписать в виде

$$T_m^{(cr)} = L |d^2 \beta_m / d\omega_{\omega=\omega_0}^2| \delta\omega, \quad (8.13.2)$$

где  $\delta\omega$  в стандартных условиях представляет собой ширину полосы несущей (как правило, эта ширина больше, чем ширина полосы, связанная с модуляцией сигнала).

При выполнении операции дифференцирования в выражении (8.13.2) появляются различные члены, вызванные тем, что постоянная распространения  $\beta_m$  помимо зависимости от  $\omega$  из-за дисперсионных свойств материала волокна (*дисперсия материала*) проявляет зависимость от частоты, обусловленную волноводной структурой волокна, изготовленного даже из недисперсионного материала (*волноводная дисперсия*). Кроме того, зависимость от  $\omega$  связана и с изменением профиля показателя преломления с  $\omega$  (*дисперсия профиля*). В общем случае эти три эффекта связаны между собой сложным образом и разделить их относительные вклады невозможно.

Для того чтобы вычислить  $T_m^{cr}$ , предположим, что постоянную распространения мод в многомодовом волокне вдали от частоты отсечки

можно записать в виде

$$\beta_m(\omega) = n_1(\omega)\omega/c, \quad (8.13.3)$$

где  $n_1(\omega)$  — показатель преломления материала именно сердцевины, поскольку моды стремятся быть локализованными внутри сердцевины, которая считается бесконечно протяженной. Записывая выражение (8.13.2) через длину волны (в вакууме)  $\lambda_0$ , мы имеем

$$T^{(cr)} = (L\lambda_0/c)|d^2n_1(\lambda_0)/d\lambda_0^2|\delta\lambda_0; \quad (8.13.4)$$

здесь  $\delta\lambda_0 = \lambda_0 \delta\omega/\omega_0$ . Отсюда мы видим, что хроматическая дисперсия сводится к дисперсии материала. В соответствии с (8.13.4) дисперсией материала можно пренебречь в окрестности длины волны  $\bar{\lambda}_0$ , для которой выполняется следующее условие:

$$[d^2n_1(\lambda_0)/d\lambda_0^2]_{\lambda_0 = \bar{\lambda}_0} = 0. \quad (8.13.5)$$

Вообще говоря, более значимой величиной является не  $T^{(cr)}$ , а  $T^{(cr)}/L\delta\lambda_0$ , т. е. задержка на единицу длины волокна при единичном интервале  $\delta\lambda_0$ . Зависимость этой величины от  $\lambda_0$  показана на рис. 8.17.

Для одномодового волокна (или многомодового волокна, когда рассматриваемые моды находятся либо вблизи отсечки, либо в диапазоне длин волн  $\lambda_0 \approx \lambda_0$ , когда уже нельзя пренебрегать волноводной дисперсией и дисперсией профиля) выражение (8.13.4) становится неточным и приходится прибегнуть к более сложному методу расчета, указанному в работе Глоджа [15]. Этот метод использовали Гамблинг и др. [16] для расчета одномодового волокна. Он состоит в том, что в выражение (8.13.2) подставляется формула для  $\beta$  (8.9.18) и после некоторых алгебраических преобразований мы можем записать

$$T^{(cr)} = L|T_{cmd} + T_{wd} + T_{cpd}|\delta\lambda_0, \quad (8.13.6)$$

где

$$T_{cmd} = (\lambda_0/c)\{A(V)d^2n_1/d\lambda_0^2 + [1 - A(V)]d^2n_2/d\lambda_0^2\}, \quad (8.13.7)$$

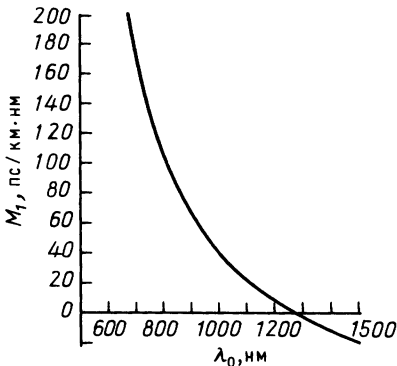


Рис. 8.17. Дисперсия материала в зависимости от длины волны на примере кварца. Величина  $M_1$  соответствует  $T^{(cr)}$ , определяемой выражением (8.13.4).

$$A(V) = \frac{1}{2}[d(bV)/dV + b], \quad (8.13.8)$$

$$T_{\text{wd}} = (n_2 \Delta/c\lambda_0)BV d^2(bV)/dV^2, \quad (8.13.9)$$

$$B = [1 - (\lambda_0/n_2)(dn_2/d\lambda_0)]^2, \quad (8.13.10)$$

$$T_{\text{cpd}} = -(n_2/c)CD(V)d\tilde{\Delta}/d\lambda_0, \quad \tilde{\Delta} = \Delta(n_0/n_2)^2, \quad (8.13.11)$$

$$C = 1 - (\lambda_0/n_2)dn_2/d\lambda_0 - (\lambda_0/4\tilde{\Delta})d\tilde{\Delta}/d\lambda_0, \quad (8.13.12)$$

$$D(V) = V d^2(bV)/dV^2 + d(bV)/dV - b \quad (8.13.13)$$

[величина  $b$  определяется выражением (8.9.18)]. Здесь  $T_{\text{cmd}}$ ,  $T_{\text{wd}}$  и  $T_{\text{cpd}}$  являются соответственно *дисперсией материала*, *волноводной дисперсией* и *дисперсией профиля*.

Классификация, приведенная выше, продиктована тем, что любой из указанных выше вкладов обращается в нуль, когда соответствующий дисперсионный параметр полагается равным нулю. Например, нетрудно заметить, что выражение для дисперсии материала в случае, когда частоты мод находятся достаточно далеко от отсечки, т. е.  $b \approx 1$  и  $V db/dV \approx 0$ , становится эквивалентным выражению (8.13.4), в то время как вблизи отсечки дисперсионные свойства материала оболочки становятся существенными. Для волокна со ступенчатым профилем показателя преломления при  $V = 2,402$  можно получить следующее выражение:

$$T_{\text{cmd}} = \frac{\lambda_0}{c} |0,83 d^2 n_1/d\lambda_0^2 + 0,17 d^2 n_2/d\lambda_0^2|. \quad (8.13.14)$$

Следует заметить, что для любой наперед заданной длины волны величины  $T_{\text{cmd}}$ ,  $T_{\text{wd}}$  и  $T_{\text{cpd}}$  не всегда имеют одинаковый знак, а длина волны, при которой  $T_{\text{cmd}}^{(\text{cr})}$  имеет пренебрежимо малое значение, в общем случае отлична от  $\bar{\lambda}_0$ . Представление об относительных вкладах трех видов дисперсии можно получить из рис. 8.18.

## 8.14. МОДОВЫЙ ШУМ

Рассмотрим выражение (8.10.12) для мощности  $P^{(o)}(z, t)$ , проходящей через элемент сечения  $\sigma(\rho)$  с центром в точке  $\rho$ . Предварительно заметим, что на практике усреднение величин во времени, обозначаемое чертой сверху, соответствует показаниям детектора за промежуток времени  $T_D$ , который обычно велик по сравнению с характерным временем флуктуаций возбуждающего источника (*время когерентности*  $T_c$ ). При этом предположении черту над буквенным обозначением можно заменить символом  $\langle \rangle_{\text{сред}}$ , который означает *усреднение по ан-*



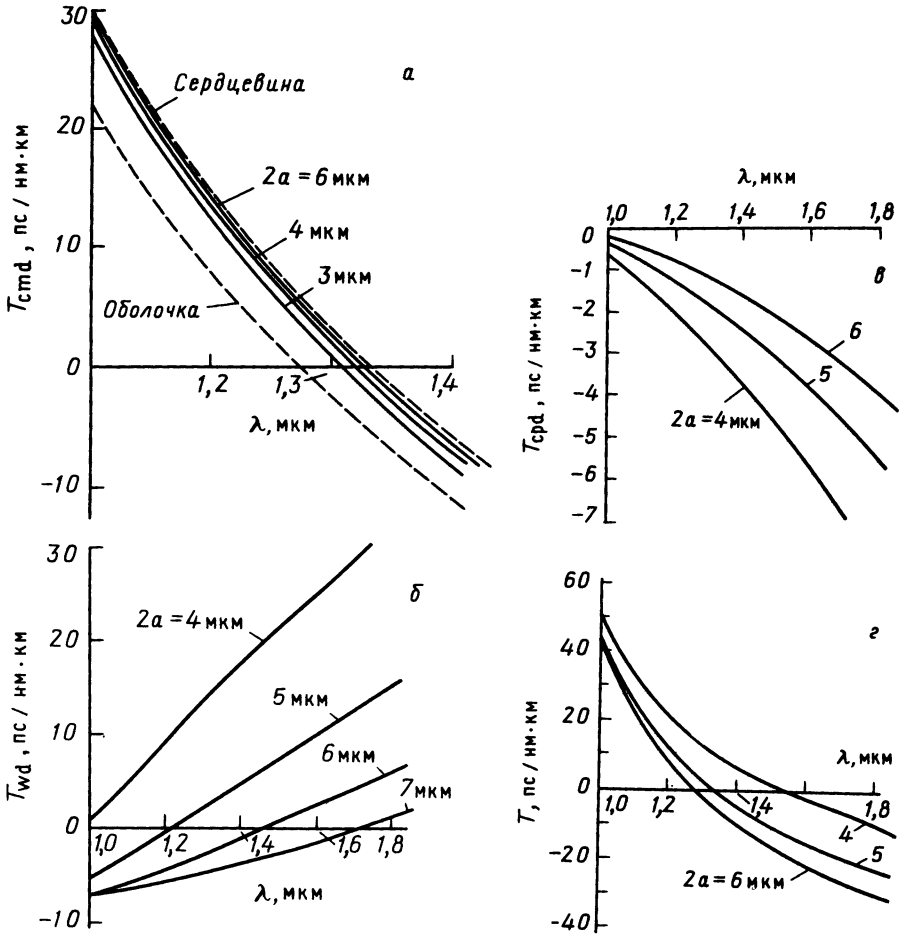


Рис. 8.18. Дисперсия в одномодовых волокнах со ступенчатым профилем показателя преломления для различных диаметров сердцевин  $2a$ . Величины  $T_{\text{срд}}$  (а),  $T_{\text{вд}}$  (б) и  $T_{\text{срд}}$  (в) вычислены с помощью выражений (8.13.7), (8.13.9) и (8.13.11) соответственно; г — суммарная дисперсия  $T$ . (Из работы Гамблинга, Мацумуры и Рагдейла [16].)

самблю флуктуаций источника. Таким образом, мощность  $P_m$ , переносимая  $m$ -й модой, можно записать в виде

$$P_m(z, t) = P \langle |\Phi_m(z, t)|^2 \rangle_{\text{сред}}, \quad (8.14.1)$$

При этом недиагональные члены в выражении (8.10.12) содержат следующие кросс-корреляционные произведения:

$$T_{nm}(z, t) = \langle \Phi_m(z, t) \Phi_n^*(z, t) \rangle_{\text{сред}}. \quad (8.14.2)$$

Для того чтобы выразить  $T_{nm}$  в явном виде, пренебрежем взаимодействием мод и хроматической дисперсией; таким образом можно положить (см. разд. 8.12), что  $\Phi_m(z, t) = \Phi_m(0, t - z/v_m)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} T_{nm}(z, t) &= \langle \Phi_m(0, t - z/v_m) \Phi_n^*(0, t - z/v_n) \rangle_{\text{сред}} = \\ &= S(t - z/v_m) S^*(t - z/v_n) \langle F(t - z/v_n) F^*(t - z/v_n) \rangle_{\text{сред}} \equiv \\ &\equiv S(t - z/v_m) S^*(t - z/v_n) G(|\tau_{nm}|), \end{aligned} \quad (8.14.3)$$

где для простоты мы предположили, что все направляемые моды возбуждаются на входной плоскости волокна одинаковым образом и  $\Phi(t)$  можно представить в виде произведения быстро колеблющегося члена  $F(t)$  (связанного с флуктуациями источника) и относительно медленного члена  $S(t)$  (связанного с внешними флуктуациями и модуляцией сигнала).

Величина  $G(|\tau_{nm}|)$  становится пренебрежимо малой, если

$$|\tau_{nm}| = L|1/v_n - 1/v_m| \gg T_c, \quad (8.14.4)$$

т. е. если задержка  $n$ -й моды относительно  $m$ -й моды превышает время когерентности источника возбуждения мод. В случае, когда данное условие выполняется для любой пары мод, все недиагональные члены в выражении (8.10.12) обращаются в нуль и  $P^{(\sigma)}$  [так же, как и интенсивность света  $I(\rho, z, t)$ , получающаяся при переходе к пределу  $P^{(\sigma)}/\sigma$  при  $\sigma \rightarrow 0$ ] представляет собой сумму одних лишь диагональных членов. В противном случае, когда имеются не равные нулю недиагональные члены, вклады от этих членов локально складываются с вкладом от диагональных членов или вычитаются из них в зависимости от взаимных фаз, что приводит к возникновению *спекловой структуры* в поперечном сечении волокна (рис. 8.19) [17].

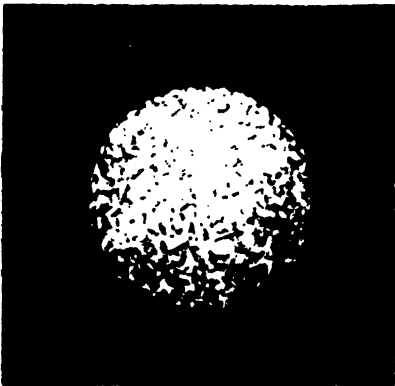


Рис. 8.19. Типичная спекловая картина на входной грани оптического волокна.

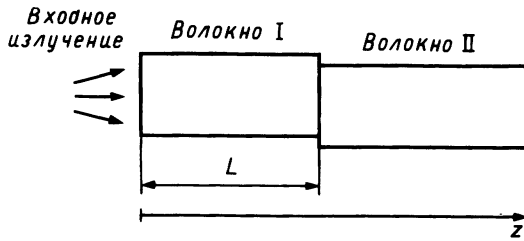


Рис. 8.20. Пример возникновения потерь за счет спеклов, образующихся при несцентрированном соединении волокон.

Вообще говоря, эти спекловые картины претерпевают случайные динамические изменения благодаря тому, что  $S(t)$  помимо детерминированной модуляции, связанной с информационным сигналом, может иметь случайную временную зависимость, связанную с вибрациями волокна или с небольшими изменениями длины волны излучения лазера. Такое постоянное изменение спекловой картины может привести к флуктуациям потерь, т. е. к стохастической амплитудной модуляции передаваемого сигнала (к так называемому *модовому шуму*) [18]. Модовый шум присутствует в любом случае, когда в волокне имеют место потери, связанные с возникновением спекловой картины в некотором сечении волоконной линии при несцентрированной стыковке двух волокон (рис. 8.20).

Из вышесказанного следует, что проблема модового шума связана с наличием когерентных источников. Действительно, если волокно возбуждается некогерентными источниками (например, светодиодом), соотношение (8.14.4) благодаря малости  $T_c$  оказывается справедливым для любой пары мод и практически любой длины волокна  $L$ , так что никакой спекловой структуры не возникает.

### 8.15. ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ МОД

В оптическом волокне взаимодействие между различными модами [приводящее в выражении (8.10.8) к зависимости коэффициентов  $c_m$  от координаты  $z$ ] обусловлено отклонениями геометрической формы оптического волокна от идеальной цилиндрической. Такое взаимодействие приводит к взаимной передаче мощности от одной моды к другой, так что мощность в моде  $P_m$  является некоторой суммой первоначальных мощностей различных мод, а скорость распространения моды по световоду равна некоторой величине, усредненной по ансамблю скоростей возбуждаемых мод, взятых с определенными весовыми

коэффициентами. Как и следовало ожидать, этот эффект является благоприятным и с точки зрения дисперсии, которая стремится к уменьшению при взаимодействии мод. Однако взаимодействие мод отрицательно сказывается на потерях, поскольку ведет к постоянно нарастающей перекачке мощности от направляемых мод в радиационные, что в итоге приводит к уходу излучения из волокна.

В подавляющем большинстве случаев взаимодействие между модами носит случайный характер, так как неоднородности в волокнах прямо связаны со случайными отклонениями в процессе изготовления и сборки волноводной структуры. Именно поэтому, а также вследствие того, что даже при известном механизме возмущения задача о распространении взаимодействующих мод аналитически разрешима лишь в очень небольшом числе случаев, эту задачу решают с помощью статистических методов.

Прежде чем рассмотреть конкретную статистическую модель, необходимо найти систему уравнений, описывающих изменение коэффициентов  $c_m(\omega, z)$  [см. выражение (8.10.8)] при наличии заданного взаимодействия. Если выбрать, например, слабонаправляющие волокна и пренебречь взаимодействием между модами, распространяющимися в противоположных направлениях, то можно показать, что для амплитуд направляемых мод, распространяющихся вперед, справедлива следующая система уравнений [1]:

$$\frac{dc_m(\omega, z)}{dz} = \sum_{n=1}^N K_{mn}(z) c_n(\omega, z) \exp\{i[\beta_m(\omega) - \beta_n(\omega)]z\} \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (8.15.1)$$

где  $N$  — общее число направляемых мод, а

$$K_{mn}(z) = \frac{\omega \epsilon_0}{4iP} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy [n^2(\rho, z) - n_0^2(\rho)] E_m(\rho) \cdot E_n^*(\rho). \quad (8.15.2)$$

В выражении (8.15.2) через  $n(\rho, z)$  обозначен коэффициент преломления реального волокна, в то время как через  $n_0(\rho)$ ,  $E_m$  и  $E_n$  обозначены соответственно показатель преломления и поперечные компоненты  $m$ -й и  $n$ -й мод идеального волокна. При записи уравнений (8.15.1) пренебрегалось взаимодействием с континуумом радиационных мод, так что в этом приближении общая мощность направляемых мод сохраняется. Кроме того, предполагалось, что для любого  $z$  реальные оптические волокна слабо отличаются от идеальных (рис. 8.21) и, следовательно, электромагнитное поле можно по-прежнему разлагать по модам идеального волокна. В более общем случае, например когда ось оптического волокна отклоняется от прямолинейной (так называемые микроизгибы; см. рис. 8.22), упомянутое разложение оказывается

неверным. В данном случае удобно ввести набор «локальных» мод, относящихся хотя и к идеальному случаю, но все же для любого  $z$  сильно напоминающих реальную картину. С учетом сделанных замечаний, переписывая систему уравнений (8.15.1) и выражение (8.15.2) для пространственных конфигураций  $E_m(\rho, z)$  и  $H_m(\rho, z)$  и соответствующих им постоянных распространения (зависящих от координаты  $z$ ), получаем соответственно

$$\frac{dc_m(\omega, z)}{dz} = \sum_{n \neq m} R_{mn}(z) \times \\ \times \exp \left\{ i \int_0^z [\beta_m(z') - \beta_n(z')] dz' \right\} c_n(\omega, z) \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (8.15.3)$$

$$R_{mn}(z) = \frac{\omega \varepsilon_0}{4P(\beta_m - \beta_n)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial n^2(\rho, z)}{\partial z} E_m(\rho, z) \cdot E_n(\rho, z); \quad (8.15.4)$$

здесь  $\rho$  и  $z$  относятся к системе координат идеального волокна.

Искажения, подобные изображенным на рис. 8.21, можно учесть, записав расстояние  $D(\phi, z)$  между границей раздела сердцевина — оболочка и осью волокна в виде

$$D(\phi, z) = a + \sum_l f_l \cos(l\phi + \psi_l). \quad (8.15.5)$$

Влияние же микроизгибов (рис. 8.22) можно учесть через величину  $n^2(\rho, z)$ , получаемую из  $n_0^2(\rho)$  подстановкой вместо  $\rho$  величины

$$\rho' = \{ [x - f(z)]^2 + [y - g(z)]^2 \}^{1/2}, \quad (8.15.6)$$

где  $f(z)$  и  $g(z)$  — функции, определяющие расстояния осей соответственно  $x$  и  $y$  от оси реального волокна.

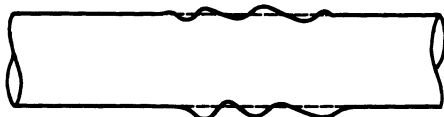


Рис. 8.21. Деформация волокна на границе раздела сердцевина — оболочка (качественное представление).

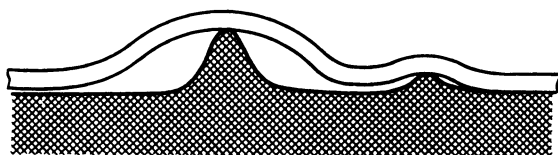


Рис. 8.22. Микроизгибы волокна.

Используя соотношение

$$\partial n^2(\rho, z)/\partial z = (\partial n_0^2(\rho')/\partial \rho')(\partial \rho'/\partial z) \quad (8.15.7)$$

и выражение (8.15.6), мы находим (в низшем порядке теории возмущений), что микроизгибы могут приводить к связи только тех мод, для которых справедливо следующее *правило отбора*:

$$\nu' - \nu = \pm 1, \quad (8.15.8)$$

где  $\nu'$  и  $\nu$  — соответствующие азимутальные числа. В случае когда параметры возмущения определяются выражением (8.15.5), выполняется правило отбора

$$\nu' - \nu = \pm l, \quad (8.15.9)$$

где  $l$  определяется номером соответствующего члена в сумме выражения (8.15.5), связывающего моды с азимутальными числами  $\nu$  и  $\nu'$ .

Системы уравнений (8.15.1) и (8.15.3) имеют аналитические решения лишь в ограниченном числе случаев, а именно тогда, когда рассматриваются только самые простые отклонения формы волокна от идеальной и взаимодействуют всего несколько мод. Если ввести в рассмотрение статистическую модель, то задача о распространении мод в оптических волокнах с учетом межмодового взаимодействия становится аналитически разрешимой в гораздо большем числе случаев, однако при этом мы получаем лишь «усредненные» величины. Точнее говоря, мы рассматриваем ансамбль макроскопически идентичных волокон, отличающихся друг от друга случайными микроскопическими дефектами, и вычисляем значимые физические величины, усредненные по этому ансамблю, которые мы будем обозначать с помощью угловых скобок  $\langle \rangle$ . Если применить операцию усреднения к системам уравнений (8.15.1) или (8.15.3), то мы получим следующую систему уравнений для средней мощности моды  $\langle P_m \rangle = P \langle |\Phi_m(z, t)|^2 \rangle_{\text{сред}}$  [см. выражение (8.14.1)] [1, 19]:

$$\frac{\partial \langle P_m(z, t) \rangle}{\partial z} + \frac{1}{v_m} \frac{\partial}{\partial t} \langle P_m(z, t) \rangle = -\alpha_m \langle P_m(z, t) \rangle + \sum_{n=1}^N h_{mn} [\langle P_n(z, t) \rangle - \langle P_m(z, t) \rangle] \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (8.15.10)$$

где  $\alpha_m$  — феноменологически введенный общий коэффициент потерь  $m$ -й моды, а

$$h_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle K_{mn}(z) K_{mn}^*(0) \rangle \exp\{i[\beta_n(\omega_0) - \beta_m(\omega_0)]z\} dz, \quad (8.15.11)$$

причем аналогичное выражение можно записать и для случая, когда вместо  $K_{mn}$  используется  $R_{mn}$ .

*Корреляционной длиной*  $L_c$  стохастической переменной  $K_{mn}(z)$

[или  $R_{mn}(z)$ ] называется максимальная длина отрезка волокна, на котором корреляционная функция  $\langle K_{mn}(z)K_{mn}^*(0) \rangle$  не равна нулю. Таким образом, корреляционная длина определяет средний пространственный период дефектов отдельного оптического волокна. При выводе системы уравнений (8.15.10) предполагалось, что значения коэффициентов  $c_m(z)$  на длине  $L_c$  существенно не меняются (*гипотеза слабой связи*).

Межмодовая связь приводит к возникновению потерь, которые можно описать в рамках механизма, связывающего направляемые и радиационные моды. Эти потери прибавляются к потерям, связанным с поглощением и рассеянием излучения в волокне и учитываемом в уравнениях (8.15.10) с помощью коэффициентов затухания  $\alpha_m$ . Сделаем соответствующие предположения относительно вида коэффициентов  $h_{mn}$  потери  $\gamma_1$ , обусловленные взаимодействием мод, можно найти, если решение системы уравнений (8.15.10) для стационарного случая искать в следующем виде:

$$P_m(z) \propto \exp[-(\alpha + \gamma_1)z]. \quad (8.15.12)$$

Как уже упоминалось выше, взаимодействие между модами нарушает дисперсию мод, что можно подтвердить, решив систему уравнений (8.15.10). Хотя эта система уравнений в общем случае неразрешима, можно прийти к простому описанию, исследуя асимптотическое поведение временной ширины  $\sigma(z)$  импульса, имеющего пренебрежимо малую начальную ширину. Если  $\langle P(z, t) \rangle$  — общая мощность, проходящая через данное сечение волокна, то определив величины

$$\bar{t} = \frac{\int_0^\infty t \langle P(z, t) \rangle dt}{\int_0^\infty \langle P(z, t) \rangle dt} \quad (8.15.13)$$

и

$$\overline{t^2} = \frac{\int_0^\infty t^2 \langle P(z, t) \rangle dt}{\int_0^\infty \langle P(z, t) \rangle dt}, \quad (8.15.14)$$

можно записать, что

$$\sigma(z) = (\overline{t^2} - \bar{t}^2)^{1/2}. \quad (8.15.15)$$

Для больших  $z$  можно показать, что

$$\sigma(z) \propto z^{1/2}, \quad (8.15.16)$$

в то время как для малых  $z$  мы имеем

$$\sigma(z) \propto z. \quad (8.15.17)$$

Выражения (8.15.17) и (8.15.16) описывают два различных предельных случая. В первом случае расстояния столь малы, что межмодовым взаимодействием можно пренебречь, поэтому зависимость дис-

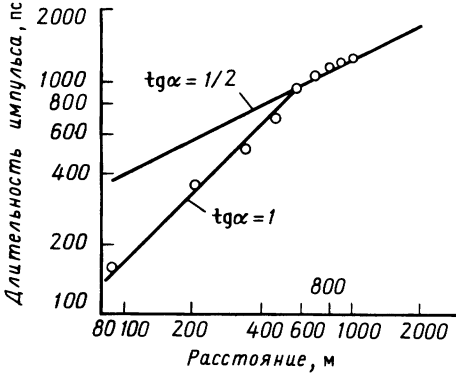


Рис. 8.23. Зависимость временной ширины импульса от расстояния вдоль оси  $z$ , пройденного им в оптическом волокне при наличии межмодового взаимодействия. (Из книги Окуси [6].)

персии от длины волокна является линейной. Во втором случае, когда волокно имеет большую длину, межмодовым взаимодействием пренебречь уже нельзя, отсюда появляется более слабая по сравнению с первым случаем зависимость дисперсии от расстояния (рис. 8.23). Эта зависимость от  $z$  в виде квадратного корня может быть эвристически объяснена с помощью простой модели, в которой рассматриваются всего две моды [20], связанные между собой таким образом, что вероятность того, что фотон, принадлежащий одной моде, перепрыгнет в другую на расстоянии  $dz$ , равна  $h dz$ , причем  $h$  не зависит от  $z$ . При этом эволюцию импульса можно описать с помощью механизма случайных блужданий, согласно которому на отрезке  $1/h$  фотон распространяется со скоростью  $v_1$  или  $v_2$ , так что среднее время его пролета  $\bar{t}$  дается выражением

$$\bar{t} = (1/h)[2/(v_1 + v_2)], \quad (8.15.18)$$

а задержка относительно этого времени пролета запишется в виде

$$|t - \bar{t}| = (1/h)|1/v_1 - 2/(v_1 + v_2)| \cong [1/(2h)]|v_2 - v_1|/v_1^2. \quad (8.15.19)$$

Согласно общей теории диффузионных процессов, среднеквадратичное значение суммарной задержки равно квадрату задержки на отдельном шаге длиной  $1/h$ , умноженному на число  $zh$  шагов на расстоянии  $z$ . Таким образом, мы имеем

$$(\overline{t^2} - \bar{t}^2)^{1/2} = \overline{(t - \bar{t})^2}^{1/2} \cong [|v_2 - v_1|/(2v_1^2)](z/h)^{1/2}. \quad (8.15.20)$$

Это выражение согласуется с (8.15.16)



## 8.16. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

Статистический метод решения задачи о распространении излучения в оптическом волокне при наличии межмодового взаимодействия, о котором шла речь в предыдущем разделе, состоит в вычислении средней мощности  $\langle P_m \rangle$  моды. Операция усреднения по ансамблю макроскопически идентичных волокон является довольно надуманной, поскольку на практике обычно имеют дело с одним волокном. Статическая природа ансамбля волокон также не позволяет в рамках какой-либо гипотезы эргодичности получить взаимное соответствие между  $\langle P_m \rangle$  и усреднением по длительному временному интервалу (что часто имеет место в статистической механике). Можно было бы попытаться с целью установления хоть какой-нибудь эргодичности найти соответствие между  $\langle P_m \rangle$  и пространственным усреднением по длине волокна, на которой укладывается много периодов нерегулярности, однако и это в конце концов оказывается невозможным.

В этих условиях остается только одно, а именно, чтобы извлечь из величины  $\langle P_m \rangle$  некоторую практическую информацию, необходимо найти флуктуации величины  $P_m$  относительно среднего значения, тогда относительно малая величина этих флуктуаций позволит надеяться на то, что средняя величина  $P_m$  совпадает с фактической. Для того чтобы это осуществить, необходимо записать систему дифференциальных уравнений для  $\langle P_m^2 \rangle$  и  $\langle P_m P_n \rangle$ . Считая, что оптическое волокно не имеет потерь и возбуждается монохроматическим сигналом, для  $\langle P_m^2 \rangle$  и  $\langle P_m P_n \rangle$  можно написать следующие уравнения [19]:

$$\frac{d}{dz} \langle P_m^2 \rangle = 2 \sum_{k \neq m} h_{mk} (\langle P_m^2 \rangle - 2 \langle P_m P_k \rangle) \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (8.16.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle P_m P_n \rangle_{m \neq n} = & 2h_{mn} \langle P_m P_n \rangle + \sum_k h_{nk} (\langle P_m P_n \rangle - \langle P_m P_k \rangle) + \\ & + \sum_k h_{mk} (\langle P_m P_n \rangle - \langle P_n P_k \rangle) \quad (m, n = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (8.16.2)$$

Теперь заметим, что система уравнений (8.15.10) в стационарном случае ( $\partial/\partial t = 0$ ) и при пренебрежимо малых потерях ( $\alpha_m = 0$ ) описывает так называемое *асимптотическое равномерное распределение мощности*, т. е. ситуацию, когда  $\langle P_m(z \rightarrow \infty) \rangle$  не зависит от выбора  $m$ . В случае монохроматической волны это свойство позволяет получить из системы уравнений (8.16.1) и (8.16.2) следующее асимптотическое со-

отношение [19]:

$$\langle P_m^2 \rangle = \frac{2N}{N+1} \langle P_m \rangle^2 \underset{N \gg 1}{\approx} 2 \langle P_m \rangle^2 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (8.16.3)$$

из которого следует довольно разочаровывающий результат, а именно 100%-ная неопределенность фактического значения  $P_m$  при известном его среднем значении.

Ситуация меняется в случае, когда сигнал имеет конечную ширину полосы  $\delta\omega$ . Можно показать [21], что при этом нормальная дисперсия

$$\sigma_m^2(z) \equiv (\langle P_m^2 \rangle - \langle P_m \rangle^2) / \langle P_m \rangle^2 \quad (8.16.4)$$

стремится к нулю при  $z \gg z_c^{(m,n)} (n, m = 1, 2, \dots, N)$ , где  $z_c^{(m,n)} = T_c / |1/v_n - 1/v_m|$  — характерное расстояние, на котором полностью исчезает корреляция между  $m$ -й и  $n$ -й модами [см. выражение (8.14.4)]. Таким образом, в этих условиях никакой статистической неопределенности в определении величины  $P_m$  для отдельного волокна не имеется.

## 8.17. ОПТИЧЕСКИЕ ВОЛОКНА, СОХРАНЯЮЩИЕ ПОЛЯРИЗАЦИЮ ИЗЛУЧЕНИЯ

Аксиально-симметричные оптические волокна, работающие в одномодовом режиме, на самом деле являются двумодовыми световодами, поскольку в них могут распространяться две ортогонально-поляризованные собственные моды [например, моды  $(LP_x)_{01}$  и  $(LP_y)_{01}$  в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления]. Если оптическое волокно обладает идеальной структурой, то очевидно, что два поляризационных состояния вырождаются, т. е. соответствующие им постоянные распространения  $\beta_x$  и  $\beta_y$  совпадают (главные оси  $x$  и  $y$  волокна выбираются произвольным образом). В реальных условиях значения  $\beta_x$  и  $\beta_y$  очень близки друг к другу, что может вызвать сильное взаимодействие двух ортогонально-поляризованных мод. В свою очередь это взаимодействие приведет к перекачке мощности (которая сопровождается процессом поляризационной конкуренции мод) на очень коротких расстояниях (от нескольких сантиметров до нескольких метров).

Для того чтобы понять, как это происходит, достаточно обратиться к теории связанных мод. Если в выражении (8.15.2) скалярное произведение поперечных составляющих собственных мод заменить на скалярное произведение их продольных составляющих, то это вы-

ражение будет описывать, в частности, эволюцию двух поляризационных состояний. В большинстве практических случаев коэффициент связи  $h_{xy}(\chi)[\chi = |\beta_x - \beta_y|$ ; см. выражение (8.15.11)], который определяет спектр мощности случайного возмущения  $K_{xy}(z)$ , обуславливающего межмодовую связь, имеет вид функции пропускания низкочастотного фильтра с пространственной частотой отсечки  $\chi_c$  [22]. Таким образом, в соответствии с выражением (8.15.11) между двумя поляризационными состояниями перекачки мощности не происходит, если выполняется условие

$$|\beta_x - \beta_y| \gg \chi_c, \quad (8.17.1)$$

и, наоборот, она становится существенной, если справедливо обратное неравенство и, уж тем более, когда  $\beta_x \approx \beta_y$ .

Однако в таких устройствах, как линии оптической связи гетеродинамического типа и волоконные датчики, выходной сигнал должен иметь заданную и постоянную поляризацию. В соответствии с проведенным выше рассмотрением один из методов получения постоянной поляризации состоит в том, чтобы сделать как можно большую разность между значениями постоянных распространения. Добиться этого можно, либо нарушив аксиальную симметрию сечения самого волокна, либо изменив геометрию его сердцевины с круговой на эллиптическую, или же создав в сердцевине поперечное напряжение с большой асимметрией [23].

Примем для определенности, что  $\beta_x > \beta_y$  и, как это обычно делается, введем нормированную величину  $B$ , называемую *двулучепреломлением моды* и определяемую выражением

$$B = 2(\beta_x - \beta_y)/(\beta_x + \beta_y) \cong (\beta_x - \beta_y)/n_0 k_0. \quad (8.17.2)$$

Типичные значения  $B$  лежат в интервале  $10^{-5} - 10^{-7}$  для обычных волокон и в интервале  $10^{-3} - 10^{-4}$  для волокон, сохраняющих поляризацию. Величина  $B$  служит характеристикой способности волокна сохранять поляризацию моды, возбуждаемой светом, поляризованным вдоль одной из главных осей. Если падающий свет поляризован под углом  $\theta$  к оси  $x$ , то, распространяясь по волокну, он пройдет через различные состояния эллиптической поляризации. Разность фаз между лучами с разными поляризациями в волокне длиной  $z$  записывается в виде

$$\Phi(z) = (\beta_x - \beta_y)z \cong B n_0 k_0 z, \quad (8.17.3)$$

Отсюда можно определить *длину биений*  $L_b$ :

$$2\pi = B n_0 k_0 L_b. \quad (8.17.4)$$

Используя определение  $L_p$ , условие (8.17.1) можно сформулировать следующим образом: пренебрежимо малая передача мощности из одного поляризационного состояния в другое имеет место только тогда, когда длина биений намного меньше типичного пространственного периода геометрических дефектов волокна.

Очевидно, что снятие вырождения в одномодовых волокнах приводит к модовой дисперсии между двумя поляризационными модами (*поляризационная дисперсия*). Согласно результатам, полученным в разд. 8.12, величина межмодовой задержки дается выражением

$$\tau_p = L(d/d\omega)(\beta_x - \beta_y), \quad (8.17.5)$$

или же, если ввести эффективный показатель преломления  $n_x = c\beta_x/\omega$  ( $n_y = c\beta_y/\omega$ ) и учесть, что обычно кварцевое стекло в ближнем ИК-диапазоне имеет низкую дисперсию ( $dn/d\omega \ll n/\omega$ ), мы имеем

$$\tau_p = L(n_x - n_y)/c + (L\omega/c)(dn_x/d\omega - dn_y/d\omega) \cong L(n_x - n_y)/c \cong LB/(c/n_0). \quad (8.17.6)$$

## 8.18. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Замечательные характеристики волокон с очень низкими потерями привели к возможности создания широкополосных передающих систем дальнего действия. Необычайная протяженность этих систем позволяет исследовать нелинейные явления, возникающие при распространении излучения в световодах. Кроме большой длины взаимодействия для проявления нелинейности оказывается существенным наличие малого диаметра у сердцевин, что имеет место в одномодовых волоконных световодах, а также использование узкополосных одночастотных лазеров. В частности, произведение длины волокна  $L$  на интенсивность  $P/(\pi a^2)$ , где  $P$  — входная мощность, а  $a$  — радиус сердцевин, может стать достаточно большим по сравнению с характерной интенсивностью при нелинейном распространении в пространственно-неограниченной среде. Таким образом, низкая нелинейная восприимчивость кварцевого стекла при относительно малой мощности компенсируется большой протяженностью волокна.

С одной стороны, нелинейные эффекты вредны и ограничивают передаваемую мощность в волоконных системах связи, а с другой, — их можно с выгодой использовать при создании специальных оптических приборов (например, *волоконных лазеров на комбинационном*

рассеянии [24]) или же для улучшения рабочего режима самого волокна (например, генерации солитонов).

Вспомним (см. гл. 2), что нелинейные оптические явления обычно описываются с помощью поляризуемости  $P$ , которую формально можно разложить в степенной ряд по напряженности электрического поля следующим образом (см. разд. 1.2.1):

$$P \sim \chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots \quad (8.18.1)$$

Первый нелинейный член  $\chi_2 E^2$ , связанный, например, с генерацией второй гармоники, в стеклах равен нулю вследствие симметрии по отношению к инверсии, поэтому практически все нелинейные эффекты, имеющие место в стеклянных оптических волокнах, связаны с членом  $\chi_3 E^3$ . Эти эффекты можно грубо разбить на два класса, различающиеся тем, колеблется ли наведенная поляризация с частотой падающего поля или нет. Ко второму классу относятся *вынужденное комбинационное рассеяние* (ВКР), *вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна* (ВРМБ) и *четырёхволновое смешение*. К первому классу относятся так называемые *самоиндуцируемые эффекты*, которые описываются, как будет показано в следующем разделе, с помощью нелинейного показателя преломления (*оптический эффект Керра*).

В данном разделе мы кратко рассмотрим ВКР и ВРМБ, поскольку именно эти явления накладывают ограничения на вводимую в волокно максимальную мощность. В следующем разделе мы изучим более подробно самоиндуцированные эффекты, которые можно описать с помощью некоторой общей теории:

Как ВКР, так и ВРМБ с классической точки зрения могут быть представлены как трехволновое взаимодействие между падающей волной (*накачкой*), *сигнальной* волной (стоксовой или мандельштамбриллюэновской) и соответственно либо волной, связанной с колебательным возмущением молекул среды, либо звуковой волной [25]. В результате такого взаимодействия часть энергии, которая вначале содержится в волне накачки, постепенно преобразуется в сигнальную волну, распространяющуюся в случае ВКР в прямом и обратном направлениях, а в случае ВРМБ только в обратном направлении. В оптических линиях связи даже в отсутствие инжектируемого сигнального поля благодаря спонтанной эмиссии всегда существует слабый сигнал, который может быть значительно усилен за счет мощности волны накачки, несущей полезную информацию.

Оба процесса обычно характеризуются *коэффициентами усиления* слабого сигнала  $G_R(\nu)$  и  $G_B(\nu)$ , которые представляют собой коэффи-

циенты в экспоненте, характеризующей зависимость спектральной интенсивности сигнала на частоте  $\nu$  от расстояния  $z$  при условии, что поглощением интенсивности волны накачки пренебрегается. Соответствующие выражения для интенсивностей записываются в виде

$$I_R(z, \nu) = I_R(0, \nu) \exp[G_R(\nu)z], \quad (8.18.2)$$

$$I_B(z, \nu) = I_B(0, \nu) \exp[G_B(\nu)z]. \quad (8.18.3)$$

Оба коэффициента усиления пропорциональны интенсивности накачки  $I_0$ . Для ВКР мы имеем следующее выражение:

$$G_R(\nu) = g(\Delta\nu)I_0, \quad (8.18.4)$$

где  $\Delta\nu = \nu_0 - \nu_S$  — разность между частотой волны накачки  $\nu_0$  и стоксовой частотой  $\nu_S$ , а  $g(\Delta\nu)$  (рис. 8.24) дается соотношением

$$g(\Delta\nu) = \sigma_0(\Delta\nu)c^2/[h\nu_S^3 n^2(\nu_S)], \quad (8.18.5)$$

где  $\sigma_0(\Delta\nu)$  — стоксово сечение на единицу объема в единичном частотном интервале, а  $n(\nu_S)$  — показатель преломления на частоте  $\nu_S$ .

Коэффициент усиления в случае ВРМБ существенно зависит от того, как соотносятся между собой ширина линии накачки  $\Delta\nu_P$  и ширина линии спонтанного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна  $\Delta\nu_B$  (значение последней лежит в пределах 15—40 МГц для плавленого кварца в полосе пропускания оптического волокна). Например, если  $\Delta\nu_P \gg \Delta\nu_B$ , то при увеличении  $\Delta\nu_P$  коэффициент усиления ВРМБ сигнала уменьшается в соответствии с отношением  $\Delta\nu_B/\Delta\nu_P$  [26]. Всякий раз, когда выполняется это условие, ВКР (его порог, т. е. значение мощности накачки, при которой данный эффект становится заметным, лежит в области 1 Вт и выше) становится доминирующим нели-

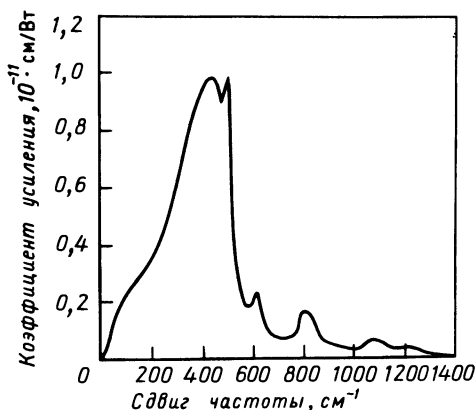


Рис. 8.24. Зависимость коэффициента усиления  $G_R$  для ВКР от разностной частоты для плавленого кварца при длине волны накачки 1,0 мкм. (Из работы Столена [24].).

нейным процессом. Если же в качестве источника накачки используется достаточно узкополосный лазер ( $\Delta\nu_p \leq 1$  МГц), то доминирующим будет ВРМБ. В последнем случае максимальная входная мощность [26], передаваемая многокилометровым волокном, будет в сильной степени ограничена именно этим эффектом; в этом случае предельная входная мощность составит несколько милливатт. При превышении порога значительная часть интенсивности волны, распространяющейся вперед и представляющей собой волну накачки, преобразуется в распространяющуюся назад сигнальную волну.

### 8.19. САМОИНДУЦИРОВАННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Рассмотрим третий член в разложении (8.18.1), описывающий поляризуемость третьего порядка  $\mathbf{P}^{(3)}$ . Допустим, что материал, из которого изготовлено волокно, является изотропным и нелинейная характеристика волокна определяется быстро протекающими электронными процессами. Тогда  $\mathbf{P}^{(3)}$  можно записать в виде [27] (см. также диссертацию Овиюнга [4], указанную в литературе к гл. 1 нашей книги)

$$\mathbf{P}^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbf{E}, \quad (8.19.1)$$

(дисперсия здесь отсутствует), где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная вакуума, а  $\chi^{(3)}$  — нелинейная восприимчивость среды. Для того чтобы выделить самоиндуцированные эффекты, в выражении (8.19.1) необходимо найти члены с частотой колебаний, примерно совпадающей с частотой поля (в точности ту же частоту они будут иметь в том случае, если поле представляет собой монохроматическую волну); тогда выражение (8.19.1) можно записать в виде

$$\mathbf{P}_{\omega}^{(3)} = \varepsilon^{(3)} \cdot \mathbf{E}_{\omega}, \quad (8.19.2)$$

где  $\mathbf{P}_{\omega}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}_{\omega}$  — фурье-образы величин  $\mathbf{P}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}$  во временной области при угловой частоте  $\omega$ , а  $\varepsilon^{(3)}$  — соответствующий тензор [см., например, выражение (8.19.4)]. Пусть в слабонаправляющий световод вводится некоторый аналитический сигнал с амплитудой  $\hat{\mathbf{E}}$  [28] [напомним, что  $\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}}^*)/2$ ; см. разд. 1.8.]. Поскольку известно, что в таком световоде поперечная компонента поля  $\mathbf{E}_T$  велика по сравнению с продольной (см. разд. 8.6.), в выражении (8.19.2) останутся лишь поперечные компоненты, так что это выражение принимает вид [29]

$$\mathbf{P}_{T\omega}^{(3)} = \varepsilon_T^{(3)} \cdot \mathbf{E}_{T\omega}, \quad (8.19.3)$$

где

$$\varepsilon_T^{(3)} = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{2} \begin{bmatrix} \hat{E}_T \cdot \hat{E}_T^* + \frac{1}{2} |\hat{E}_x|^2 & \frac{1}{2} \hat{E}_y \hat{E}_x^* \\ \frac{1}{2} \hat{E}_y^* \hat{E}_x & \hat{E}_T \cdot \hat{E}_T^* + \frac{1}{2} |\hat{E}_y|^2 \end{bmatrix}. \quad (8.19.4)$$

Для волокон, сохраняющих поляризацию (см. разд.8.17), можно положить, например,  $E_y = 0$  (как потом выяснится, нелинейное взаимодействие не смешивает ортогональные поляризации). Тогда выражение (8.19.3) сведется к

$$\mathbf{P}_{T\omega}^{(3)} = \varepsilon_2 |\hat{E}_x|^2 \mathbf{E}_{T\omega}, \quad (8.19.5)$$

где  $\varepsilon_2 = (3/4)\varepsilon_0\chi^{(3)}$ . Это же соотношение при условии, что  $\varepsilon_2 = (5/4)\varepsilon_0\chi^{(3)}$ , справедливо и для регулярных волокон, в которых конкуренция поляризаций происходит на очень коротких расстояниях и для которых в среднем  $\hat{E}_y \hat{E}_x^* = 0$ . В обоих случаях в показателе преломления можно формально выделить нелинейную составляющую, используя для этого связь между фурье-компонентами вектора смещения  $\mathbf{D}_{T\omega}$  и электрического поля  $\mathbf{E}_{T\omega}$ :

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon_1(\omega)\mathbf{E}_\omega + \varepsilon^{(3)}\mathbf{E}_\omega, \quad (8.19.6)$$

откуда в соответствии с выражением (8.19.5) получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\hat{E}_x|^2, \quad (8.19.7)$$

так что в хорошем приближении можно написать следующее выражение:

$$n(\omega) = n_1(\omega) + n_2 |\hat{E}_x|^2, \quad (8.19.8)$$

где  $n = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}$ . Линейная часть показателя преломления представляется слагаемым  $n_1 = (\varepsilon_1/\varepsilon_0)^{1/2}$ , а нелинейная — слагаемым  $n_2 = \varepsilon_2/(2n_1\varepsilon_0)$ . Выражение (8.19.8) дает пример зависящего от времени (через  $|\hat{E}_x|^2$ ) показателя преломления, шкала изменения которого во времени велика по сравнению с  $1/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  представляет типичную временную шкалу изменения  $n_1(\omega)$  (см. в гл. 1 разд. 1.2 и работу [3] в литературе, указанной к этой главе). Заметим, что выражение (8.19.8) можно также переписать через интенсивность  $I$ , а именно в виде  $n = n_1 + \mathcal{N}_2 I$ , где  $\mathcal{N}_2 = 2(n_2/n_1)\xi_0$ . Для кварца  $n_1 \approx 10^{-22}(\text{М/В})^2$  и  $\mathcal{N}_2 = 5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ .

Присутствие квадратичного по электрическому полю нелинейного члена в правых частях выражений (8.19.7) и (8.19.8) приводит к появлению *эффекта Керра*. Чтобы исследовать влияние этого члена на процесс распространения света в волокне, можно либо воспользоваться непосредственно решениями уравнений Максвелла в среде с диэлектрической проницаемостью, определяемой выражением (8.19.7) [30], либо (как и будет сделано в дальнейшем) применить теорию связанных мод, рассмотренную в разд. 8.15 (см. также разд. 8.17), устанавливая связь нелинейной компоненты показателя преломления с нарушениями регулярности волокна.



Прежде чем продолжить обсуждение, с целью обобщения рассматриваемого формализма на случаи, когда основную роль играют волны, распространяющиеся назад, выражение для поля внутри волокна необходимо переписать в виде

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(\rho, z, t) &= \hat{E}_x^+(\rho, z, t) + \hat{E}_x^-(\rho, z, t) = \\ &= \sum_m \tilde{E}_m(\rho) \{ \exp[-i\beta_m(\omega_0)z + i\omega_0 t] \Phi_m^+(z, t) + \\ &\quad + \exp[i\beta_m(\omega_0)z + i\omega_0 t] \Phi_m^-(z, t) \},\end{aligned}\quad (8.19.9)$$

где

$$\Phi_m^\pm = \int_0^\infty \exp\{i(\omega - \omega_0)t \mp i[\beta_m(\omega) - \beta_m(\omega_0)]z\} c_m^\pm(\omega, z) d\omega. \quad (8.19.10)$$

Здесь  $\tilde{E}_m(\rho) = E_m \cdot \hat{x}$ , причем  $\hat{x}$  — единичный вектор, параллельный оси  $x$ . Выражение (8.19.9) представляет собой естественное обобщение выражения (8.10.10) на случай, когда волной, распространяющейся назад, пренебречь нельзя. В соответствии с этим теорию связанных мод необходимо модифицировать таким образом, чтобы учесть взаимодействие прямых и обратных волн. При этом система уравнений, описывающая изменение коэффициентов  $c_m^\pm$ , запишется в виде [1]

$$\begin{aligned}\frac{dc_m^{(+)}(\omega, z)}{dz} &= \sum_n [K_{mn}^{+,+} \exp\{i[\beta_m(\omega) - \beta_n(\omega)]z\} c_n^+(\omega, z) + \\ &\quad + K_{mn}^{+,-} \exp\{i[\beta_m(\omega) + \beta_n(\omega)]z\} c_n^-(\omega, z)], \\ \frac{dc_m^{(-)}(\omega, z)}{dz} &= \sum_n [K_{mn}^{-,+} \exp\{-i[\beta_m(\omega) + \beta_n(\omega)]z\} c_n^+(\omega, z) + \\ &\quad + K_{mn}^{-,-} \exp\{-i[\beta_m(\omega) - \beta_n(\omega)]z\} c_n^-(\omega, z)],\end{aligned}\quad (8.19.11)$$

а коэффициенты связи в соответствии с (8.19.7) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}K_{mn}^{p,q} &= \frac{p\omega\varepsilon_0}{4iP} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy |\hat{E}_x(\rho, z, t)|^2 \tilde{E}_m(\rho) \tilde{E}_n(\rho) = \\ &= \frac{p\omega\varepsilon_2}{4iP} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy |\hat{E}_x(\rho, z, t)|^2 \tilde{E}_m(\rho) \tilde{E}_n(\rho).\end{aligned}\quad (8.19.12)$$

Из уравнений (8.19.11) можно получить следующую систему уравнений для  $\Phi_m^\pm$  [31]:

$$L_m^+ \Phi_m^+ = -2i \left( \sum_{n \neq m} R_{mn} |\Phi_n^+|^2 + \frac{1}{2} R_{mm} |\Phi_m^+|^2 \right) \Phi_m^+ - 2i \sum_n R_{mn} |\Phi_n^-|^2 \Phi_m^+ -$$

$$\begin{aligned}
& - 2i \sum_{n \neq m} R_{mn} \Phi_n^+ \Phi_n^- \Phi_m^{-*}, \\
L_m^- \Phi_m^- &= 2i \left( \sum_{n \neq m} R_{mn} |\Phi_n^-|^2 + \frac{1}{2} R_{mm} |\Phi_m^-|^2 \right) \Phi_m^- + 2i \sum_n R_{mn} |\Phi_n^+|^2 \Phi_m^- + \\
& + 2i \sum_{n \neq m} R_{mn} \Phi_n^+ \Phi_n^- \Phi_m^{+*} \quad (n, m = 1, 2, \dots, N), \quad (8.19.13)
\end{aligned}$$

где коэффициенты связи  $R_{mn}$  записываются через интегралы перекрытия пространственных конфигураций различных мод:

$$R_{mn} = k_0 n_2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \tilde{E}_m^2(\rho) \tilde{E}_n^2(\rho)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \tilde{E}_m^2(\rho)}, \quad (8.19.14)$$

а дифференциальные операторы  $L_m^\pm$  определяются выражением

$$L_m^\pm = \frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{1}{v_m} \frac{\partial}{\partial t} \mp \frac{i}{2A_m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mp \frac{1}{3! B_m} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \pm \frac{i}{4! C_m} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \dots, \quad (8.19.15)$$

где  $v_m$  — групповая скорость [см. выражение (8.12.2)] и  $A_m$  — групповая дисперсия второго порядка:

$$A_m = (d^2 \beta_m / d\omega^2)^{-1}|_{\omega=\omega_0}, \quad (8.19.16)$$

а  $B_m, C_m$  — групповые дисперсии более высших порядков:

$$B_m = (d^3 \beta_m / d\omega^3)^{-1}|_{\omega=\omega_0}, \quad C_m = (d^4 \beta_m / d\omega^4)^{-1}|_{\omega=\omega_0}, \dots \quad (8.19.17)$$

В частности, если  $\tilde{E}_m(\rho)$  выбрать таким образом, чтобы

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_m^2(\rho) dx dy = 1, \quad (8.19.18)$$

то выражения для  $R_{mm}$  можно переписать в виде

$$R_{mm} = k_0 n_2 / \sigma_m, \quad (8.19.19)$$

где  $\sigma_m$  — эффективная площадь  $m$ -й моды [29].

Система уравнений (8.19.13) является основой для описания различного типа нелинейных эффектов, имеющих место при распространении оптического сигнала в длинном волокне, а именно *фазовой самомодуляции, солитонов и вырожденного четырехволнового смешения*, о которых речь пойдет ниже.

### 8.19.1. Фазовая самомодуляция

Предположим, что в волокне длиной  $L$  входное поле имеет место только при  $z = 0$ , так что никакой обратной волны не возбуждается в

соответствии с системой уравнений (8.19.13), из которой следует  $\Phi_m^-(z, t) = 0$  (для любого  $m$ ), если  $\Phi_m^-(z = L, t) = 0$  (для любого  $m$ ). В случае когда мы имеем дело с одномодовым волокном, система уравнений (8.19.13) сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению

$$(\partial/\partial z + (1/v_1)(\partial/\partial t) - [i/(2A_1)](\partial^2/\partial t^2))\Phi_1^+ = -iR_{11}|\Phi_1^+|^2\Phi_1^+ \quad (8.19.20)$$

где мы пренебрегли дисперсией более высокого порядка, чем второй. Из структуры этого уравнения хорошо видно, что поведение распространяющегося в волокне импульса зависит от относительных вкладов диффузионного члена  $[-i/(2A_1)]\partial^2/\partial t^2$ , учитывающего хроматическую дисперсию, и нелинейного члена  $-iR_{11}|\Phi_1^+|^2\Phi_1^+$ . Действительно [за исключением тех случаев, когда этими членами можно пренебречь и уравнение (8.19.20) имеет неискаженное решение типа  $\Phi_1(z, t) = \Phi_1(z = 0, t - z/v_1)$ ], если преобладает диффузионный член, то вследствие хроматической дисперсии инжектированный (при  $z = 0$ ) импульс подвергается временному уширению, а если преобладает нелинейный член, то фаза инжектированного импульса подвергается модуляции. Данное утверждение становится понятным, если внимательно взглянуть на решения уравнения (8.19.20), которые соответственно для дисперсионного и нелинейного режимов записываются в виде

$$\Phi_1^+(z, t) = \left(-\frac{iA_1}{2\pi z}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\left(\frac{A_1}{2z}\right)\left[t' - \left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right]^2\right\} \Phi_1^+(z = 0, t) dt', \quad (8.19.21)$$

$$\Phi_1^+(z, t) = \exp\left[-iR_{11}\left|\Phi_1^+(z = 0, t - \frac{z}{v_1})\right|^2 z\right] \Phi_1^+(z = 0, t - \frac{z}{v_1}). \quad (8.19.22)$$

Вообще говоря, уравнение (8.19.20), если в него входят как диффузионный, так и нелинейный члены, не допускает аналитических решений. Поэтому необходимо прибегнуть к приближенным или численным расчетам, вид которых во многом определяется соотношением между этими двумя членами. Анализируя уравнение (8.19.22), можно показать, что мгновенная частота поля в некотором приближении дается выражением

$$\omega(t) = \omega_0 - R_{11}(\partial/\partial t)|\Phi_1^+(z = 0, t - z/v_1)|^2 z. \quad (8.19.23)$$

Таким образом, на переднем фронте импульса все частоты претерпевают сдвиг вниз, в то время как на заднем фронте частоты сдвинуты вверх. Отсюда следует, что в случае *нормальной дисперсии* (см. разд. 1.2)  $A_1 > 0$ ,  $\lambda \leq 1,3$  мкм для плавленого кварца), т. е. когда групповая скорость  $v_1$  становится меньше для более высоких частот, измене-

ние частоты из-за нелинейной *фазовой самомодуляции* приведет к уширению импульса, в то время как в случае *аномальной дисперсии* ( $A_1 < 0$ ,  $\lambda \geq 1,3$  мкм для плавленого кварца) возникает сжатие импульса [32, 33].

### 8.19.2. Солитоны

В разд. 8.19.1 мы показали, что в режиме с аномальной дисперсией уширение импульса, вызванное хроматической дисперсией, может быть скомпенсировано соответствующей наведенной нелинейностью; когда устанавливается точный баланс между этими механизмами, огибающая оптического импульса, как можно показать, принимает форму *солитона* [34], который распространяется без искажений. Указанное свойство подтверждается наличием у уравнения (8.19.20) точного решения вида

$$\Phi_1^+(z, t) = \Phi_0 \exp[iz/(2A_1\tau^2)] \operatorname{sch} [(t - z/v_1)/\tau], \quad (8.19.24)$$

при условии что выполняется следующее условие баланса между амплитудой  $|\Phi_0|$  и временной шириной  $\tau$  импульса при  $z = 0$ :

$$-1/(A_1\tau^2) = R_{11}|\Phi_0|^2. \quad (8.19.25)$$

Огибающая указанного выше *основного солитона* распространяется без изменения своей формы с групповой скоростью  $v_1$ , совпадающей со скоростью рассматриваемой моды.

Помимо основного солитона, определяемого выражением (8.19.24), существуют и другие солитоны, так называемые *солитоны высших порядков* [35, 36], для которых характерно периодическое по  $z$  изменение формы импульса и которые представляют собой решения уравнения (8.19.20), удовлетворяющие следующему граничному условию:

$$\Phi_1^+(z = 0, t) = N\Phi_0 \operatorname{sch} .(t/\tau), \quad (8.19.26)$$

где  $N$  — целое число ( $\geq 2$ ), а  $|\Phi_0|$  и  $\tau$  связаны по-прежнему соотношением (8.19.25). Используя численные методы, можно показать, что в процессе распространения импульса по волокну его форма сначала сжимается, а затем начинает изменяться более сложным образом, включающим в себя периодическую последовательность сжатий и расщеплений (рис. 8.25) с периодом  $z_0$  [33, 37], определяемым выражением

$$z_0 = (\pi/2)\tau^2|A_1|. \quad (8.19.27)$$

Необходимо упомянуть и о важном значении солитонов в решении такой проблемы, как увеличение скорости передачи информации по одномодовым оптическим волокнам. Интересующиеся читатели мо-

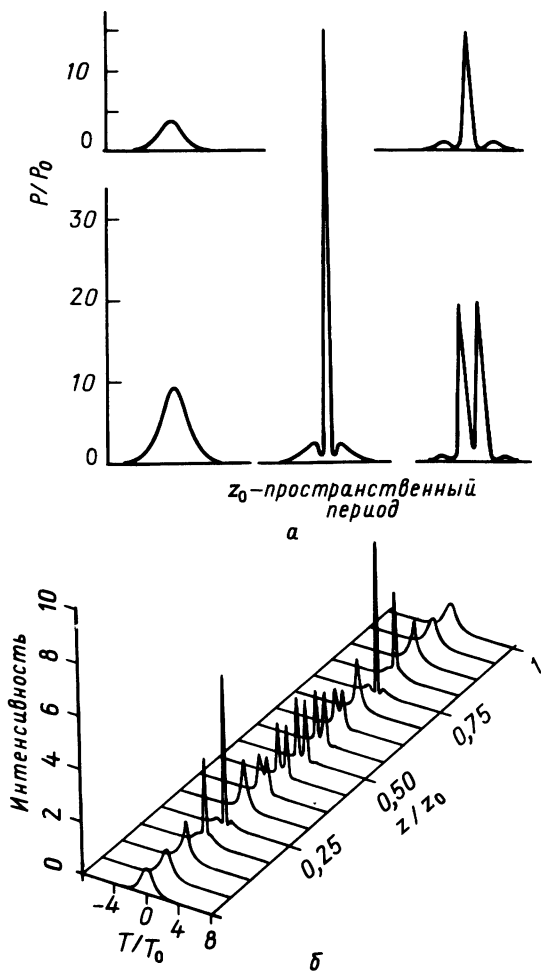


Рис. 8.25. *a* — распределение относительной интенсивности  $P/P_0 = |\Phi_0(z, t)|^2 / |\Phi_0|^2$  для солитонов высших порядков при  $N = 2$  (верхние кривые) и  $N = 3$  (нижние кривые) при нескольких фиксированных значениях параметра  $z/z_0$  (равного соответственно  $10^{-1}$  и  $5 \cdot 10^{-1}$  для верхних кривых и  $10^{-1}$ ,  $25 \cdot 10^{-2}$  и  $5 \cdot 10^{-1}$  для нижних кривых) в зависимости от параметра  $s = (t - z/v)/\tau$  [из работы Молленауэра и Столена (1982), указанной в библиографии]; *б* — изменение величины  $P/P_0$  в зависимости от отношения  $T/T_0 = s$  для различных последовательных сечений волокна [см. выражения (8.19.24) — (8.19.26)]. [Из работы Столена (1984), указанной в библиографии.]

гут получить более обширную информацию в статье Хасегавы и Ко-  
дамы [38].

### 8.19.3. Вырожденное четырехволновое смешение

Рассмотрим ситуацию, схематически представленную рис. 8.26, когда на входе в волокно присутствуют одновременно три поля  $E_i^+$ ,  $E_p^+$  и  $E_p^-$  с одной и той же центральной частотой  $\omega_0$ , которые возбуждают соответственно распространяющуюся вперед моду  $l$  при  $z = 0$  (сигнальную моду) и две противоположно направленные моды  $p \neq l$  при  $z = 0$  и  $z = L$  (моды накачки). Общая теория, представленная в разд. 8.19, позволяет предсказать как порог появления моды  $l$ , распространяющейся назад, так и эволюцию медленноменяющихся амплитуд  $\Phi_i^+$ ,  $\Phi_i^-$ ,  $\Phi_p^+$  и  $\Phi_p^-$ , поведение которых описывается системой уравнений (8.19.13). Считая, что выполняется условие сильной накачки, т. е.  $|\Phi_p^+|$ ,  $|\Phi_p^-| \gg |\Phi_i^+|$ ,  $|\Phi_i^-|$ , можно написать следующую систему уравнений:

$$L_p^+ \Phi_p^+ = -iR_{pp}(|\Phi_p^+|^2 + 2|\Phi_p^-|^2)\Phi_p^+, \quad (8.19.28)$$

$$L_p^- \Phi_p^- = iR_{pp}(|\Phi_p^-|^2 + 2|\Phi_p^+|^2)\Phi_p^-,$$

$$L_i^+ \Phi_i^+ = -2iR_{ip}(|\Phi_p^+|^2 + |\Phi_p^-|^2)\Phi_i^+ - 2iR_{ip}\Phi_p^+\Phi_p^-\Phi_i^{+*},$$

$$L_i^- \Phi_i^- = 2iR_{ip}(|\Phi_p^+|^2 + |\Phi_p^-|^2)\Phi_i^- + 2iR_{ip}\Phi_p^+\Phi_p^-\Phi_i^{-*}. \quad (8.19.29)$$

Система уравнений (8.19.28) решается независимо от системы (8.19.29), и в случае стационарной накачки эти решения имеют вид

$$\Phi_p^+(z) = \Phi_p^+(0) \exp\{-iR_{pp}[|\Phi_p^+(0)|^2 + 2|\Phi_p^-(L)|^2]z\},$$

$$\Phi_p^-(z) = \Phi_p^-(L) \exp\{iR_{pp}[|\Phi_p^-(L)|^2 + 2|\Phi_p^+(0)|^2](z-L)\}. \quad (8.19.30)$$

Таким образом, член  $\Phi_p^+\Phi_p^-$  в уравнениях (8.19.29) записывается как

$$\Phi_p^+(z)\Phi_p^-(z) = \Phi_p^+(0)\Phi_p^-(L) \exp\{iR_{pp}[|\Phi_p^+(0)|^2 - |\Phi_p^-(L)|^2]z\} \times$$

$$\times \exp\{-iR_{pp}[|\Phi_p^-(L)|^2 + 2|\Phi_p^+(0)|^2]L\} \quad (8.19.31)$$

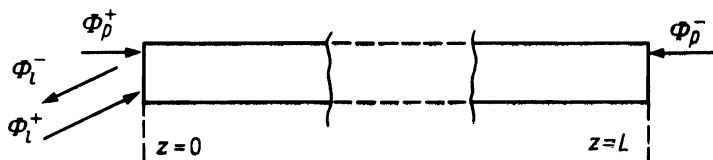


Рис. 8.26. Схема четырехволнового смешения в оптическом волокне.

и не зависит от  $z$ , только если  $|\Phi_p^+(0)|^2 = |\Phi_p^-(L)|^2$ . Оставаясь в рамках гипотезы сильной накачки и определяя величины

$$S_{ip} = 2R_{ip} [|\Phi_p^+(0)|^2 + |\Phi_p^-(L)|^2], \quad (8.19.32)$$

$$T_{ip} = 2R_{ip} \Phi_p^+(z) \Phi_p^-(z), \quad (8.19.33)$$

систему уравнений (8.19.29) можно записать в виде

$$L_i^+ \Phi_i^+ = iS_{ip} \Phi_i^+ - iT_{ip} \Phi_i^{-*}, \quad L_i^- \Phi_i^- = iS_{ip} \Phi_i^- + iT_{ip} \Phi_i^{+*}, \quad (8.19.34)$$

Эта система уравнений описывает *вырожденное четырехволновое смещение* поля внутри оптического волокна (термин “вырожденное” применяется потому, что сигнальная волна и волна накачки имеют одну и ту же центральную частоту  $\omega_0$ ). В частности, в стационарном случае ( $L_i^+ = L_i^- = d/dz$ ) из (8.19.34) мы получаем хорошо известные уравнения, которые можно найти в литературе [30, 39]. Решения этих уравнений записываются в виде

$$\Phi_i^+(z) = \exp(-iS_{ip}z) \frac{\cos[|T_{ip}|(z-L)]}{\cos(|T_{ip}|L)} \Phi_i^+(z=0), \quad (8.19.35)$$

$$\Phi_i^-(z) = i \exp(iS_{ip}z) \frac{T_{ip}}{|T_{ip}|} \frac{\sin[|T_{ip}|(z-L)]}{\cos(|T_{ip}|L)} \Phi_i^{+*}(z=0).$$

При  $z = 0$  имеем

$$\Phi_i^-(z=0) = Q_{ip} \Phi_i^{+*}(z=0), \quad (8.19.36)$$

причем

$$Q_{ip} = -i(T_{ip}/|T_{ip}|) \operatorname{tg}(|T_{ip}|L), \quad (8.19.37)$$

Отсюда следует, что мода, распространяющаяся назад и обусловленная нелинейным взаимодействием накачки со средой, в свою очередь порождает при  $z = 0$  сопряженную с ней по фазе моду (“реплику”), распространяющуюся вперед, которая затем усиливается в случае  $|\operatorname{tg}(|T_{ip}|L)| > 1$  и ослабляется в случае  $|\operatorname{tg}(|T_{ip}|L)| < 1$ .

Представленный выше результат можно обобщить на случай, когда несущий изображение луч возбуждает определенное число мод, распространяющихся вперед, амплитуды которых связаны с амплитудами противоположно направленных мод соотношением (8.19.36). В этом случае осталось только проверить, в какой степени данная ситуация похожа на ту, которая возникает при оптическом *обращении волнового фронта* [40] в объеме нелинейных кристаллов, где волна, распространяющаяся назад при  $z = 0$ , несет фазосопряженную картину распределения интенсивностей в падающей волне, что в случае монохроматических волн записывается в виде

$$E_x^-(\rho, z=0) \propto E_x^{+*}(\rho, z=0). \quad (8.19.38)$$

Используя соотношения (8.19.9), (8.19.33) и (8.19.36), в приближении слабого сигнала ( $|T_{lp}|L \ll 1$ ) можно написать следующее выражение:

$$E_x^-(\rho, z=0) = -2i\Phi_p^+ \Phi_p^- L \sum_l \tilde{E}_l(\rho) R_{lp} \Phi_l^{+*}(z=0), \quad (8.19.39)$$

которое можно сравнить с выражением

$$E_x^+(\rho, z=0) = \sum_l \tilde{E}_l(\rho) \Phi_l^+(z=0). \quad (8.19.40)$$

Из анализа выражений (8.19.39) и (8.19.40) становится понятным тот факт, что обращение волнового фронта возникает только тогда, когда коэффициенты  $R_{lp}$  (т. е. интегралы перекрытия между  $l$ -й и  $p$ -й модами) практически не зависят от модового индекса  $l$  для рассматриваемой группы мод.

Если входной сигнал зависит от времени, то необходимо решить уравнения (8.19.29) в случае, когда  $L_l^+$  и  $L_l^-$  определяются выражением (8.19.15). Ограничиваясь рассмотрением дисперсий первого и второго порядков, т. е. записывая  $L_l^\pm$  как

$$L_l^\pm = \partial/\partial z \pm (1/v_l)(\partial/\partial t) \mp [i/(2A_l)]/(\partial^2/\partial t^2), \quad (8.19.41)$$

мы находим аналитическое решение [41], которое, в частности, представляет собой обобщение выражения (8.19.36) и записывается в виде

$$\Phi_l^-(z=0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} R(\Omega) G(\Omega) d\Omega, \quad (8.19.42)$$

где

$$G(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega t} \phi_l^{+*}(z=0, t) dt, \quad (8.19.43)$$

$$R(\Omega) = iT_{lp} \tan[f(\Omega)L] / \{i(\Omega/V_l) \operatorname{tg}[f(\Omega)L] - f(\Omega)\}, \quad (8.19.44)$$

причем  $f(\Omega) = (|T|^2 + \Omega^2/v^2)^{1/2}$ . Фазосопряженный отклик волокна таким образом аналогичен отклику оптического полосового фильтра [42]. В заключение следует заметить, что в выражения (8.19.42) — (8.19.44) не входит параметр  $A_l$ , откуда следует, что процесс обращения волнового фронта не зависит от хроматической дисперсии [41].

## ЗАДАЧИ

### Раздел 8.2

1. Выведите соотношение (8.2.5).

### Раздел 8.3

2. Вычислите отношение потока мощности, направляемого градиентным волокном [см. выражение (8.3.4)], к потоку мощности, направляемому эквивалентным волокном со ступенчатым профилем показателя преломления ( $n_0 = n_1$  и те же значения радиуса



сердцевины и показателя преломления оболочки), при условии, что возбуждение в обоих случаях осуществляется на входе в волокно одинаковыми источниками, излучающими изотропно в пределах приемного угла.

#### Раздел 8.4

3. Получите уравнение (8.4.8).

#### Раздел 8.5

4. Выведите характеристическое уравнение (8.5.20).

#### Раздел 8.6

5. Используя свойства нулей функции Бесселя  $J_\nu$ , покажите, что число волноводных мод в волокнах со ступенчатым профилем показателя преломления в пределе  $V \gg 1$  равно  $N = V^2/2$ .

6. Покажите, что число направляемых мод в градиентном волокне [см. выражение (8.3.4)] равно  $N = (V^2/2)q/(q + 2)$ . *Подсказка.* См. книгу [2, с. 257].

7. Получите выражение (8.6.2). *Подсказка.* Используйте рекуррентные свойства и асимптотическое поведение функций  $J_\nu$  и  $K_\nu$ .

#### Раздел 8.9

8. Вычислите моменты  $\Omega_l$  для произвольного градиентного волокна [см. выражение (8.3.4)].

9. Выведите выражение (8.9.13).

#### Раздел 8.10

10. Покажите, что различные моды волокна с параболическим профилем показателя преломления [см. выражение (8.7.16)] взаимно ортогональны. *Подсказка.* Вспомните, что для слабонаправляющих волокон  $\mathbf{H} \cong (\epsilon/\mu_0)^{1/2} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$ .

11. Найдите коэффициенты  $c_m(\omega, z = 0)$ , определяемые выражением (8.10.9), для волокон с параболическим профилем показателя преломления, полагая, что на вход волокна подается линейно-поляризованный гауссов пучок  $E(\rho, z = 0, t) = E_0 \exp[-\rho^2/(2R^2) + i\omega t]$  ( $R \ll a$ ). *Подсказка.* См. в предыдущей задаче.

#### Раздел 8.12

12. Используя решение задачи 5, покажите, что при  $\nu \gg 1$  справедливо выражение  $\beta_{\nu 0} = k_0 n_1 - \pi^2 M^2 / (8 k_0 n_1 a^2)$ , где  $M = \nu + 2\delta$ , а также вычислите  $T^{\text{мод}}$ .

13. Вычислите разность  $|\tau_{p+1, q} - \tau_{pq}|$  для волокна с параболическим профилем показателя преломления при наименьшем значимом порядке по  $\Delta$ .

#### Раздел 8.13

14. Получите выражение (8.13.2) при больших  $L$ , используя выражение (8.19.21) и полагая, что на вход волокна подается сигнал в виде гауссова импульса  $\Phi_1^+(z = 0, t) = \Phi_{10} \exp[-t^2/(2T_p^2)]$ .

15. Решите задачу 14, полагая что на входе волокна сигнал описывается выражением  $\Phi_1^+(z = 0, t) = \Phi_{10} \exp[-t^2/(2T_p^2)]F(t)$ , где  $F$  является стохастической величиной с корреляционной функцией  $\langle F(t')F^*(t'') \rangle = \exp(-|t' - t''|^2/T_c^2)$ .

16. Покажите, что максимальная полоса пропускания  $\Delta f$ , достижимая в одномодовом волокне, имеющем лишь хроматическую дисперсию, пропорциональна  $1/L$ , если основной вклад в  $\delta\omega$  вносит ширина полосы источника возбуждения, и пропорциональна  $1/L^{1/2}$ , если в  $\delta\omega$  основной вклад вносит уширение, связанное с частотной модуляцией направляемой моды. *Подсказка.*  $\Delta f \cong 1/T^{(\text{cr})}$ .

## Раздел 8.15

17. Используя систему уравнений (8.15.10), определите стационарное ( $\partial/\partial t = 0$ ) распределение мощности в двухмодовом волокне. *Подсказка.* Ищите частные решения вида  $\langle P_{1,2} \rangle = A_{1,2} e^{-\sigma z}$ .

## Раздел 8.16

18. Используя систему уравнений (8.15.10), покажите, что асимптотическое равномерное распределение мощности различных волноводных мод имеет место в стационарном случае при отсутствии потерь в волокне.

## Раздел 8.17

19. Рассмотрите одномодовое волокно с эллиптическим поперечным сечением и входное поле, линейно-поляризованное в направлении, образующем угол  $\pi/4$  с главными осями. Вычислите расстояние, на котором начальная мощность полностью перераспределится по двум взаимно ортогональным состояниям. *Подсказка.* См. книгу Маркузе [1, с. 157].

## Раздел 8.19

20. Получите выражение (8.19.21).

21. Используя выражение (8.19.23), выведите приближенное соотношение  $(2\tau)^2 P_0 = 1,6 \text{ Вт} \cdot \text{пс}^2$ , которое связывает  $\tau$  и пиковую мощность  $P_0$ , необходимую для возбуждения основного солитона. Считайте при этом, что  $n_2 = 1,2 \cdot 10^{-22} \text{ м}^2/\text{В}^2$ ,  $A_1 = 10^{27} \text{ см}^2/\text{с}^2$ ,  $\pi a^2 = 20 \text{ мкм}^2$ ,  $\lambda_0 = 1,3 \text{ мкм}$  и  $n_0 = 1,5$ . *Подсказка.* Покажите сначала, что для нормированной на единицу пространственной конфигурации моды  $R_{11} \cong k_0 n_2 / (\pi a^2)$ .

22. Найдите наиболее общее решение уравнения (8.19.20) в виде  $\Phi_1^+(z, t) = \exp[i(c_1 z + c_2 t)] f(t - z/v)$  при  $v \neq v_1$  [38].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Marcuse D., Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, New York, 1974.
2. Arnaud J., Beam and Fiber Optics, Academic Press, New York, 1976.
3. Unger H. G., Planar Optical Waveguides and Fibers, Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York, 1977. [Имеется перевод: Унгер Х.-Т. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980.]
4. Midwinter J. E., Optical Fibers for Transmission, Wiley, New York, 1979.
5. Adams M. J., An Introduction to Optical Waveguides, Wiley, New York, 1981. [Имеется перевод: Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.]
6. Okoshi T., Optical Fibers, Academic Press, New York, 1982.
7. Snyder A. W., Love J. D., Optical Waveguide Theory, Chapman and Hall, London, 1983. [Имеется перевод: Снайдер А., Лав Д. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987.]
8. Jeunhomme L. B., Single-Mode Fiber Optics Principles and Applications, Dekker, New York, 1983.
9. Gloge D., Appl. Opt., 10, 2252 (1971).
10. Snyder A. W., Proc. IEEE, 69, 6 (1981). [Имеется перевод: Снайдер А. — ТИИЭР, 1981, т. 69, № 1, с. 7.]

11. *Gambling W. A., Matsumura H.*, Opt. Quantum Elect., **10**, 31 (1978).
12. *Stewart W. J.*, Electron. Lett., **16**, 380 (1980).
13. *Hussey C. D., Pask C.*, Proc. IEEE, **129**, 123 (1982).
14. *Gloge D.*, Rep. Prog. Phys., **42**, 1777 (1979).
15. *Gloge D.*, Appl. Opt., **10**, 2442 (1971).
16. *Gambling W. A., Matsumura H., Ragdale C. M.*, IEEE Microwave Opt. Acoust., **3**, 239 (1979).
17. *Crosignani B., Daino B., Di Porto P.*, J. Opt. Soc. Am., **66**, 1312 (1976).
18. *Epworth R. E.*, Laser Focus, **17**, 109 (1981).
19. *Crosignani B., Daino B., Di Porto P.*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **MTT-23**, 416 (1975).
20. *Kawakami S., Ikeda M.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-14**, 608 (1978).
21. *Crosignani B., Wabnitz S., Di Porto P.*, Opt. Lett., **9**, 371 (1984).
22. *Kaminow I. P.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-17**, 15 (1981).
23. *Okoshi T.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-17**, 879 (1981).
24. *Stolen R. H.* — In: Fiber and Integrated Optics (ed. D.B. Ostrowsky), Plenum, New York, 1979, p. 157—182.
25. *Smith R. G.*, Appl. Opt., **11**, 2489 (1972).
26. *Cotter D.*, J. Opt. Commun., **4**, 10 (1983).
27. *Bloembergen N.*, Nonlinear Optics, Benjamin, New York, 1965. [Имеется перевод: Бломберген Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.]
28. *Gabor D.*, J. Inst. Electr. Eng., **93**, 429 (1946).
29. *Crosignani B., Cutolo A., Di Porto P.*, J. Opt. Soc. Am., **72**, 1136 (1982).
30. *Yariv A., AuYeung J., Fekete D., Pepper D.*, Appl. Phys. Lett., **32**, 635 (1978).
31. *Crosignani B.* — In: New Directions in Guided Wave and Coherent Optics (eds. D. B. Ostrowsky, E. Spitz), Nijhoff, The Hague, 1984, p. 23—41.
32. *Stolen R.H.* — In: Optical Fiber Telecommunications (eds. S. E. Miller, A. G. Chynoweth), Academic Press, New York, 1979, p. 125—150.
33. *Mollenauer L. F., Stolen R. H., Gordon J. P.*, Phys. Rev. Lett., **45**, 1095 (1980).
34. *Hasegawa A., Tappert F.*, Appl. Phys. Lett., **23**, 142 (1973).
35. *Захаров В. Е., Шабам А. Б.* — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1627.
36. *Satsuma J., Yajima N.*, Suppl. Prog. Theor. Phys., No. 55, 284 (1974).
37. *Stolen R. H., Mollenauer L. F., Tomlinson W. J.*, Opt. Lett., **8**, 186 (1983).
38. *Hasegawa A., Kodama Y.*, Proc. IEEE, **69**, 1145, 1981. [Имеется перевод: А.Хасэгава, Ю. Кодاما. — ТИИЭР, 1981, т. 69, № 9, с. 57].
39. *Hellwarth R. W.*, IEEE J. Quantum Electron., **QE-15**, 101 (1979).
40. Optical Phase Conjugation (ed. R. A. Fisher), Academic Press, New York, 1983.
41. *Crosignani B., Di Porto P.*, Opt. Lett., **7**, 489 (1982).
42. *Pepper D. V., Abrams R. L.*, Opt. Lett., **3**, 212 (1978).

## БИБЛИОГРАФИЯ

- Keiser G. E.*, Optical Fiber Communications, McGraw-Hill, New York, 1983.
- Mollenauer L. F., Stolen R. H.*, Laser Focus, **18**, 193 (1982).
- Sharma A. B., Halme S. L., Butusov M. M.*, Optical Fiber Systems and their Components, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1981.
- Stolen R. H.* — In: New Directions in Guided Wave and Coherent Optics (eds. D. B. Ostrowsky, E. Spitz), Nijhoff, The Hague, 1984, p. 1—22.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(fg) = \nabla(gf) = f \nabla g + g \nabla f, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \nabla f = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g. \quad (\text{A.16})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ДИАДЫ И ИХ СВОЙСТВА

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} [b_x b_y b_z], \quad (\text{B.1})$$

$$\widetilde{\mathbf{ab}} = \mathbf{ba}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Sp}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad (\text{Б.4})$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{ab} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})[b_x b_y b_z], \quad (\text{Б.5})$$

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \begin{bmatrix} a_x d_x & a_x d_y & a_x d_z \\ a_y d_x & a_y d_y & a_y d_z \\ a_z d_x & a_z d_y & a_z d_z \end{bmatrix}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \text{Tr}(\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd}), \quad (\text{Б.7})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}, \quad (\text{Б.8})$$

$$\nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{B} = \left( \frac{\partial}{\partial x_q} A_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_q} B_{jk}, \quad (\text{Б.9})$$

$$\nabla \mathbf{A} : \nabla \mathbf{B} = \left( \frac{\partial}{\partial x_q} A_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_q} B_{ij}. \quad (\text{Б.10})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### Ортогональные полиномы

#### Полиномы Лежандра

$$P_n(z) = \frac{2^{-n}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \quad \int_{-1}^{+1} P_n(z) P_n'(z) dz = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \delta_{nn'}. \quad (\text{В.1})$$

#### Присоединенные функции Лежандра

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dz^{|m|}} P_n(z) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} P_n^m(z) P_n^m(z) dz = \\ = \frac{(n + \frac{1}{2})^{-1} (n + m)!}{(n - m)!} \delta_{nn'}, \\ \int_{-1}^{+1} P_n^m(z) P_n^m(z) (1 - z^2)^{-1} dz = \\ = \frac{(n + m)!}{(n - m)!} \delta_{mm'}, \end{array} \right. \quad (\text{В.2})$$

*Полиномы Лагерра*

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} \frac{1}{z^\alpha} e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}),$$

$$\int_0^\infty e^{-z} z^\alpha L_n^\alpha(z) L_{n'}^\alpha(z) dz = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \delta_{nn'}. \quad (\text{B.3})$$

*Полиномы Эрмита*

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_{n'}(z) dz = 2^n \pi^{1/2} n! \delta_{nn'}, \quad (\text{B.4})$$

*Круговые полиномы Цернике*

$$R_n^{(m)}(z) = \sum_{s=0}^{(1/2)(n-|m|)} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} z^{n-2s} =$$

$$= \frac{1}{[(n-|m|)/2]! |z|^{|m|}} \left( \frac{d}{dz^2} \right)^{(n-|m|)/2} [z^{n+|m|} (z^2-1)^{(n-|m|)/2}],$$

$$R_n^{(m)}(1) = 1, \quad R_n^{(n)}(z) = z^n, \quad (\text{B.5})$$

$$\int_0^1 z R_n^{(m)}(z) R_{n'}^{(m)}(z) dz = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'},$$

$$\int_0^1 z R_n^{(m)}(z) J_m(az) dz = (-1)^{(n-m)/2} \frac{J_{n+1}(a)}{a}.$$

*Скалярные сферические гармонические функции*

$$Y_0^0 = 1/(4\pi)^{1/2},$$

$$Y_1^0 = (3/4\pi)^{1/2} \cos \theta,$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp (3/8\pi)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^0 = (5/4\pi)^{1/2} (1/4)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp (5/4\pi)^{1/2} (3/2)^{1/2} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^{\pm 2} = (5/4\pi)^{1/2} (3/8)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi},$$

$$Y_3^0 = (7/4\pi)^{1/2} (1/4)^{1/2} (2 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta),$$

$$Y_3^{\pm 1} = \mp (7/4\pi)^{1/2} (3/16)^{1/2} (4 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) e^{\pm i\phi},$$

$$Y_3^{\pm 2} = (7/4\pi)^{1/2} (15/8)^{1/2} \cos \theta \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi},$$

$$Y_3^{\pm 3} = \mp (7/4\pi)^{1/2} (5/16)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}.$$

**Векторные сферические гармонические функции**

$$\begin{aligned}
Y_1^1 &= -(1/2)^{1/2} Y_1^0 \hat{e}_{+1} + (1/2)^{1/2} Y_1^0 \hat{e}_0, \\
Y_1^0 &= -(1/2)^{1/2} Y_1^{-1} \hat{e}_{+1} + (1/2)^{1/2} Y_1^0 \hat{e}_{-1}, \\
Y_1^{-1} &= -(1/2)^{1/2} Y_1^{-1} \hat{e}_0 + (1/2)^{1/2} Y_1^0 \hat{e}_{-1}, \\
Y_2^2 &= -(1/3)^{1/2} Y_2^1 \hat{e}_{+1} + (2/3)^{1/2} Y_2^2 \hat{e}_0, \\
Y_2^1 &= -(1/2)^{1/2} Y_2^0 \hat{e}_{+1} + (1/6)^{1/2} Y_2^1 \hat{e}_0 + (1/3)^{1/2} Y_2^0 \hat{e}_{-1}, \\
Y_2^0 &= -(1/2)^{1/2} Y_2^{-1} \hat{e}_{+1} + (1/2)^{1/2} Y_2^1 \hat{e}_{-1}, \\
Y_2^{-1} &= (1/3)^{1/2} Y_2^{-2} \hat{e}_{+1} - (1/6)^{1/2} Y_2^{-1} \hat{e}_0 + (1/2)^{1/2} Y_2^0 \hat{e}_{-1}, \\
Y_2^{-2} &= -(2/3)^{1/2} Y_2^{-2} \hat{e}_0 + (1/3)^{1/2} Y_2^{-1} \hat{e}_{-1},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{+1} &= -(e^{i\phi}/2^{1/2})[(\sin \theta)\hat{\rho} + (\cos \theta)\hat{\theta} + i\hat{\phi}], \\
\hat{e}_0 &= (\cos \theta)\hat{\rho} - (\sin \theta)\hat{\theta}, \\
\hat{e}_{-1} &= (e^{-i\phi}/2^{1/2})[(\sin \theta)\hat{\rho} + (\cos \theta)\hat{\theta} - i\hat{\phi}].
\end{aligned}$$

**Функция Малюжинца**

$$\begin{aligned}
M(\alpha) &= \prod_{n,m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{\alpha/\pi}{N(2n-1) + m - 1/2} \right]^2 \right\}^{(-1)^{m+1}} = \\
&= \exp \left[ \frac{i}{8\phi} \int_0^{\alpha} d\mu \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi v}{4\phi} \right) \frac{1}{\cos(v - \mu)} dv \right],
\end{aligned}$$

$$\text{где } \phi = \frac{2\pi}{N}.$$

(B.8)

$$\frac{M(\alpha + 2\phi)}{M(\alpha - 2\phi)} = \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$M \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) M \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = M^2 \frac{\pi}{2} \cos \left( \frac{\pi \alpha}{4\phi} \right),$$

$$M(\alpha + \phi) M(\alpha - \phi) = M^2(\phi) M'(\alpha).$$

**Функции Бесселя**

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu \theta) d\theta - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} t - \nu t} dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_\nu(z) &= \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{\nu t} + e^{-\nu t} \cos(\nu\pi)] e^{-z \operatorname{sh} t} dt, \\
 J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z), \\
 H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^z \operatorname{sh} t - \nu t dt, \\
 H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty - \pi i} e^z \operatorname{sh} t - \nu t dt. \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

*Модифицированные функции Бесселя*

$$\begin{aligned}
 I_\nu(z) &= e^{-i(\pi/2)\nu} J_\nu(e^{i\pi/2} z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \\
 K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}(\pi\nu) [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] = \frac{\pi^{1/2} (z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - 1/2} dt. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

*Сферические функции Бесселя*

$$\begin{aligned}
 j_n(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(z) = z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \\
 y_n(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} Y_{n+1/2}(z) = -z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \frac{\cos z}{z}, \\
 h_n^{(1)}(z) &= j_n(z) + iy_n(z) = h_n^{(2)*}(z). \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

*Функции Риккати — Бесселя*

$$\psi_n(z) = zj_n(z), \quad \zeta_n^{(1)}(z) = zh_n^{(1)}(z), \quad \zeta_n^{(2)}(z) = zh_n^{(2)}(z). \tag{B.12}$$

*Функция параболического цилиндра*

$$D_{-1/2}(z) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{1/2} K_{1/4}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \frac{z}{2} \frac{1}{\Gamma(3/4)} \int_1^\infty \frac{e^{-z^2 t/4}}{(t^2 - 1)^{1/4}} dt. \tag{B.13}$$



## Интегралы Френеля

$$C_1(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^z \cos t^2 dt ,$$

$$S_1(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^z \sin t^2 dt ,$$

$$F(z) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_z^\infty e^{-it^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [C_1(z) - iS_1(z)](1+i) \sim \quad (\text{B.14})$$

$$\sim \begin{cases} U_F(-z) + \frac{2}{2\pi^{1/2}} \frac{1}{z} e^{-i(z^2+\pi/4)} & (|z| \gg 1), \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{i\pi/4}}{\pi^{1/2}} z \left(1 - \frac{iz^2}{1!3} - \frac{z^4}{2!5} + \frac{iz^6}{3!7} + \dots\right) & (|z| \ll 1). \end{cases}$$

Примечание: для функции  $U_F$  см. выражение (B.19).

## Гудерманиан

$$gd(z) = 2 \operatorname{arctg} e^z - \pi/2. \quad (\text{B.15})$$

## Функции Эйри

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt = c_1 f(z) - c_2 g(z) ,$$

$$\operatorname{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-t^3/3 + zt} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) \right] dt = 3^{1/2} \{c_1 f(z) + c_2 g(z)\} ,$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{\Gamma(\frac{1}{3} + k)}{\Gamma(\frac{1}{3})} \frac{z^{3k}}{(3k)!}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{\Gamma(\frac{2}{3} + k)}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!} ,$$

$$c_1 = \frac{3^{-2/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} = 0,35503, \quad c_2 = \frac{3^{-1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} = 0,25882, \quad (\text{B.16})$$

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{z^{1/2}}{3} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \frac{z^{1/2}}{\pi 3^{1/2}} K_{1/3}(\zeta), \quad z > 0, \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2} ,$$

$$\operatorname{Ai}(-z) = \frac{z^{1/2}}{3} [J_{1/3}(\zeta) + J_{-1/3}(\zeta)],$$

$$\operatorname{Bi}(z) = \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)] , \quad \operatorname{Bi}(-z) = \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} [J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)].$$

*Знаковая функция*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

*Гамма-функция*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\operatorname{Re} z > 0);$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!;$$

$$\Gamma(z) \sim e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12z} + \dots\right), \quad z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{yz} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}, \quad \begin{array}{l} \text{(эйлеровское бесконечное} \\ \text{произведение)} \end{array}$$

$\gamma = 0,57721$  (константа Эйлера).

*Единичная ступенчатая функция  $U_F(x)$  комплексного аргумента  $x$*

$$U_F(-x) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Im}(xe^{-in/4}) < 0, \\ 0, & \text{для остальных } x \text{ [см. ур. (5.3.12)].} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

*Функция sinc*

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (\text{B.20})$$

*Функции Ломмеля двух переменных*

$$U_\nu(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2n} J_{\nu+2n}(z),$$

$$V_\nu(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{w}\right)^{\nu+2n} J_{\nu+2n}(z) = \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \pi \frac{\nu}{2}\right) + U_{2-\nu}(w, z). \quad (\text{B.21})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЙ В РЯД

*Разложение в ряд Тейлора*

$$f(\mathbf{r}, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f(\mathbf{r}, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \lambda^n, \quad \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k_0}, \quad (\text{Г.1})$$

где  $\lim_{N \rightarrow \infty} (f - \sum_{n=0}^N \dots) = 0$  при достаточно малых значениях  $\lambda$ .

*Асимптотическое разложение*

$$f(\mathbf{r}, \lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{r}, \lambda)}{n!} \lambda^n, \quad (\Gamma.2)$$

где  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f - \sum_{n=0}^N \dots) \lambda^N = 0$  при любых  $N$ . В случае когда функция  $f$  является решением волнового уравнения Гельмгольца [(1.1.12)], коэффициенты  $A_n$  могут быть получены интегрированием системы уравнений (2.2.8).

*Разложение по сферическим гармоническим функциям*

$$f(\mathbf{r}) = \sum C_{nm} Y_n^m(\theta, \phi). \quad (\Gamma.3)$$

*Тождество Якоби*

$$e^{iz \cos \phi} = J_0(z) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(z) \cos(s\phi). \quad (\Gamma.4)$$

*Формула Бауэра*

$$e^{iz \cos \phi} = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} i^s (2s+1) J_{s+1/2}(z) P_s(\cos \phi), \quad (\Gamma.5)$$

$$e^{-iaz^{2/2}} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-ia/4} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) J_{s+1/2} \frac{a}{4} R_2^{(0)}(z).$$

*Теорема сложения полиномов Лежандра*

$$P_n(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{+n} Y_n^{*m}(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi'); \quad (\Gamma.6)$$

здесь  $\omega$  — угол, образованный направлениями  $(\theta, \phi)$  и  $(\theta', \phi')$ .

*Произведение двух сферических гармонических функций*

$$Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m'}(\theta, \phi) = \sum_{j=|n-n'|}^{n+n'} \sum_{m''=-j}^j C_{nn'j}^{mm'm''} Y_j^{m''}(\theta, \phi); \quad (\Gamma.7)$$

здесь  $C$  — коэффициенты, называемые в различных источниках либо коэффициентами Вигнера, либо  $3j$ -символами, либо коэффициентами Клебша — Гордана. Свойства, а также таблицы со значениями этих коэффициентов можно найти, например, в книге: *Weissbluth M., Atoms and Molecules*, Academic Press, New York, 1978.

*Теорема сложения Графа для функций Бесселя*

$$J_n(\chi w) e^{im\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} J_{n+m}(\chi \rho') J_m(\chi \rho), \quad (\Gamma.8)$$

где

$$\rho < \rho', \quad w = \{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')\}^{1/2}, \quad \text{а} \quad \sin \psi = (\rho'/w) \sin(\phi - \phi').$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Пространственное преобразование Фурье*

$$F[u(x); k] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{ikx} dx,$$

$$F[u(x, y); k_x, k_y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy, \quad (\text{Д.1})$$

$$F[u(\mathbf{r}); \mathbf{k}] = \iiint_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \equiv u_{\mathbf{k}}.$$

*Временное преобразование Фурье*

$$F[u(t); \omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \equiv u_{\omega}. \quad (\text{Д.2})$$

*Пространственно-временное преобразование Фурье*

$$F[u(\mathbf{r}, t); \mathbf{k}, \omega] = \iiint_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt = u_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (\text{Д.3})$$

*Обратное преобразование Фурье*

$$F^{-1}[w(k); x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w(k) e^{-ikx} dk,$$

$$F^{-1}[w(\mathbf{k}); \mathbf{r}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} w(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (\text{Д.4})$$

$$F^{-1}[w(\mathbf{k}, \omega); \mathbf{r}, t] = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} w(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{k} d\omega.$$

*Интегральная теорема Фурье*

$$F^{-1}[F[u(\mathbf{r}', t'); \mathbf{k}, \omega]; \mathbf{r}, t] = u(\mathbf{r}, t). \quad (\text{Д.5})$$

*Фурье-преобразование свертки*

$$F[u(\mathbf{r}, t) * v(\mathbf{r}, t); \mathbf{k}, \omega] = F[u(\mathbf{r}, t); \mathbf{k}, \omega] F[v(\mathbf{r}, t); \mathbf{k}, \omega], \quad (\text{Д.6})$$

где через \* обозначен оператор свертки

$$u(\mathbf{r}, t) * v(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') v(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'$$

*Преобразование Ханкеля  $m$ -го порядка*

$$H_m[u(\rho); \chi] = \int_0^{\infty} u(\rho) J_m(\chi\rho) \rho d\rho. \quad (\text{Д.7})$$

*Интегральная теорема Ханкеля*

$$H_m[H_m[u(\rho'); \chi]; \rho] = u(\rho). \quad (\text{Д.8})$$

*Соотношение между преобразованиями Фурье и Ханкеля*

Пусть функция  $u(x, y)$  зависит только от  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ; тогда

$$F[u(\rho); k_x, k_y] = 2\pi H_0[u(\rho); \rho]. \quad (\text{Д.9})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$e^{i\pi/4} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} g(s) e^{-ikh(s)} ds \sim I_{\text{sp}} + I_{\text{ep}}, \quad (\text{Е.1})$$

$$I_{\text{sp}} = \frac{e^{i(1-\varepsilon)\pi/4 - ikh\bar{a}}}{|h''(\bar{a})|^{1/2}} g(\bar{a}) + O(k^{-1}),$$

$$I_{\text{ep}} = \frac{e^{-i\pi/4 - ikh(0)}}{(2\pi k)^{1/2}} \frac{g(0)}{h'(0)} + O(k^{-3/2}) - \quad (g(0) \neq 0) ,$$

$$- \frac{e^{i\pi/4 - ikh(0)}}{k(2\pi k)^{1/2}} \frac{g'(0)}{h'(0)^2} + O(k^{-5/2}) \quad (g(0) = 0);$$

|  |   |
|--|---|
| $f(x)$   | $g(y) = \int_0^\infty f(x)(xy)^{1/2} J_\nu(xy) dx = y^{1/2} H_\nu[x^{1/2}f; y]$   |
| $x^{1/2}/(b^2 + x^2)$  | $y^{1/2} K_0(by) \quad (\nu = 0)$   |
| $x^{1/2}(a^2 + x^2)^{-1/2}$  | $\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} K_{1/2}(ay) \quad (\nu = 0)$   |
| $x^{1/2} e^{iax^2}$  | $\frac{\pi^{1/2}}{8} \left(\frac{y}{a}\right)^{3/2} \left[ J_{\nu/2+1/2} \frac{y^2}{8a} + i J_{(\nu-1)/2} \frac{y^2}{8a} \right] \times$<br>$\times \exp\left[-i\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\nu\pi}{4}\right)\right]$                                |
| $x^{\nu+1/2} e^{-ax^2/2} L_n^\nu(ax^2)$                                | $(-1)^n \frac{1}{a^{\nu+1}} e^{-y^2/2a} y^{\nu+1/2} L_n^\nu\left(\frac{y^2}{a}\right)$  |
| $x^{1/2} e^{iax^2}$  | $\frac{i}{2a} y^{1/2} e^{-iy^2/(4a)} \quad (\nu = 0)$   |
| $x^{1/2} e^{-iax^2/2} \quad (x < 1)$<br>$0 \quad (x > 1)$              | $e^{-ia/4} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^\infty i^s (2s+1)$<br>$J_{s+1/2}\left(\frac{a}{4}\right) \frac{J_{2s+1}(y)}{y} =$<br>$= \frac{1}{a} \left[ -ie^{iy^2/2a} + ie^{-ia/2} V_0(a, y) - e^{-ia/2} V_1(a, y) \right]$<br>$(\nu = 0)$ |
| $x^{1/2} e^{-iax^2/2} R_4^{(0)}(x) \quad (x < 1)$<br>$0 \quad (x > 1)$ | $e^{-ia/4} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \frac{1}{y} \sum_{s=0}^\infty i^s (2s+1) J_{s+1/2}\left(\frac{a}{4}\right) \times$<br>$\times [a_s J_{2s+5}(y) + b_s J_{2s+1}(y) +$<br>$+ c_s J_{2s-3}(y)] \quad (\nu = 0),$                             |
|  | где $a_s = \frac{3}{2} \frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)}$<br>$b_s = \frac{s(s+1)}{(2s+3)(2s-1)}$<br>$c_s = \frac{3}{2} \frac{s(s-1)}{(2s+1)(2s-1)}$   |

здесь  $\varepsilon = \text{sgn } h''(0)$ , а символами ' и '' обозначены соответственно первая и вторая производные по  $s$ , а через  $\bar{a}$  — стационарная точка.

$$e^{i\pi/4} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{\text{SDP}} \frac{f(\beta)}{\beta - \beta_p} e^{-ik\rho \cos(\beta - \phi)} d\beta \sim -\frac{i}{\rho^{1/2}} \frac{f(\phi)}{\phi - \beta_p} + O(k^{-1}) \dots \quad (\phi \neq \beta_p),$$

$$\sim (2\pi k)^{1/2} e^{i\pi/4} e^{ik\rho \cos(\phi - \beta_p)/2} G \left\{ (\beta_p - \phi) \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/2} \right\} f(\phi) + O(k^{-1}), \quad (\phi \cong \beta_p) \quad (\text{E.2})$$

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_{\Gamma} (s - s_b)^{1/2} g(s) e^{-ikh(s)} ds \sim I_{\text{SDP}} + I_{\Gamma_B},$$

где вклад от седловой точки определяется выражением

$$I_{\text{КНС}} = \frac{e^{i(1-\varepsilon)\pi/4 - ikh(s^*)}}{|h''(s^*)|^{1/2}} (s^* - s_b)^{1/2} g(s^*) + O(k^{-1}), \quad (\text{E.3})$$

причем  $\varepsilon = \text{sgn } h''(s^*)$  ( $s^*$  — седловая точка); вклад от разреза определяется выражением

$$I_{\Gamma_B} = -\frac{i}{k} \frac{e^{-ikh(s_b)}}{2^{1/2} [h'(s_b)]^{3/2}} g(s_b) + O(k^{-2}),$$

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \int_{\Gamma} (s - s_b)^{-1/2} g(s) e^{-ikh(s)} ds \sim I_{\text{КНС}} + I_{\Gamma_B}, \quad (\text{E.4})$$

где

$$I_{\text{КНС}} = \frac{e^{i(1-\varepsilon)\pi/4 - ikh(s^*)}}{|h''(s^*)|^{1/2}} (s^* - s_b)^{-1/2} g(s^*) + O(k^{-1}),$$

и

$$I_{\Gamma_B} = 2 \frac{e^{-ikh(s_b)}}{|2h'(s_b)|^{1/2}} g(s_b) + O(k^{-1}),$$

$$\int_0^\infty g(s) J_0(ks) ds \sim \frac{g(0)}{k} - \frac{g''(0)}{2k^3} + \frac{g''''(0)}{8k^5} + O(k^{-7}),$$

$$\int_0^\infty g(s) J_1(ks) ds \sim \frac{g(0)}{k} + \frac{g'(0)}{k^2} - \frac{g''''(0)}{2k^4} + O(k^{-6}),$$

(E.5)

$$\int_0^\infty g(s) e^{-\alpha ks} ds \sim \frac{g(0)}{\alpha k} + \frac{g'(0)}{(\alpha k)^2} + \frac{g''(0)}{(\alpha k)^3} + O(k^{-4}) \quad (\alpha \text{ — в общем случае комплексная величина}),$$

$$\int_0^\infty g(s) e^{-k^2 s^2} ds \sim \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{g(0)}{k} + \frac{g'(0)}{2k^2} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{g''(0)}{4k^3} + O(k^{-4}),$$

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ананьев Ю. А. 522  
Араго (Arago) 46  
Аристотель 471  
Ашкин (Ashkin) 463
- Баннинг (Banning) 199, 200  
Бергштейн (Bergstein) 535  
Бернс (Burns) 63  
Био (Biot) 46  
Бойд (Boyd) 536  
Бромвич (Bromwich) 459  
Брюкке (Brücke) 458  
Буавен (Boivin) 286  
Бэбкок (Babcock) 435  
Бэкон (Bacon) 471
- Вайнштейн Л. А. 518, 537, 538—540  
Ван ден Берг (van den Berg) 445  
Ван дер Корпут (van der Corput) 343  
Ван дер Поль (van der Pol) 459, 555  
Ван де Хюлст (van de Hulst) 35, 459, 467, 471  
Ван-Циттерт (Van Cittert) 326  
Ватсон (Watson) 287  
Вернон (Vernon) 23  
Вильсон (Wilson) 470  
Вольф (Wolf) 308, 311, 392  
Вуд (Wood) 450
- Габор (Gabor) 248  
Гаусс (Gauss) 139  
Гейффкен (Geffcken) 201, 204  
Глаубер (Glauber) 320  
Гови (Govi) 458  
Гордон (Gordon) 536  
Гуй (Gouy) 86  
Гус (Goos) 379  
Гюйгенс (Huygens) 32, 246
- Дебай (Debye) 459, 462, 466, 467  
Декарт (Descartes) 97  
Денисюк Ю. Н. 435  
Дерюгин 445  
Джаван (Javan) 551  
Дзидзик (Dziedzic) 463  
Дюфур (Dufour) 566  
Дюффо (Duffieux) 248
- Жакино (Jacquinot) 566
- Зайдель (Seidel) 143  
Зоке (Szöke) 551  
Зоммерфельд (Sommerfeld) 314, 353
- Икуно (Ikuno) 445  
Ирвайн (Irvine) 463
- Кадильяк (Cadilhac) 445  
Келлер (Keller) 315  
Клебш (Clebsch) 247, 459  
Когельник (Kogelnik) 516  
Конн (Connes) 537, 569  
Кравцов Ю. А. 358
- Лабейри (Labeyrie) 436  
Ландау Н. Дж. (Landau N. J.) 536  
Лебедев П. Н. 463  
Летохов В. С. 463  
Ли (Li) 308, 311, 529, 531, 533  
Липман (Lippmann) 445  
Лэмб (Lamb) 459, 551
- Мак-Нейл (MacNeille) 199  
Максвелл (Maxwell) 247



- Макфарлэйн (McFarlane) 551  
 Маром (Marom) 535  
 Мачмор (Muchmore) 181  
 Ми (Mie) 459  
 Мيامото (Myamoto) 392  
 Миллар (Millar) 445  
 Миногин В. Г. 463
- Нейсли (Kneisly) 95  
 Ниджбоер (Nijboer) 308  
 Ньютон (Newton) 32, 314, 472
- Орлов Ю. И. 358  
 Отто (Otto) 235
- Паск (Pask) 598  
 Пастер (Pasteur) 47  
 Перо (Perot) 561  
 Поллак (Pollack) 536  
 Поттер (Potter) 472  
 Прохоров А. М. 485  
 Пти (Petit) 445
- Рабинович (Rubinowicz) 314  
 Ригрод (Rigrod) 516, 553  
 Риттенхауз (Rittenhouse) 434  
 Роуланд (Rowland) 435  
 Рудольф (Rudolph) 435  
 Рытов С. М. 41  
 Рэлей (Rayleigh) 258, 449, 450, 458, 464
- Сигмэн (Siegman) 522, 534  
 Слепян (Slepian) 518, 536  
 Смакула (Smakula) 201  
 Смит (Smith) 138  
 Снеллиус (Snell) 97  
 Стрел (Strehl) 323  
 Стронг (Strong) 201, 435  
 Су (Hsue) 224
- Талбот (Talbot) 281  
 Тамир (Tampir) 224  
 Таунс (Townes) 485  
 Тиндаль (Tyndall) 458
- Томсон Дж. Дж. (Thomson J. J.) 526  
 Тэйлор (Taylor) 200
- Уиллис (Willis) 396
- Фабри (Fabry) 561  
 Фано (Fano) 451  
 Фейнман (Feynman) 23  
 Физо (Fizeau) 51  
 Фламан (Flamand) 436  
 Фок В. А. 459  
 Фоккема (Fokkema) 445  
 Фокс (Fox) 529, 531, 533  
 Франчия ди Торальдо (Francia di Toraldo) 248  
 Фраунгофер (Fraunhofer) 434  
 Френель (Fresnel) 47, 247
- Хайдинггер (Haidinger) 565  
 Харрисон (Harrison) 435  
 Хасси (Hussey) 598  
 Хеллоуорт (Hellwarth) 23  
 Хенхен (Haenchen) 379  
 Херпин (Herpin) 181  
 Хорвиц (Horvitz) 534
- Цернике (Zernike) 326
- Чеббол (Chabbol) 568  
 Честер (Chester) 384
- Шавлов (Schawlow) 485  
 Шен (Shen) 463  
 Шлафер (Schlafer) 200  
 Шмаль (Schmah) 435  
 Шродер (Schroder) 200  
 Штрейфер (Streifer) 535
- Эйри (Airy) 472  
 Эрдейи (Erdelyi) 434, 344
- Юнг (Young) 246, 314, 384
- Ясуура (Yasuura) 445

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аббе* условие синусов 296  
*Абеля* условие 237  
Аберрации волнового фронта 143  
Аберраций функция 302, 528  
— — изопланатической системы 298  
Аберрация, астигматизм 145, 308  
— кома 145, 308, 322  
— кривизна поля 145  
— сферическая 145  
*Амичи* мениск 147, 148  
Амплитудный коэффициент отражения 176  
— — пропускания 176  
Амплитуды рассеяния 461  
Аналитический сигнал 52  
Анизотропная среда 125, 126, 395  
— — слоистая 207—211  
— — отражение и пропускание 209—211  
Апланатическая система 299  
Апланатические точки сферы 147  
Аподизация 331  
*Араго* пятно 525  
Асимметрии фактор 462, 463  
Асимптотическое представление поля 359  
— разложение вектора *Пойнтинга* 80, 81  
— — поля магнитного 80  
— — — электрического 79  
— решение волнового уравнения 62—65  
Астигматическая разность пучка 132
- Бабине* принцип 265  
*Бауэра* формула 456, 458  
*Бельтрами* оператор 454  
*Бете* приближение 339  
Биений длина 621  
Блеска угол 438
- Блоха* уравнения 23  
Блоховские волны 185—188  
— — импедансы 188  
— — полосы пропускания 185  
*Бойда* — *Когельника* диаграмма устойчивости 511, 512  
Боковые волны 374, 375  
Брэгговский отражатель 215  
*Брюстера* угол 177, 178  
*Буавена* разложение 286
- Ван-Циттерта* — *Цернике* теорема 324, 326  
*Ватсона* разложение 291  
*Ватсона* — *Редже* представление 421  
Вектор гирации 46  
Векторный потенциал 13, 313  
— — сферические волны 315  
*Венцеля* — *Крамерса* — *Бриллюэна* (ВКБ) метод 157  
Взаимная интенсивность 324  
Взаимной когерентности функция 54  
Взаимности теорема 56  
Виньетирование 141, 142  
Волновая оптика 249, 250  
Волновое сопротивление вакуума 61  
— уравнение 13  
— — векторное 79  
Волновой фронт 65  
— — аналитические свойства 90—92  
— — на неплоской границе 95  
Волновых векторов поверхность 57  
Волны в движущейся среде 50, 51  
Восприимчивость интегральная комплексная 25  
Время когерентности 54  
*Вуда* аномалии 450  
Входной зрачок 141, 142

- Вынужденное рассеяние комбинационное (ВКР) 622  
 — — *Мандельштама — Бриллюэна* (ВРМБ) 622, 623  
 Выходной зрачок 141, 142
- Гамильтона* функция 135  
*Гамильтона — Якоби* уравнение. См. Эйконала уравнение  
 Гамильтонова оптика 133, 134  
 Гауссова кривизна 97, 98  
 — оптика 139  
 Гауссов пучок, дифракции угол 502, 506  
 — — отражение 377  
 — — перетяжка 502  
 — — рэлеевская длина 502  
 — — с ограниченной апертурой 309—312  
*Гельмгольца* векторное поле 254  
*Гельмгольца — Кирхгофа* теорема 254  
 — уравнение для двумерных полей 265  
 — — неоднородное 15  
 Генерация второй гармоники (ГВГ) 20, 21  
 Геодезические линзы 127—129  
 Геометрическая оптика 63  
 — — критерий применимости 260  
 — теория дифракции 295, 315, 400, 429  
 Гирочастота 58  
 Главные диэлектрические проницаемости 39  
 — радиусы кривизны 84  
 Главный луч 141  
 — угол падения 230  
 Глория 469, 470  
 Голографические решетки 436  
 Градиентные оптические элементы 119, 120  
 Граничная дифрагированная волна (ГДВ) 318  
 Граница отражения 410  
 — тени 273, 410  
*Графа* теорема сложения 282  
*Грина* функция 15, 55, 253  
 Групповая скорость 17  
*Гуса — Хенхена* эффект 377  
*Гойгенса* принцип 246, 257, 258  
 — — *Кирхгофа — Котлера* формулировка 260, 300
- Двухлучепреломление 38, 40  
 — моды 620  
 Двухосный кристалл 40  
 Дебаевское разложение 419, 422  
*Дебая* потенциалы 332  
*Джонса* матрица 36  
 Диаграмма направленности 258  
 Дигидрофосфат ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ) 42  
 Дипольное приближение 22  
 Дипольный момент 22  
 Дисперсионное уравнение 45  
 Дисперсия мод 605—607  
 — среды 17  
 — — аномальная 18  
 — — нормальная 18  
 — хроматическая 607—609  
 Дисторсия 145, 308  
 Дифракционная картина 250  
 — матрица, искривленная кромка 409  
 — расходимость 518, 519  
 — формула *Фраунгофера* 279, 285  
 — — *Френеля* 276, 277  
 Дифракционно-ограниченная система 319  
 Дифракционные потери 518  
 — решетки, применение 437, 441  
 — — разрешающая способность 447, 449  
 — — формула 437  
 — — эффективность 438, 450  
 Дифракционный коэффициент 352, 406  
 Дифракция на дифракционных решетках 434, 441  
 — — клине 404, 411  
 — — острие 390  
 — — сфере 434  
 — — цилиндре диэлектрическом 414, 415  
 Дифракция на щели 412  
 — от угла 392  
 — периодических полей 281  
 — приграничная теория 252  
 Диэлектрическая восприимчивость 12, 30  
 — проницаемость 29  
 — сфера 465  
 Добротность 478  
 Дополнительный экран 265  
*Дюпина* индикатриса 83
- Естественная оптическая активность 45, 46

- Заземленный диэлектрический волновод 220
- Зайделя* аберрации 308  
— координаты 143
- Закон дисперсии 17  
— сохранения энергии 47
- Закручивание лучей 69, 70
- Запрещенная зона 234
- Затягивание частоты 549
- Зеркало диэлектрическое 194—198  
— металлическое 194—198
- Зоммерфельда — Отта* интеграл 331
- Зоммерфельда* условие излучения 262, 263
- Иерархия средних по ансамблю 53
- Изображение когерентное 319, 324  
— некогерентное 296
- Изопланатическая система 322, 326
- Импедансные граничные условия 236
- Импульсный отклик 264, 312, 318, 321
- Инвариант наклона 113, 580
- Интерференционные фильтры 203—207
- Интерференционный порядок 437
- Ионосфера, отражение волн 73
- Канал 166
- Каустика 72—74, 86, 87  
— аналитические свойства 90, 92—95  
— гиперболическая 493  
— дифрагированных лучей 387  
— цилиндрических полей 360
- Квазимонохроматическая волна 35
- Керра* эффект 42
- Кирхгофа — Коттлера* формула 300
- Кирхгофа* приближение 339  
— принцип 402
- Клин с конечным импедансом 408—409
- Клэро* теорема 129
- Комплексный вектор *Пойнтинга* 53
- Контраст 564
- Контур наивысшего спуска (КНС) 272
- Корню* спираль 356, 357
- Корреляционная длина 615, 616
- Коши — Римана* дифференциальные уравнения 368
- Коэффициент поглощения 32
- Крамерса — Кронига* соотношения 28, 56
- Кретчманна* метод 236
- Кривизна лучей 69, 70  
— поля 308
- Кристоффеля* символы 130
- Критическая частота (частота отсечки) 589
- Круговая поляризация 33
- Кулоновская калибровка, условие 14
- Кумулятивная передаточная функция точки 335
- Лагерр-гауссовы пучки 503
- Ландау* символ 63
- Лиддана — Сакса — Теллера* соотношение 58
- Линейная поляризация 33
- Линзовый эффект 528
- Линзоподобные среды 106
- Литтроу* схема 438, 439
- Лиувилля* теорема 135
- Локализации принцип 467
- Локальная шивка полей 95—98
- Локальный импеданс 175
- Лоренцева калибровка 15  
— форма линии 205  
— функция 31
- Лунберга — Дебая* интеграл 300, 302, 303
- Лунберга — Клейна* асимптотический ряд 63, 82
- Лунберга* линза 120, 121
- Лучевая аберрация 132  
— матрица 138—143  
— поверхность 39, 395  
— скорость 39
- Магнитная индукция 11
- Майкельсона* интерферометр 54
- Максвелла* линза (рыбий глаз) 120, 121  
— уравнения 38
- Малюжинца* функция 408
- Малюса — Дюпина* теорема 68
- Материальное соотношение 16, 37
- Матрица плотности 23
- Матрица пропускания слоя. См. Характеристическая матрица

- Медленноменяющейся амплитуды приближение 515
- Меридиональные лучи 113
- Метод ковариантного дифференцирования 129
- характеристической матрицы 180—185
- Mi* коэффициент 460
- Микроволновые (СВЧ) генераторы 481
- Минковского* материальные соотношения 50
- Многослойные просветляющие покрытия 171
- Модовый шум 609
- Моментов метод 431
- Монохроматическая волна в однородной среде 31
- Мультислой 171
- импеданс блоховских волн 188
- отражение 189
- пропускание 191
- с попеременно изменяющимся показателем преломления 184, 185
- характеристическая матрица 181, 183
- Наибыстрейшего спуска контур (КНС) 368
- — метод 366
- Насыщаемый поглотитель 546
- Нарушенное полное отражение 164, 227
- Нейтрализаторы 343
- Ненаправляемые моды 594
- Необыкновенная волна 41
- Необыкновенный луч 32
- Неограниченная слоистая среда 155, 156
- Неполяризованная волна 35
- Непрозрачности полоса 170
- Нормальная конгруэнция 69
- поверхность 395
- Нормальное падение 232
- Нормальные моды 45
- Нормированная глубина резкости 310, 311
- Обыкновенная волна 41
- Обыкновенный луч 32
- Объектив микроскопа с масляной иммерсией 148
- Овалоид 40
- Одноосный кристалл 39, 40
- Однородные волны 76
- Однослойные покрытия 193
- Ома* закон 18
- Оптическая длина 122
- индикатриса 41
- интенсивность 178
- ось кристалла 40
- передаточная функция 248
- Оптические волокна 577, 578
- — градиентный профиль 578, 581
- — затухание излучения 603
- — многомодовые 591
- — модовая теория 583, 586
- — нелинейные эффекты 621
- — одномодовые 596
- — параболический профиль 592
- — слабонаправляющие 590
- — сохранение поляризации излучения 619
- — статистическая теория 618
- — ступенчатый профиль 578, 579—581
- — электромагнитные волны внутри 600
- генераторы 481—484
- координаты 142, 303
- направляющие косинусы 134
- Основное уравнение электронной оптики 126
- Отражение при нормальном угле падения 231
- Параболического цилиндра функция 364
- Параболическое приближение 279
- Параксимальное изображение 140
- приближение 102, 103
- Параметр возбуждения 549
- расстройки 31
- Перевала метод 251
- Передаточная функция 326, 327
- — точки 322, 323
- Перестройка частоты 555—560
- — дисперсионные элементы 556
- — изменение длины резонатора 555
- Плазменная частота 29
- Планарный световод 155
- Плоские волны 32, 51, 61
- Плотность инверсии населенностей 25
- Поверхностные волны 232

- Поверхностные волны в металлах 233  
 — плазмоны 234  
 Поверхность нормалей 40  
*Пойнтинга* вектор 47  
 Показатель преломления 43  
 — — аксиально-симметричное распределение 105, 106, 109, 112  
 — — комплексный 12  
 — — кусочно-постоянный профиль 170, 171  
*Поккельса* эффект 42  
 — ячейка 42  
 — — пропускание 43  
 Ползущие волны 289, 293, 294, 425  
 Полоса непрозрачности 187  
 Полусные сингулярности 217, 272  
 Поляризатор 178  
 Поляризационные светоделители 199  
 Построение луча 71  
 Преломление необыкновенного луча в одноосном кристалле 127  
 Преломленный волновой фронт 98  
 — — — главные направления и радиусы кривизны 98  
 Пропускная способность 192  
 Просветляющие покрытия 200—203  
 Пространственная частота 327  
 Пространство изображения 131  
 — предмета 131  
 Протяженного предмета поле 324  
 Псевдобрюстеровский угол 229  
*Пуанкаре* сфера
- Радуга 469—473  
 Разложение по плоским волнам 266—268  
 — — цилиндрическим волнам 282, 284  
 Разрешающая способность 312  
 Рассеяние, коэффициент 218  
 — света диэлектриками 430  
 — сферическими частицами 458  
 — телами конечных размеров 110, 451—454  
 Резкость 192  
 Резонансная двухуровневая среда 30  
 — частота 18  
 Резонаторы, *Вайнштейна* теория 537—541  
 — волновая теория 525  
 — линейные 494—497
- Резонаторы неустойчивые 520—525  
 — — дифракционная теория 542—545  
 — потери 529  
 — симметричные 530, 531, 541  
 — соотношения подобия 531  
 — телескопические 524  
 — устойчивые 512, 513, 516—525, 535  
 — — влияние разъюстировки 519  
 — — конфокальные 517—519, 536  
*Ригрода* уравнения 553  
*Робинсона* — *Прайса* метод 231  
*Рончи* интерферометр 334  
*Роуанда* круг 440  
 Рэлеевские длины волн 450  
*Рэлея* — *Джинса* формула 485  
*Рэлея* дифракционные интегралы 263, 264  
 — критерий разрешения 312
- Саггитальная фокальная линия 133  
 Самоиндуцированные нелинейные эффекты 624  
 Светосила 142  
 Связанных мод теория 215, 216, 612—617  
 Седловая точка 370, 371  
 Сила осциллятора 31  
 Сингулярных разложений метод 431  
 Скалярный потенциал 13  
 Скоростные уравнения 25  
 Смешанная характеристика 136  
*Смита* — *Гельмгольца* инвариант 141  
*Снеллиуса* закон 97, 100  
 Солитоны 629  
 Сопряженные плоскости 140  
 — точки 121  
 Спекловая структура 611, 612  
 Сравнительные интегралы 342  
 Средняя кривизна 97, 98  
 Стабилизация частоты внешним сигналом 559  
 Стационарной фазы метод 340  
 — — точки 260  
 Степень поляризации 35  
*Стокса* параметры 34, 35, 464  
 Стопа четвертьволновых пластинок 187, 192  
 Стоячей волны отношение 195  
*Стрела* отношение интенсивностей 323

- Сферические гармоники 454  
 — — векторные 457  
 — — координаты 109  
 Сферически-симметричные среды 116  
 Сшивка асимптотических решений 159
- Талбота* эффект 281  
 Тангенциальная фокальная линия 133  
 Темный барьер 163  
 Тензор диэлектрической проницаемости 20  
 Теорема площадей 26  
 Теория когерентности 52  
 Точечная характеристика 122, 134  
 Точки ветвления 217, 273  
 — возврата 87  
 — поворота 158  
 Траектории затухания 76, 77  
 Транспортные уравнения 71, 73  
 Трубка лучей 72
- Угловая дифракция, коэффициент 393  
 — характеристика 135, 136  
 Угловой спектр 268—272  
 Узловая точка 140  
*Уиллиса* формула 396  
 Унитарный оператор 418  
 Условие поперечного резонанса 219, 220  
 — сохранения заряда 15  
 Утечки волна 218, 219
- Фабри — Перо* интерферометры 561, 562  
 — — — аппаратная функция 567—569  
 — — — коэффициент пропускания 562  
 — — — применения 564—567  
 — — — составные 567  
 Фазовая аномалия 86  
 — самомодуляция 627  
 — толщина 182  
 Фазовые траектории 76  
 — фронты 76  
 Фазовый синхронизм, условие 21  
 Фазосдвигающая цепочка 483  
 Фактор формы 205  
*Ферма* принцип 124, 427  
 Физической оптики приближение 432  
*Флоке* теорема 185, 186, 213
- Фока — Леонтовича* параболическое волновое уравнение 75  
 Фокальная линия 88  
*Фокса — Ли* интегральные уравнения 527—529  
 — — метод 531—533  
*Фокса — Смита* интерферометр 558  
 Фокусировка пучков с малой апертурой 307—309  
 Фокусирующая система 299  
*Френеля* зоны 259  
 — интеграл 354, 356  
 — кольца 259  
 — коэффициент увлечения 51  
 — коэффициенты отражения 177  
 — приближение 283  
 — ромб 232  
 — формулы 177  
 — число 302  
*Френэ* уравнения 70  
 Функция профиля 597  
*Фурье* преобразование 114, 267
- Характеристическая матрица 181  
 Характеристический волновой импеданс слоя 174  
 Характеристическое уравнение 66  
*Херпина* теорема 185  
*Хилла* детерминант 214  
 — уравнение 213  
 Холодные зеркала 196, 197  
*Хорвица* критерий 544
- Цилиндрическая волна 265, 266  
 Цилиндрические координаты 108
- Черная дыра 155  
*Черны — Тернера* схема 439  
 Четвертьволновые покрытия 202  
 Четырехволновое смещение 622  
 — — вырожденное 632  
 Числовая апертура (ЧА) 142, 579
- Шлирен-метод 333
- Эберта — Фаста* схема 439

- Эйконал 62  
— комплексный 76, 107  
— уравнение 62, 65—67  
— — интегрирование 66
- Эйри* диск 247, 312  
— распределение 312  
— суммы формула 191  
— уравнение 159  
— функции 160, 342
- Экстинкции сечение 452, 454  
Экстинкция 32  
Электрическая индукция 11  
— постоянная 12  
Электрические мультипольные поля 457
- Электрических цепей теория 173  
Электрооптический эффект 41  
— — квадратичный 42  
— — линейный 42  
Электропроводность 18  
Эллипсоид показателей преломления (индексов). См. Оптическая индикатриса  
Энантиоморфизм 47  
Эталон 561, 562  
Эффективности фактор 461—463  
Эшелетт 441  
Эшелон 441
- Юнга* интерферометр 54



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Предисловие редактора перевода .....   | 5   |
| Предисловие к русскому изданию .....   | 6   |
| Предисловие .....  | 8   |
| Глава 1. Основные свойства распространения электромагнитных волн .....                         | 11  |
| 1.1. Уравнения Максвелла .....   | 11  |
| 1.2. Распространение излучения в среде с частотной дисперсией ....                             | 16  |
| 1.3. Состояние поляризации электромагнитного поля .....  | 32  |
| 1.4. Распространение волн в анизотропной среде .....   | 37  |
| 1.5. Распространение волн в средах с пространственной дисперсией                               | 43  |
| 1.6. Энергетические соотношения .....  | 47  |
| 1.7. Распространение волн в движущейся среде .....   | 50  |
| 1.8. Свойства когерентности электромагнитного поля .....                                       | 52  |
| Задачи .....   | 55  |
| Литература .....   | 59  |
| Библиография .....   | 60  |
| Глава 2. Геометрическая оптика .....   | 61  |
| 2.1. Приближенное представление электромагнитного поля .....                                   | 61  |
| 2.2. Асимптотическое решение скалярного волнового уравнения. ..                                | 62  |
| 2.3. Уравнение эйконала .....  | 65  |
| 2.4. Уравнение для лучей .....   | 67  |
| 2.5. Транспортное уравнение для $A_0$ .....  | 71  |
| 2.6. Транспортные уравнения для $A_m$ .....  | 73  |
| 2.7. Затухающие волны и комплексные эйконалы .....   | 76  |
| 2.8. Геометрическая оптика максвелловских векторных полей .....                                | 79  |
| 2.9. Дифференциальные свойства волновых фронтов .....  | 82  |
| 2.10. Каустики и волновые фронты .....   | 86  |
| 2.11. Отражение и преломление волнового фронта на неплоской<br>границе раздела двух сред ..... | 95  |
| 2.12. Решение уравнения эйконала методом разделения переменных                                 | 103 |
| 2.13. Вычисление траекторий лучей методом разделения переменных<br>.....                       | 112 |
| 2.14. Скалярные уравнения для лучей в криволинейных координа-<br>тах; принцип Ферма .....      | 122 |
| 2.15. Элементы гамильтоновой оптики .....  | 131 |
| Задачи .....   | 145 |
| Литература .....   | 151 |
| Библиография .....   | 152 |
| Глава 3. Плоские многослойные среды .....  | 153 |
| 3.1. Введение .....  | 153 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 3.2.     | Геометрическая оптика в слоистых средах .....   | 155 |
| 3.3.     | Сшивка асимптотических разложений; метод Лангера .....                                  | 159 |
| 3.4.     | Отражение и пропускание произвольной неоднородной средой .....                          | 166 |
| 3.5.     | Точное решение для слоя с линейно увеличивающимся показателем преломления .....         | 169 |
| 3.6.     | Многослойные среды с кусочно-постоянным профилем показателя преломления .....           | 170 |
| 3.7.     | Применение теории электрических цепей .....   | 172 |
| 3.8.     | Формулы Френеля .....   | 177 |
| 3.9.     | Метод характеристической матрицы .....  | 180 |
| 3.10.    | Блоховские волны .....  | 185 |
| 3.11.    | Полосы пропускания и непрозрачности стопы четвертьволновых пластинок .....              | 187 |
| 3.12.    | Коэффициент отражения мультислоя .....  | 189 |
| 3.13.    | Металлические и диэлектрические отражатели .....  | 194 |
| 3.14.    | Просветляющие покрытия .....  | 200 |
| 3.15.    | Интерференционные фильтры .....   | 203 |
| 3.16.    | Анизотропные слоистые среды .....   | 207 |
| 3.17.    | Распространение волн в периодической среде .....  | 211 |
| 3.18.    | Аналитические свойства коэффициента отражения .....                                     | 216 |
| 3.19.    | Распространение поверхностных и затухающих волн по тонким пленкам .....                 | 220 |
| 3.20.    | Освещение под углом, большим критического .....   | 224 |
| 3.21.    | Отражение и преломление на границе раздела между диэлектриком и средой с потерями ..... | 228 |
| 3.22.    | Поверхностные волны на границе раздела двух сред .....                                  | 232 |
| 3.23.    | Импедансные граничные условия .....   | 236 |
|          | Задачи .....  | 237 |
|          | Литература .....  | 243 |
|          | Библиография .....  | 244 |
| Глава 4. | Основы теории дифракции .....   | 246 |
| 4.1.     | Введение .....  | 246 |
| 4.2.     | Метод функции Грина .....   | 252 |
| 4.3.     | Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа — Коттлера .....                               | 260 |
| 4.4.     | Условие Зоммерфельда на поле излучения .....  | 262 |
| 4.5.     | Дифракционные интегралы Рэлея для плоских экранов .....                                 | 263 |
| 4.6.     | Принцип Бабиня .....  | 265 |
| 4.7.     | Дифракционные интегралы для двумерных полей .....                                       | 265 |
| 4.8.     | Разложение поля по плоским волнам .....   | 266 |
| 4.9.     | Угловой спектр .....  | 268 |
| 4.10.    | Дифракционные формулы Френеля и Фраунгофера .....                                       | 276 |
| 4.11.    | Разложение поля по цилиндрическим волнам .....  | 282 |
| 4.12.    | Цилиндрические волны комплексного порядка и преобразование Ватсона .....                | 286 |
| 4.13.    | Распределение поля в окрестности фокуса .....   | 294 |
| 4.14.    | Преобразование дифракционных интегралов к контурным .....                               | 313 |
| 4.15.    | Изображение при когерентном и некогерентном освещении .....                             | 319 |
|          | Задачи .....  | 330 |
|          | Литература .....  | 336 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
|          | Библиография .....  | 338 |
| Глава 5. | Асимптотическое вычисление дифракционных интегралов.....  | 339 |
|          | 5.1. Введение .....   | 339 |
|          | 5.2. Метод стационарной фазы .....  | 342 |
|          | 5.3. Границы тени; стационарная точка вблизи граничной .....  | 353 |
|          | 5.4. Каустики цилиндрических полей; две соседние стационарные точки .....   | 360 |
|          | 5.5. Поле вблизи двумерного острого каустики; модель для импульсного отклика при наличии дефокусировки и аберраций третьего порядка ..... | 363 |
|          | 5.6. Метод наибыстрейшего спуска .....  | 366 |
|          | 5.7. Дифракционные эффекты на границе раздела двух диэлектриков .....   | 373 |
|          | 5.8. Асимптотическое вычисление дифракционных интегралов в цилиндрических координатах .....   | 380 |
|          | 5.9. Вывод асимптотических рядов из сравнительных интегралов; метод Честера — Фридмана — Урселла (ЧФУ) .....                              | 384 |
|          | 5.10. Асимптотическое вычисление поля, дифрагированного на отверстии .....  | 385 |
|          | 5.11. Асимптотическая форма разложения полей по плоским волнам .....  | 394 |
|          | 5.12. Формула Уиллиса .....   | 396 |
|          | Задачи .....  | 396 |
|          | Литература .....  | 400 |
|          | Библиография .....  | 401 |
| Глава 6. | Дифракция света на отверстиях и рассеяние на металлических и диэлектрических предметах .....  | 402 |
|          | 6.1. Введение .....   | 402 |
|          | 6.2. Дифракция на клине .....   | 404 |
|          | 6.3. Дифракция на щели .....  | 412 |
|          | 6.4. Дифракция на диэлектрическом цилиндре .....  | 414 |
|          | 6.5. S-матрица и представление Ватсона — Редже .....  | 418 |
|          | 6.6. Поверхностные дифракционные волны .....  | 425 |
|          | 6.7. Обобщенный принцип Ферма и геометрическая теория дифракции .....   | 427 |
|          | 6.8. Рассеяние света диэлектрическими телами .....  | 430 |
|          | 6.9. Приближение физической оптики для идеально проводящего тела .....  | 431 |
|          | 6.10. Электромагнитная теория дифракции на идеально проводящих и диэлектрических дифракционных решетках .....                             | 434 |
|          | 6.11. Рассеяние на телах конечных размеров .....  | 451 |
|          | 6.12. Разложение рассеянного поля по сферическим гармоникам .....   | 454 |
|          | 6.13. Рассеяние на сферических частицах .....   | 458 |
|          | Задачи .....  | 474 |
|          | Литература .....  | 475 |
|          | Библиография .....  | 476 |
| Глава 7. | Оптические резонаторы и интерферометры Фабри — Перо .....   | 478 |
|          | 7.1. Общие свойства резонаторов для электромагнитных волн .....   | 478 |
|          | 7.2. Общие свойства оптических резонаторов .....  | 485 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 7.3.     | Частотный отклик резонатора .....  | 488 |
| 7.4.     | Рассмотрение закрытого эллиптического резонатора в рамках геометрической оптики .....            | 490 |
| 7.5.     | Линейные резонаторы .....  | 494 |
| 7.6.     | Рассмотрение резонатора как последовательности линз .....  | 497 |
| 7.7.     | Поля от источников, расположенных в комплексной плоскости .....                                  | 500 |
| 7.8.     | Эрмит-гауссовы и лаггер-гауссовы пучки .....   | 503 |
| 7.9.     | Применение лучевых матриц для описания последовательности линз, эквивалентной резонатору .....   | 508 |
| 7.10.    | Модовое представление поля внутри устойчивого резонатора, не имеющего дифракционных потерь ..... | 513 |
| 7.11.    | Устойчивые резонаторы .....  | 516 |
| 7.12.    | Неустойчивые резонаторы .....  | 520 |
| 7.13.    | Волновая теория пустых резонаторов .....   | 525 |
| 7.14.    | Интегральные уравнения Фокса — Ли .....  | 527 |
| 7.15.    | Методы расчета модовых конфигураций .....  | 531 |
| 7.16.    | Устойчивые резонаторы с прямоугольными зеркалами .....   | 535 |
| 7.17.    | Резонаторы с аксиальной симметрией .....   | 541 |
| 7.18.    | Дифракционная теория неустойчивых резонаторов .....  | 542 |
| 7.19.    | Резонаторы с активной средой .....   | 545 |
| 7.20.    | Перестройка частоты .....  | 555 |
| 7.21.    | Интерферометры Фабри — Перо .....  | 561 |
|          | Задачи .....   | 569 |
|          | Литература .....   | 574 |
|          | Библиография .....   | 576 |
| Глава 8. | Распространение света в оптических волокнах .....  | 577 |
| 8.1.     | Геометрическая оптика .....  | 577 |
| 8.2.     | Волокна со ступенчатым профилем показателя преломления. .  | 579 |
| 8.3.     | Градиентные волокна .....  | 581 |
| 8.4.     | Модовая теория .....   | 583 |
| 8.5.     | Модовая теория для волокон со ступенчатым профилем показателя преломления .....                  | 586 |
| 8.6.     | Слабонаправляющие волокна со ступенчатым профилем показателя преломления .....                   | 590 |
| 8.7.     | Волокна с параболическим профилем показателя преломления   | 592 |
| 8.8.     | Ненаправляемые моды .....  | 594 |
| 8.9.     | Одномодовые волокна .....  | 596 |
| 8.10.    | Электромагнитное поле внутри волокна .....   | 600 |
| 8.11.    | Затухание .....  | 603 |
| 8.12.    | Дисперсия мод .....  | 605 |
| 8.13.    | Хроматическая дисперсия .....  | 607 |
| 8.14.    | Модовый шум .....  | 609 |
| 8.15.    | Теория связанных мод .....   | 612 |
| 8.16.    | Статистическая теория распространения в системе оптических волокон .....                         | 618 |
| 8.17.    | Оптические волокна, сохраняющие поляризацию излучения ....                                       | 619 |
| 8.18.    | Нелинейные эффекты в оптических волокнах .....   | 621 |
| 8.19.    | Самоиндуцированные нелинейные эффекты .....  | 624 |

|   |     |
|---|-----|
| Задачи .....  | 633 |
| Литература .....  | 635 |
| Библиография .....  | 636 |
| Приложения .....  | 637 |
| Приложение А. Формулы векторного анализа .....                          | 637 |
| Приложение Б. Диады и их свойства .....                                 | 637 |
| Приложение В. Специальные функции .....                                 | 638 |
| Приложение Г. Формулы разложений в ряд .....                            | 643 |
| Приложение Д. Интегральные преобразования .....                         | 645 |
| Приложение Е. Асимптотическое разложение дифракционных интегралов ..... | 646 |
| Именной указатель .....   | 649 |
| Предметный указатель .....  | 651 |

## УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир» .